Universität Konstanz
Fachbereich
Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory

Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 3

Alle Ringe seien kommutativ mit Eins.

Aufgabe 3.1

(a) Geben Sie ein Beispiel eines Ringes R und eines Untermodul eines endlich erzeugten R-Moduls an, der nicht endlich erzeugt ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel eines Hauptidealbereich R und eines torsionfreien R-Moduls an, der nicht frei ist.

Aufgabe 3.2

Sei R ein Ring mit der Eigenschaft, dass jeder nicht-triviale Untermodul eines freien R-Moduls frei ist. Zeigen Sie, dass R ein Hauptidealbereich ist.

Aufgabe 3.3

Seien R ein Ring, M ein R-Modul und T, S Untermoduln von M. Beweisen Sie, dass

$$(S+T)/T \cong S/(S \cap T)$$

gilt.

Aufgabe 3.4

(a) Seien K ein Körper und $\lambda \in K$. Betrachten Sie den $K[x]$-modul $K[x]/\langle (x-\lambda)^n \rangle$ als einen K-Vektorraum mit linearer Abbildung

$$\phi_x : K[x]/\langle (x-\lambda)^n \rangle \to K[x]/\langle (x-\lambda)^n \rangle \ : \ m \mapsto x \cdot m.$$

Zeigen Sie, dass

$$(x-\lambda)^{n-1}+\langle (x-\lambda)^n \rangle,\ (x-\lambda)^{n-2}+\langle (x-\lambda)^n \rangle, ..., (x-\lambda)+\langle (x-\lambda)^n \rangle,\ 1+\langle (x-\lambda)^n \rangle$$

eine Basis für $K[x]/\langle (x-\lambda)^n \rangle$ ist. Zeigen Sie ferner, dass die Matrixdarstellung von ϕ_x bezüglich dieser Basis

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

ist.

(b) Seien K ein Körper, V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $\phi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Betrachten Sie das Paar (V, ϕ) als einen $K[x]$-Modul (wie in Aufgabe 2.2). Zeigen Sie, dass (V, ϕ) ein endlich erzeugter torsion $K[x]$-Modul ist.

(c) Seien K ein algebraischer abgeschlossener Körper, V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $\phi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Benutzen Sie den Struktursatz für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealbereichen um zu zeigen, dass eine Basis $\mathcal{B}$ für V existiert, für die die Matrixdarstellung von ϕ bezüglich $\mathcal{B}$ die Gestalt

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & J_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & J_n \end{pmatrix}$$

hat, wobei die J_i Jordanzellen sind.

Abgabe **Montag, 13.05.2013** bis 12.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.
