Universität Konstanz
Fachbereich
Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory

Algebraische Zahlentheorie

Übungsblatt 2

Alle Ringe seien kommutativ mit Eins.

Aufgabe 2.1
Sei $D \in \mathbb{Z}$ quadratfrei. Sei $K := \mathbb{Q}(\sqrt{D})$.

(a) Sei $D < 0$. Berechnen Sie die Menge der Einheiten von $\mathcal{O}_K$.

(b) Sei $D = 2$. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ so dass $u := a + b\sqrt{2} > 1$ eine Einheit in $\mathcal{O}_K$ ist. Zeigen Sie, dass $a \geq 1$ und $b \geq 1$.

(c) Sei $D = 2$. Zeigen Sie, dass $1 + \sqrt{2}$ eine Einheit in $\mathcal{O}_K$ ist. Zeigen Sie, dass, falls $u > 1$ eine Einheit in $\mathcal{O}_K$ ist, so existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $u = (1 + \sqrt{2})^k$.

(d) Sei $D = 2$. Folgern Sie, dass

$$\{\pm(1 + \sqrt{2})^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

die Menge der Einheiten von $\mathcal{O}_K$ ist.

Hinweis: In Teil (a) behandeln Sie die Fälle $D = -1$ und $D = -3$ getrennt.

Aufgabe 2.2
Sei K ein Körper.

(a) Seien V ein K-Vektorraum und $\phi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Definieren Sie eine Aktion von $K[x]$ auf V durch

$$K[x] \times V \to V \quad (\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, v) \mapsto a_n \phi^n(v) + ... + a_1 \phi(v) + a_0 v.$$

Zeigen Sie, dass V mit dieser Aktion ein K[x]-Modul ist.

(b) Sei M ein $K[x]$-Modul. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\phi_x : M \to M, \quad m \mapsto x \cdot m$$

K-linear ist.

Auf diese Weise bekommen wir eine sinnvolle Bijektion zwischen der Menge der $K[x]$-Moduln und die Menge der Paare (V, ϕ) wobei V ein K-Vektorraum ist und $\phi : V \to V$ eine K-lineare Abbildung ist.

(c) Seien V ein K-Vektorraum und $\phi : V \to V$ eine K-lineare Abbildung. Sei V mit der $K[x]$-Modulstrukture aus (a) versehen. Sei U ein K-Untervektorraum von V.

Unter welcher Bedingung ist U ein $K[x]$-Untermodul von V?

Aufgabe 2.3

Der Zweck dieser Aufgabe ist einen alternativen Beweis der Wohldefiniertheit der (endlichen) Dimension eines freien Moduls zu geben. Deswegen benutzen Sie in dieser Aufgabe bitte nicht, dass die Dimension eines freien Moduls wohldefiniert ist.

Sei R ein Ring. Seien M der freie R-Modul $M := R^n$ und $a_1, ..., a_m$ eine Basis für M mit $m \leq n$.

(a) Sei A die $n \times n$ Matrix über R mit $a_1, ..., a_m$ als die ersten m Reihen und die restlichen Reihen null. Zeigen Sie, dass eine $n \times n$ Matrix P mit

$$PA = I$$

existiert.

(b) Betrachten Sie $\det A$ um zu zeigen, dass $m = n$ ist.

(c) Folgern Sie, für jeden R-Modul M: besitzt M eine Basis mit genau n Elementen, so hat jede Basis von M genau n Elemente.

Aufgabe 2.4

Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Der Torsionsuntermodul M_{tor} von M ist die Menge derjenigen Elemente $m \in M$ für die ein Nichtnullteiler $r \in R$ mit $rm = 0$ existiert.

(a) Zeigen Sie, dass M_{tor} ein Untermodul von M ist.

(b) Seien R ein Ring und M, N R-Moduln. Zeigen Sie, dass

$$(M \oplus N)_{tor} = M_{tor} \oplus N_{tor}$$

gilt.

(c) Seien R ein Ring und M, N R-Moduln. Sei $\phi : M \to N$ ein R-Homomorphismus. Zeigen Sie, dass

$$\phi(M_{tor}) \subseteq N_{tor}$$

gilt.

Abgabe **Montag, 06.05.2013** bis 12.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.
