Universität Konstanz
Fachbereich
Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory

Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 10

Alle Ringe seien kommutativ mit Eins.

Aufgabe 10.1
Sei R ein ganz abgeschlossener Noetherscher Integritätsbereich mit genau einem Primideal außer $\{0\}$.

(a) Sei $\{0\} \neq I \lhd R$. Zeigen Sie, dass ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{m}^n \subseteq I$ existiert.

Hinweis: Sei I maximal mit der Eigenschaft, dass $I \not\supseteq \mathfrak{m}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass I prim ist.

(b) Zeigen Sie, dass $t \in R$ derart existiert, dass für alle $s \in \mathfrak{m}$ aus $\langle t \rangle \subseteq \langle s \rangle$ folgt:
$$\langle t \rangle = \langle s \rangle.$$

(c) Zeigen Sie, dass $\langle t \rangle = \mathfrak{m}$ ist.

Aufgabe 10.2
Zeigen Sie, dass R genau dann ein Dedekindring ist, wenn R noethersch ist und für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \lhd R$ die Lokalisierung $R_{\mathfrak{m}}$ ein diskreter Bewertungsring ist.
Hinweis: Aufgabe 10.1, Übungsblatt 9 und Aufgabe 6.4.

Aufgabe 10.3
Seien R ein Dedekindring und K der Quotientenkörper von R.
Seien $a \in K^\times$ und $\mathfrak{p} \lhd R$ ein von Null verschiedenes Primideal. Sei $v_{\mathfrak{p}}(a) \in \mathbb{Z}$ so dass
$$aR = \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(a)} \cdot \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n$$
wobei $\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_n \lhd R$ von $\mathfrak{p}$ verschiedene Primideale sind. Setze $v_{\mathfrak{p}}(0) := \infty$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$v_{\mathfrak{p}} : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$
eine diskrete Bewertung auf K ist.

(b) Sei $R_{v_{\mathfrak{p}}}$ der Bewertungsring von $v_{\mathfrak{p}}$. Zeigen Sie, dass $R_{\mathfrak{p}} = R_{v_{\mathfrak{p}}}$ gilt.

Aufgabe 10.4

(a) Sei k ein Körper. Zeigen Sie, dass das Ideal $\langle x, y\rangle \lhd k[x, y]$ nicht invertierbar ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel für einen $\mathbb{Z}$-Untermodul von $\mathbb{Q}$ an, der kein gebrochenes Ideal ist.

Abgabe **Montag, 08.07.2013** bis 12.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.
