

23 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Kapitel 3: § 5 Lineare Funktionale

Definition 23.1.

Sei V ein K -Vektorraum $\dim V = n$, $S \subseteq V$.

Annihilator S ist bezeichnet mit S^0 und definiert als

$$S^0 = \{f \in V^* \mid S \subseteq \ker(f)\} = \{f \in V^* \mid f(\alpha) = 0 \text{ für alle } \alpha \in S\}.$$

Bemerkung 23.2.

- (i) $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow S_2^0 \subseteq S_1^0$
- (ii) $S^0 = (\text{span}(S))^0$
- (iii) $S^0 \subseteq V^*$ ist immer ein Unterraum.
- (iv) $S = \{0\} \Leftrightarrow S^0 = V^*$
- (v) $S = V \Rightarrow S^0 = \{0\}$
- (vi) Also $\text{span}(S) = V \Leftrightarrow S^0 = \{0\}$

Beweis von (iv)

“ \Rightarrow ” ist klar.

Für “ \Leftarrow ”: Sei $S^0 = V^*$. Zu zeigen $S = \{0\}$. Zum Widerspruch sei $\alpha \neq 0$ und $\alpha \in S$. $\{\alpha\}$ ist linear unabhängig \Rightarrow ergänze zu einer Basis \mathcal{B} für V :

$$\mathcal{B} = \{\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n\}.$$

Sei \mathcal{B}^* die Dualbasis: $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$. Es gilt $f_1(\alpha_1) = 1$, also $f_1 \notin S^0$. □

Beweis von (vi)

“ \Rightarrow ” Schon gemacht.

“ \Leftarrow ” Sei $S^0 = \{0\}$. Zu zeigen $\text{span}(S) = V$.

Zum Widerspruch setze $W := \text{span}(S)$ und sei

$\alpha \in V \setminus W$ und $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subseteq W$ eine Basis für W . Dann ist $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha\}$ linear unabhängig.

Ergänze zu einer Basis für V : $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha = \alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_n\}$.

Sei $\{f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_n\} = \mathcal{B}^*$ die Dualbasis. Es gilt $f_{k+1}(\alpha_j) = 0$ für alle $j = 1, \dots, k$ und $f_{k+1}(\alpha_{k+1}) = 1$. Also $f_{k+1} \neq 0$ und $f_{k+1} \in S^0$. □

Korollar 23.3.

(Trennung Eigenschaft)

Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum und $\alpha \notin W$. Es existiert ein $f \in V^*$ mit $f(W) = \{0\}$ und $f(\alpha) \neq 0$.**Beweis**Sei $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ eine Basis für W . Nun ist $\alpha \notin \text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, also $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha\}$ ist linear unabhängig.Ergänze zu einer Basis für V : $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha = \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\}$ und sei $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_n\}$ die Dualbasis. Setze $f := f_{k+1}$. □**Satz 23.4.****(Dimensionsformel für Annihilatoren)**Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über K und $W \subseteq V$ ein Unterraum. Es gilt: $\dim W + \dim W^0 = \dim V$.**Beweis**Sei $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ eine Basis für W . Ergänze zu einer Basis für V : $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\}$. Sei $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ die Dualbasis.**Behauptung** $\{f_{k+1}, \dots, f_n\}$ ist eine Basis für W^0 .**Beweis**Es ist klar, dass $f_i \in W^0$ für alle $i \geq k+1$, weil $f_i(\alpha_j) = \delta_{ij} = 0$, falls $i \geq k+1$ und $j \leq k$. Also wenn $\alpha \in W$, ist α eine lineare Kombination von $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ und $f_i(\alpha) = 0$ für alle $i \geq k+1$. Also $f_i \in W^0$ für alle $i \geq k+1$ wie behauptet.Nun ist $\{f_{k+1}, \dots, f_n\}$ linear unabhängig (Teil einer Basis). Also genügt es zu zeigen, dass $\text{span}\{f_{k+1}, \dots, f_n\} = W^0$.Sei $f \in V^*$. Es gilt $f = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) f_i$ (allgemein). Ist aber $f \in W^0$, dann gilt $f(\alpha_i) = 0$ für alle $i \leq k$. Also gilt $f = \sum_{i=k+1}^n f(\alpha_i) f_i$. □**Korollar 23.5.**Sei $\dim W = k$, $\dim V = n$; $W \subseteq V$ ein Unterraum.Es gilt: W ist der Durchschnitt von $(n - k)$ Hyperebenen von V .**Beweis**In der Notation des obigen Beweises: $W = \bigcap_{i=k+1}^n \ker(f_i)$. □**Bemerkung 23.6.**Ist W eine Hyperebene. $\dim W = n - 1$. Also ist $W = \ker(f_n)$ (wie angekündigt).

Korollar 23.7.

W_1, W_2 sind Unterräume von V . Es gilt: $W_1^0 = W_2^0 \Rightarrow W_1 = W_2$.

Beweis

Zum Widerspruch sei $W_1 \neq W_2$, zum Beispiel $\alpha \in W_2, \alpha \notin W_1$. Nach Korollar 23.3 existiert $f \in V^*$ mit $f(W_1) = \{0\}$ und $f(\alpha) \neq 0$. Also $f \in W_1^0$, aber $f \notin W_2^0$, ein Widerspruch. \square