28 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

§ Determinante: Eine kurze Einführung

Erinnerung:

(i) (ÜB 13) $\det(a) = a \quad (1 \times 1$ Determinante)

$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \quad (2 \times 2$ Determinante)

(ii) (Nachträge 9 zur Pelnumsübung am 11.2.20)
Für $n > 2$ wird die Determinante rekursiv wie folgt definiert:

Definition 28.1. Sei A eine $n \times n$ Matrix. Wir bezeichnen mit

(i) M_{ij} die Determinante der $(n-1) \times (n-1)$ Matrix, die wir erhalten, indem wir von A die i-te Zeile und die j-te Spalte von A streichen.

(ii) $C_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij}$ heißt der ***ij*-te Kofaktor** und M_{ij} der ***ij*-te Minor** oder der **Minor $(n-1)$-ter Ordnung** $(1 \leq i, j \leq n)$.

Beispiel 28.2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen

$$M_{11} = \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = 16.$$

Also $C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 16$. Analog

$$M_{32} = \det \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = 26$$

und somit $C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5 M_{32} = -26$.

Definition 28.3. (Kofaktoren Entwicklung)

$$\det(A) := a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots + a_{1n}C_{1n}$$

ist die Kofaktoren Entwicklung nach der 1.-ten Zeile der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Beispiel 28.4. ($n = 3$) Aus

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ergibt sich

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

(Vgl. ÜB 13)

Satz 28.5. Sei A eine $n \times n$ Matrix wie in (*). $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$$

(d.h. $\det(A)$ ist auch gleich der Kofaktoren Entwicklung nach der i-ten Zeile, beziehungsweise der j-ten Spalte).

Der Beweis von diesem wichtigen Satz wird ausführtlich in der Vorlesung LA II behandelt. Hierfür werden wir die Theorie der multilinearen alternierenden Formen entwickeln.

Beachte jedoch: man kann den Satz jetzt schon per Induktion nach n beweisen! Wir werden den Satz aber fürs Erste ohne Beweis als wahr annehmen. Wir werden viele Korollare folgern!

Korollar 28.6. Sei A eine $n \times n$ Dreiecksmatrix wie in (*). Dann ist

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \quad \text{(Produkt der Diagonaleinträge)}$$

Beweis
Sei A ohne Einschränkung eine untere Dreiecksmatrix, d.h. $a_{ij} = 0$ für alle $1 \le i, j \le n$ mit $i < j$. Beachte, dass jede Untermatrix wie in Definition 28.1(i) wieder eine untere Dreiecksmatrix ist. Wir beweisen das Korollar per Induktion nach n.

Anwenden von Definition 28.3 (Kofaktoren Entwicklung nach der ersten Zeile) ergibt

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + 0 + 0 + \ldots + 0 = a_{11}(-1)^2M_{11} = a_{11}M_{11}.$$

Nun ist M_{11} die Determinante der Untermatrix die wir erhalten, indem wir von A die erste Zeile und die erste Spalte streichen. Diese $(n-1) \times (n-1)$ Matrix ist wieder eine untere Dreiecksmatrix mit diagonalen Einträgen $a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

Die Induktionsannahme ergibt nun $M_{11} = \prod_{i=2}^{n} a_{ii}$, und somit ist

$$\det(A) = a_{11}\prod_{i=2}^{n} a_{ii} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Der Fall, in welchem A eine obere Dreiecksmatrix ist (d.h. $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$) wird analog bewiesen. $\square$

Korollar 28.6 enthält die Schlüsselidee zur Berechnung von Determinanten per Gauß-Verfahren (r.Z.s.F.), wie wir später in Satz 28.9 sehen werden.

Korollar 28.7. Wenn A eine Nullzeile enthält, dann ist $\det(A) = 0$.

Beweis
Sei die i-te Zeile die Nullzeile. Die Berechnung von $\det(A)$ per Entwicklung nach der i-ten Zeile gemäß Satz 28.5 ergibt

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} 0C_{ij} = 0.$$

□

Korollar 28.8. Es gilt $\det(A) = \det(A^t)$.

Beweis
Die Zeilen von A sind die Spalten von A^t. Die Behauptung folgt daher sofort aus Satz 28.5. □

Satz 28.9. (Auswirkung von Zeilenumformungen; Vgl. ÜA 13.4)
Sei A eine $n \times n$ Matrix und B die Matrix, die wir erhalten, indem wir genau eine elementare Zeilenumformung ausüben. Dann gilt:

(a) $\det(B) = -\det(A)$ (für Typ 1)

(b) $\det(B) = c\det(A)$ (für Typ 2, $c \in K^\times = K\backslash\{0\}$)

(c) $\det(B) = \det(A)$ (für Typ 3)

Den Beweis von Satz 28.9 werden wir ebenfalls in LA II führen. Man könnte den Satz auch jetzt schon per Induktion nach n durchführen. Im Folgenden werden wir ihn einfach als gegeben voraussetzen.

Korollar 28.10. Sei A eine $n \times n$ Matrix mit zwei verschiedenen Zeilen Z_i und Z_j, so dass $Z_i = cZ_j$ für ein $c \in K^\times$. Dann ist $\det(A) = 0$.

Beweis
Das folgt aus Korollar 28.7 und Satz 28.9(c). □

Korollar 28.10 gilt auch für Spalten anstatt Zeilen.

Beispiel 28.11. (Berechnung von $\det(A)$ per r.Z.S.F.)

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{Typ } 1; Z_1 \leftrightarrow Z_2) \\
&= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{Typ } 2; Z_1 : 3) \\
&= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} \quad (\text{Typ } 3; 2Z_1 + Z_3) \\
&= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} \quad (\text{Typ } 3; -10Z_2 + Z_3) \\
&= (-3)(-55)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{Typ } 2) \\
&= (-3)(-55)(1)(1)(1) \quad (\text{Korollar } 28.6) \\
&= 165
\end{aligned}$$