

25 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Ansatz wie in der 24. Vorlesung.

Korollar 25.1

Sei L ein lineares Funktional auf V^* . Es existiert genau ein $\alpha \in V$ mit $L = L_\alpha$, i.e.

$$L(f) = f(\alpha) \text{ für alle } f \in V^* \quad (**)$$

Beweis

Setze $\alpha := \lambda^{-1}(L)$ □

Korollar 25.1.

Sei \mathbb{B} eine Basis für V^* . Dann existiert eine Basis \mathcal{B} für V mit $\mathcal{B}^* = \mathbb{B}$.

Beweis

Setze $\mathbb{B} = \{f_1, \dots, f_n\}$. Satz 22.9 liefert eine Dual-Basis zu

$$\mathbb{B}; \mathbb{B}^* := \{L_1, \dots, L_n\} \text{ für } (V^*)^* = V^{**}$$

so dass $L_i(f_j) = \delta_{ij}$.

Korollar 25.1 liefert: Für alle i existiert genau ein $\alpha_i \in V$ mit (**), i.e.

$$L_i(f) = f(\alpha_i) \text{ für alle } 1 \leq i \leq n; f \in V^*.$$

Insbesondere: $\delta_{ij} = L_i(f_j) = f_j(\alpha_i)$ für alle $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq n$.

Setze nun $\mathcal{B} := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ □

Bemerkung 25.2.

Sei $E \subseteq V^*$, dann ist $E^0 \subseteq V^{**}$.

$$E^0 = \{L \in V^{**} \mid L(f) = 0 \text{ für alle } f \in E\}.$$

Wir berechnen:

$$\lambda^{-1}(E^0) = \begin{cases} \{ \alpha \in V \mid \lambda(\alpha) \in E^0 \} = \\ \{ \alpha \in V \mid L_\alpha \in E^0 \} = \\ \{ \alpha \in V \mid L_\alpha(f) = 0 \quad \text{für alle } f \in E \} = \\ \{ \alpha \in V \mid f(\alpha) = 0 \quad \text{für alle } f \in E \} \end{cases} \quad (\dagger)$$

Satz 25.3.

Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum. Es gilt $\lambda^{-1}(W^{00}) = W$.

Beweis

$\dim W + \dim W^0 = \dim V = \dim V^* = \dim W^0 + \dim W^{00}$.

Dann gilt $\dim W = \dim W^{00} = \dim \lambda^{-1}(W^{00})$.

Es genügt nun zu zeigen, dass

$$W \subseteq \lambda^{-1}(W^{00}) = \{\alpha \in V \mid f(\alpha) = 0 \text{ für alle } f \in W^0\}$$

(siehe (\dagger)). Aber $\alpha \in W$, also $f(\alpha) = 0$ für alle $f \in W^0$ per Definition! □

Korollar 25.4.

Sei $U \subseteq V^*$ ein Unterraum. Setze $W := \lambda^{-1}(U^0)$. Es gilt: $W^0 = U$.

Beweis

$\dim V^* = \dim U + \dim U^0 = \dim V = \dim W + \dim W^0$. Also $\dim U = \dim W^0$

(weil $\dim W = \dim \lambda^{-1}(U^0) = \dim U^0$).

Es genügt zu zeigen, dass $U \subseteq W^0$.

$W = \{\alpha \in V \mid f(\alpha) = 0 \text{ für alle } f \in U\}$ (siehe †). Sei $f \in U$, dann gilt $f(\alpha) = 0$ für alle $\alpha \in W$. Also $f \in W^0$ per Definition. \square

Kapitel 3: § 7 Die transponierte Abbildung

Ansatz wie immer.

Sei $T : V \rightarrow W$ eine lineare Transformation. T induziert eine Abbildung $T^t : W^* \rightarrow V^*$ definiert durch $V^* \ni f := T^t(g) := g \circ T$ für $g \in W^*$, das heißt $f(\alpha) = (g \circ T)(\alpha) = g(T(\alpha))$ für alle $\alpha \in V$.

Behauptung

T^t ist linear: $c \in K; g_1, g_2 \in W^*$. $T^t(cg_1 + g_2) = (cg_1 + g_2) \circ T = c(g_1 \circ T) + (g_2 \circ T) = cT^t(g_1) + T^t(g_2)$.

Wir haben bewiesen:

Satz 25.5.

Sei V, W ein (endlich dim) Vektorraum über K . Für jede lineare Abbildung $T : V \rightarrow W$ existiert genau ein (auch lineares) $T^t : W^* \rightarrow V^*$, so dass $T^t(g)(\alpha) = g(T(\alpha))$ für alle $g \in W^*, \alpha \in V$.