

17 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Kapitel 3: § 1 Lineare Transformationen

Definition 17.1.

(i) Seien V, W K -VR. Eine Abbildung $T : V \rightarrow W$ ist eine lineare Transformation wenn

$$\forall \alpha, \beta \in V, \forall c \in K : T(\alpha + c\beta) = T(\alpha) + cT(\beta)$$

(ii) Eine lineare Transformation $T : V \rightarrow V$ heißt linearer Operator.

Beispiel 17.2.

(i) $T = 0$.

(ii) $I(\alpha) = \alpha$ Identität

Beispiel 17.3.

$V :=$ Polynomiale Funktionen über K .

$$f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k$$

$$(Df)(x) = c_1 + 2c_2x + \cdots + kc_kx^{k-1}$$

Ableitung Operator.

Beispiel 17.4.

Sei A eine $m \times n$ -Matrix über K .

$$(a) T : K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}$$

$$T(X) := AX$$

$$(b) U : K^m \rightarrow K^n$$

$$U(\alpha) = \alpha A$$

Beispiel 17.5.

P ist eine $m \times m$ -Matrix; Q ist eine $n \times n$ -Matrix.

$$T : K^{m \times n} \rightarrow K^{m \times n}$$

$T(A) := PAQ$ ist ein linearer Operator.

Beispiel 17.6.
 $V = \{f; f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$
 $T : V \rightarrow V$
 $f \mapsto Tf$, wobei $(Tf)(x) := \int_0^x f(t)dt$ für $x \in \mathbb{R}$.
Bemerkung 17.7.
 Lineare Abbildungen erhalten l. K.: $T(\sum_{j=1}^n c_j \alpha_j) = \sum_{j=1}^n c_j T(\alpha_j)$.
Satz 17.8.
 Sei V ein endlich dim Vektorraum über K und W ein K -VR. Sei $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine geordnete Basis für V . Seien β_1, \dots, β_n beliebige Vektoren in W .

 Es existiert eine einzige lineare Transformation $T : V \rightarrow W$ mit $T(\alpha_j) = \beta_j$

 für alle $1 \leq j \leq n$.

(*)

Beweis
 Existenz: Sei $\alpha \in V$. $\alpha = \sum x_j \alpha_j$.

 Definiere $T(\alpha) := \sum x_j \beta_j$. Insbesondere ist (*) erfüllt.

 Ist T linear?

 Sei $\gamma = y_1 \alpha_1 + \dots + y_n \alpha_n$ und sei $c \in K$. Man hat:

 $c\alpha + \gamma = (cx_1 + y_1)\alpha_1 + \dots + (cx_n + y_n)\alpha_n$. Also

$$T(c\alpha + \gamma) = (cx_1 + y_1)\beta_1 + \dots + (cx_n + y_n)\beta_n$$

$$= (cx_1\beta_1 + y_1\beta_1) + \dots + (cx_n\beta_n + y_n\beta_n)$$

$$= (cx_1\beta_1 + \dots + cx_n\beta_n) + (y_1\beta_1 + \dots + y_n\beta_n)$$

$$= c(x_1\beta_1 + \dots + x_n\beta_n) + (y_1\beta_1 + \dots + y_n\beta_n) = cT(\alpha) + T(\gamma)$$

Eindeutigkeit: Seien $T, U : V \rightarrow W$ linear mit $T(\alpha_j) = \beta_j = U(\alpha_j)$.

 Zu zeigen: $T(\alpha) = U(\alpha)$ für alle $\alpha \in V$.

Berechne:

$$U(\alpha) = U(\sum c_j \alpha_j) = \sum c_j U(\alpha_j) = \sum c_j T(\alpha_j) = T(\sum c_j \alpha_j) = T(\alpha).$$

□

Bemerkung 17.9.

Wir haben gezeigt:

- (1) $T, U : V \rightarrow W$ lineare Transformation. Es gilt: $T = U$ genau dann, wenn $T(\alpha_j) = U(\alpha_j)$ für alle $1 \leq j \leq n$ für eine geordnete Basis $\{\alpha_j; 1 \leq j \leq n\}$ von V .
- (2) Wenn wir die Werte $T(\alpha_j)$ kennen, dann können wir "T per Linearität fortsetzen".

Beispiel 17.10.

$$V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}^3.$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 = (1, 2) \\ \alpha_2 = (3, 4) \end{array} \right\} \text{Basis für } V.$$

$$\beta_1 = (3, 2, 1)$$

$$\beta_2 = (6, 5, 4)$$

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T(1, 2) = (3, 2, 1)$$

$$T(3, 4) = (6, 5, 4)$$

$$T(e_1) = ?$$

$$e_1 = (1, 0) = (-2)(1, 2) + (3, 4)$$

$$T(e_1) = (-2)(3, 2, 1) + (6, 5, 4) = (0, 1, 2).$$

Beispiel 17.11.

(mehr dazu im §4, 20. Script)

$T : K^m \rightarrow K^n$ ist eindeutig bestimmt durch $T(e_i) := \beta_i$ für alle $i = 1, \dots, m$ und $\beta_i \in K^n$.

Sei $\alpha = (x_1, \dots, x_m) \in K^m$. $T(\alpha) = x_1\beta_1 + \dots + x_m\beta_m$.

$$\text{Setze } B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \\ \beta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(e_1) \\ \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \\ T(e_m) \end{pmatrix} \text{ } m \times n\text{-Matrix.}$$

$$\text{Berechne: } \alpha B = \underset{1 \times m}{(x_1 \cdots x_m)} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \underset{m \times n}{=} \underset{1 \times n}{x_1\beta_1 + \cdots + x_m\beta_m}.$$

Also $T(\alpha) = \alpha B$.

Kapitel 3: § 2 Bild und Nullraum (Kern)

Lemma 17.12.

Sei $T : V \rightarrow W$ eine lineare Transformation.

- (1) $R_T := \{T(\alpha) \mid \alpha \in V\}$
 $= \{w \mid w \in W \text{ und es existiert ein } \alpha \in V \text{ mit } T(\alpha) = w\}$
 ist ein Unterraum von W .
- (2) $N := T^{-1}\{0\} := \{\alpha \mid \alpha \in V \text{ und } T(\alpha) = 0\}$.
 $N := \ker(T)$ ist ein Unterraum von V .

Beweis

- (1) $\beta_1, \beta_2 \in R_T; c \in K \Rightarrow c\beta_1 + \beta_2 \in R_T?$

$$\beta_1 = T(\alpha_1) \quad \beta_2 = T(\alpha_2)$$

$$T(c\alpha_1 + \alpha_2) = cT(\alpha_1) + T(\alpha_2) = c\beta_1 + \beta_2.$$

$T(0) = 0 \in R_T$. Also $R_T \neq \emptyset$. R_T ist ein Unterraum.

- (2) $\alpha_1, \alpha_2 \in N$

$T(c\alpha_1 + \alpha_2) = c0 + 0 = 0$. Also $c\alpha_1 + \alpha_2 \in N$. Auch $0 \in N$, so dass $N \neq \emptyset$. □

Definition 17.13.

Sei V endlich dim; $T : V \rightarrow W$ eine lineare Transformation.

$\text{rang}(T) := \dim R_T$.