16 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Erinnerung

(i) $y = (y_1, \dots, y_n)$.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \qquad \alpha_i : i\text{-te Zeile.}$$

Es gilt: $yA = y_1\alpha_1 + \cdots + y_n\alpha_n$.

(ii) i-te Zeile von $BA = [i$ -te Zeilenmatrix von $B]$

$$A = (B_{i1}, \dots, B_{in}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n B_{ij}\alpha_j; \;\; 1 \leq i \leq n.$$

Also ist die i-te Zeile von BA eine lineare Kombination der Zeilen von A.

Korollar 16.1.
A $n \times n$ über K, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Zeilenvektoren von A linear unabhängig $\Rightarrow$ A invertierbar.

Beweis
$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ist eine Basis für K^n, also schreibe Standard Basisvektor:
$e_i = \sum_{j=1}^n B_{ij}\alpha_j \quad 1 \leq i \leq n$.

Sei B die $n \times n$-Matrix mit B_{ij} als Koeffizienten. Betrachte die Matrix BA, die i-te Zeile von $BA = [i$-te Zeile von $B]A$, ie. $(B_{i1}, \dots, B_{in})A = \sum_{j=1}^n B_{ij}\alpha_j = e_i$. Also $BA = I_n$. □

Für die Umkehrung siehe Übungsblatt.

Kapitel 2: § 5 Zeilenraum

Definition 16.2.

Sei $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ ----- \\ ----- \\ ----- \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ $m \times n$ über K und $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K^n$ Zeilen von A.

Der *Zeilenraum* von A ist span $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subseteq K^n$ (Unterraum).

Der *Zeilenrang* von A ist die Dimension davon.

Satz 16.3.
Zeilenäquivalente Matrizen haben denselben Zeilenraum.

Beweis
$B = PA; P$ invertierbar; A, B $m \times n$.
A $m \times n$; B $m \times n$; P $m \times m$
So $B = P\ A \leftarrow$ jede B-Zeile ist eine Linearkombination von A-Zeilen.
Also $A = P^{-1}B \leftarrow$ jede A-Zeile ist eine Linearkombination von B-Zeilen.
Also liegt jede B-Zeile im span$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ und umgekehrt.
Also Zeilenraum von A = Zeilenraum von B. □

Wir werden auch die Umkehrung von Satz 16.3 zeigen. Dafür studieren wir den Zeilenraum von Matrizen in r.Z.S.F.

Satz 16.4.
Sei $R \not\equiv 0$ in r.Z.S.F. Dann bilden die Zeilenvektoren von R die ungleich 0 sind, eine Basis für den Zeilenraum von R (also Zeilenrang von $R = \sharp$ der Zeilen, die ungleich 0 sind).

Beweis

Seien $p_1, \ldots, p_r$ die Zeilen $\neq 0$; $R = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_r \\ \vdots \end{pmatrix}$

Es ist klar, dass $p_1, \ldots, p_r$ den Zeilenraum erzeugen. Wir zeigen nun lineare Unabhängigkeit (analog Beispiel 13.4 (d)).
Seien $k_1 < \cdots < k_r$ die Spaltenindexe (in der die Haupteinse der p_i erscheinen)
$c_1p_1 + \cdots + c_rp_r = c_1(0, \ldots, 1, \ldots, 0) + c_2(\ldots 0, 0, 1, \ldots 0) + \cdots + c_r(0, \ldots, 0, 1, \ldots, 0) = (0, \ldots, 0)$
impliziert $c_1 = \cdots = c_r = 0$. □

Hilfslemma 16.5.
Seien R und R' $m \times n$ in r.Z.S.F. Es gilt: R und R' haben denselben Zeilenraum **impliziert** $R = R'$.

Beweis
$k_1 < \cdots < k_r, k'_1 < \cdots < k'_r \leftarrow$ Haupteins-Spalten. Index wie oben.

Beobachte: Wenn p_i eine lineare Kombination von $\{p'_1, \ldots, p'_r\}$ ist, dann gilt $k_i = k'_i$ für alle $1, \ldots, r$. $\square$

Satz 16.6.
Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Sei W ein Unterraum von K^n; $\dim W \leq m$.
Es gilt: $\exists! m \times n$-Matrix in r.Z.S.F. R mit Zeilenraum $R = W$.

Beweis
Existenz: $\dim W \leq m$. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in W$; span $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} = W$.

Setze $A := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ ---- \\ ---- \\ ---- \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ $m \times n$-Matrix.

Zeilenraum $A = W$. A Z. ä. zu R in r.Z.S.F. und Zeilenraum $A =$ Zeilenraum $R = W$.

Eindeutigkeit: Sei R' eine Matrix in r.Z.S.F. mit Zeilenraum $R' = W$.
Dann gilt: Zeilenraum $R =$ Zeilenraum $R' \overset{(H.L.)}{\Rightarrow} R = R'$. $\square$

Korollar 16.7.
Jede $m \times n$-Matrix ist zeilenäquivalent zu einer *eindeutigen* Matrix in r.Z.S. F.

Beweis
A ist zeilenäquivalent zu R und A ist zeilenäquivalent zu R'
$\Rightarrow$ Zeilenraum $R =$ Zeilenraum $A =$ Zeilenraum $R' \Rightarrow R = R'$. $\square$

Korollar 16.8.
A, B sind $m \times n$-Matrizen über K. Es gilt A ist zeilenäquivalent zu B genau dann, wenn Zeilenraum $A =$ Zeilenraum B.

Beweis

"$\Rightarrow$" ✓

"$\Leftarrow$" Zeilenraum $A =$ Zeilenraum $R =$ Zeilenraum $B =$ Zeilenraum R'
$\Rightarrow R = R'$. Also ist A zeilenäquivalent zu R und B ist zeilenäquivalent zu $R \Rightarrow A$ ist zeilenäquivalent zu B. $\square$

Korollar 16.9.
A, B sind $m \times n$-Matrizen über K. Folgende sind äquivalent:

(1) A und B sind zeilenäquivalent.

(2) A und B haben denselben Zeilenraum.

(3) $B = PA$; P invertierbar $m \times m$.

Zusammenfassung

(I) Verfahren zum Berechnen von Basis und Dim von Zeilenraum von A.
- Reduziere A zu R in r.Z.S.F..
- Eine Basis für Zeilenraum $A = \{p_1, \ldots, p_r\}$ (die nicht Nullzeilen von R).

(II) Nun betrachten wir den Lösungsraum zu $AX = 0$, wobei A eine $m \times n$-Matrix ist. Setze $S =$ Lösungsraum. Wir berechnen eine Basis und die Dimension.
- Reduziere A zu R in r.Z.S.F. S ist auch Lösungsraum für $RX = 0$.
- Seien $p_1, \ldots, p_r$ die nicht Nullzeilen von R und $k_1, \ldots, k_r$ die Spaltenindexe, in denen die Haupteins der Zeilen erscheinen.

Erinnerung
Lösungsverfahren:
$\{x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}\}$ Hauptvariablen $J = \{1, \ldots, n\} \setminus \{k_1, \ldots, k_r\}$

$\{x_j, j \in J\}$ freie Variablen; $\mid J \mid = n - r$.

Löse

- $$\left.\begin{array}{lcl} x_{k_1} & = & \sum_{j \in J} c_{1j} x_j \\ \vdots & & \\ x_{k_r} & = & \sum_{j \in J} c_{rj} x_j \end{array}\right\} (*) c_{ij} \in K; 1 \leq i \leq r; j \in J$$

- Alle Lösungen bekommt man durch Einsetzen **beliebiger** Werte für $x_j, j \in J$.

- Also sei E_j die Lösung, die man bekommt durch Einsetzen von $x_j = 1$ und $x_i = 0$ für alle $i \in J \setminus \{j\}$.

Behauptung
Die $(n - r)$-Vektoren $\{E_j; j \in J\}$ sind eine Basis für S.

Beweis

(1) Lineare Unabhängigkeit wie oben. (Die Spaltenmatrix E_j hat eine 1 in der j-ten Zeile und 0 in den anderen Zeilen, die durch Elemente aus J indiziert sind.)

(2) Erzeugen: folgt aus $(*)$.

Details: ÜA. Also $\{E_j; j \in J\}$ Basis. Es gilt also: $\dim S = n - r$.