Universität Konstanz
Fachbereich
Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory

Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 5

Alle Ringe seien kommutativ mit Eins.

Aufgabe 5.1
Für einen Ring R bezeichne $R[[x]]$ den Ring der Folgen über R

$$(a_0, a_1, \dots)$$

mit der komponentenweisen Addition und der Faltung als Multiplikation,

$$(a_0, a_1, \dots) \cdot (b_0, b_1, \dots) = (c_0, c_1, \dots)\ , \quad c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i\, b_{k-i}\,.$$

Sei R ein noetherscher Ring. Zeigen Sie, dass $R[[x]]$ noethersch ist.
Hinweis: Imitieren Sie den Beweis des Hilbertschen Basissatzes.

Aufgabe 5.2
Sei R ein Ring. Zeigen Sie, dass R genau dann noethersch ist, wenn jedes Primideal endlich erzeugt ist.
Hinweis: Für die Rückrichtung:
Schritte 1: Wenden Sie das Zornsche Lemma auf die Menge M der nichtendlich erzeugten Idealen an.
Schritte 2: Sei I maximal in M bezüglich Inklusion. Angenommen, dass $x, y \notin I$ aber $xy \in I$. Zeigen Sie, dass $I + Ry$ und $(I : y) := \{r \in R \mid ry \in I\}$ endlich erzeugt sind. Benutzen Sie die Erzeuger von $I + Ry$ und $(I : y)$, um endlich viele Erzeuger für I zu finden.

Aufgabe 5.3
Sei R ein noetherscher Ring und $S \subseteq R$ multiplikativ (siehe Algebra Skript 3) ohne Nullteiler. Zeigen Sie, dass $S^{-1}R$ noethersch ist.

Aufgabe 5.4
Ein kommutativer Ring heißt **artinsch**, wenn er keine unendliche absteigende Folge

$$I_1 \supsetneq I_2 \supsetneq \dots$$

von Idealen hat.

(a) Sei R ein artinscher Integritätsbereich. Zeigen Sie, dass R ein Körper ist.

Hinweis: Sei $x \in R$. Betrachten Sie die Folge der Ideale

$$\langle x \rangle \supseteq \langle x^2 \rangle \supseteq \dots$$

(b) Folgern Sie, dass jedes Primideal eines artinschen Ringes maximal ist.

Aufgabe 5.5
Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass $K[X,Y]/\langle Y^2 - X^3\rangle$ integer aber nicht ganz abgeschlossen ist.

Aufgabe 5.6 Zusatzaufgabe für Interessierte
Sei R ein Ring. Ein Polynom $p \in R[X_1, .., X_n]$ heißt symmetrisch in $X_1, ..., X_n$, wenn

$$p(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(n)}) = p(X_1, ..., X_n)$$

für alle Permutationen $\sigma \in S_n$.
Die Polynome

$$\begin{aligned}
s_1 &:= X_1 + ... + X_n \\
s_2 &:= X_1X_2 + ... + X_1X_n + X_2X_3 + ... + X_2X_n + ... + X_{n-1}X_n \\
&\vdots \\
s_k &:= \sum_{1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n} X_{i_1} \cdots X_{i_k} \\
&\vdots \\
s_n &:= X_1 \cdots X_n
\end{aligned}$$

heißen elementarsymmetrische Polynome.

(a) Zeigen Sie, dass jedes symmetrische Polynom sich als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen schreiben lässt.

(b) Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass der ganze Abschluss von $K[s_1, ..., s_n]$ in $K(X_1, ..., X_n)$ gerade $K[X_1, ..., X_n]$ ist.

Hinweis: In Teil (a) betrachten Sie die lineare Ordnung auf den Monomen aus $R[X_1, ..., X_n]$ definiert durch

$$X_1^{i_1} X_2^{i_2} \cdots X_n^{i_n} > X_1^{j_1} X_2^{j_2} \cdots X_n^{j_n}$$

wenn entweder

$$i_1 + ... + i_n > j_1 + ... + j_n$$

oder

$$i_1 + ... + i_n = j_1 + ... + j_n$$

und ein $1 \le t < n$ mit

$$i_1 = j_1, ..., i_t = j_t \text{ und } i_{t+1} > j_{t+1}$$

existiert.

Abgabe **Montag, 03.06.2013** bis 12.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.
