Universität Konstanz
Fachbereich
Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory

Algebraische Zahlentheorie
Übungsblatt 4

Alle Ringe seien kommutativ mit Eins.
Aufgabe 4.1

(a) Wie viele $\mathbb{Z}$-Moduln der Mächtigkeit 180 gibt es?

(b) Wie viele $\mathbb{Z}[i]$-Moduln der Mächtigkeit 45 gibt es?

Aufgabe 4.2
Seien R ein Ring und M ein R-Modul. Wir bezeichnen mit End(M) die abelsche Gruppe der R-Homomorphismen von M nach M. Die Addition in End(M) ist durch

$$\phi + \psi : M \to M \ ; \ m \mapsto \phi(m) + \psi(m)$$

gegeben.
Seien R ein Hauptidealbereich und M ein endlich erzeugter R-Torsionsmodul. Sei $\mathcal{P}$ die endliche Menge der $p \in R$ prim mit $M[p^\infty] \neq 0$. In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass

$$M = \oplus_{p\in\mathcal{P}} M[p^\infty].$$

Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{End}(M) = \oplus_{p\in\mathcal{P}} \mathrm{End}(M[p^\infty]).$$

Aufgabe 4.3
Sei $p \in \mathbb{N}$ prim.

(a) Sei $\phi_n : \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$ der eindeutig bestimmter $\mathbb{Z}$-Homomorphismus mit $\phi_n(1) = p$. Zeigen Sie, dass ϕ_n injektiv ist.

(b) Identifizieren Sie $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ mit der von p erzeugten Untergruppe von $\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$. Wir bezeichnen die aufsteigende Vereinigung der $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ unter dieser Identifizierung mit $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ nicht endlich erzeugt ist.

(c) Zeigen Sie, dass, falls A, B Untermoduln von $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ mit $\mathbb{Z}_{p^\infty} = A \oplus B$ sind, so ist $A = 0$ oder $B = 0$.

(d) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $x \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$ ein $y \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$ mit $x = ny$ existiert.

Hinweis: In teil (d) behandeln Sie zuerst den Fall n prim (unterscheiden Sie dabei $n = p$ und $n \neq p$).

Aufgabe 4.4
In Lineare Algebra I haben wir mit elementaren Zeilenumformungen über Körpern gearbeitet. Dies kann man über Ringen betrachten (man darf aber nur Zeilen mit Einheiten multiplizieren).
Sei R ein Ring. Sei $A \in M_{m\times n}(R)$. Wir sagen $B \in M_{m\times n}(R)$ entsteht aus A durch elementare Zeilenumformung (bzw Spaltenumformung), falls man B aus A durch einer der folgenden Operationen erhält:

i Vertauschen zweier Zeilen (bzw Spalten)

ii Multiplikation einer Zeile (bzw Spalte) mit einer Einheit $u \in R$

iii Addition des c-fachen von Zeile (bzw Spalte) i zu Zeile (bzw Spalte) j wobei $c \in R$ und $i \neq j$

Zu einer Matrix $A \in M_{m\times n}(R)$ definieren wir Span(A) als den Untermodul von R^n der von den Zeilen von A erzeugt wird.

(a) Seien $A, B \in M_{m\times n}(R)$ und entstehe B durch eine elementare Zeilenumformung aus A. Zeigen Sie, dass

$$R^n/\mathsf{Span}(A) \cong R^n/\mathsf{Span}(B)$$

gilt.

(b) Seien $A, B \in M_{m\times n}(R)$ und entstehe B durch eine elementare Spaltenumformung aus A. Zeigen Sie, dass

$$R^n/\mathsf{Span}(A) \cong R^n/\mathsf{Span}(B)$$

gilt.

(c) Sei G die Quotientengruppe

$$\mathbb{Z}^3/\mathsf{Span}\{(6,10,0),(6,0,15),(0,10,15)\}.$$

Beschreiben Sie die Struktur von G als Produkt von zyklischen Gruppen.

Hinweis: Reduzieren Sie die Matrix mit Zeilen $(6,10,0),(6,0,15),(0,10,15)$ durch elementare Zeilenumformung und Spaltenumformung zu einer Diagonalmatrix.

Abgabe **Dienstag, 21.05.2013** bis 12.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.
