11 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II(SoSe 2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Im diesem Skript werden wir weitere Eigenschaften und Formelberechnungen für die Determinante finden, und damit Kapitel II beenden.

Ansatz vom Skript 10: A $n \times n$ über R, A_{ij} (auch a_{ij}) bezeichnet der ij-te Koeffizient von A.

Definition 11.1. $C_{ij} := (-1)^{i+j} \det A[i \mid j] = (-1)^{i+j} D_{ij}$ ist der ij-te *Kofaktor von* A.

Korollar 10.8 besagt also dass für jede j-te Spalte gilt: $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} C_{ij}$.

Lemma 11.2.
$k \neq j \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} A_{ik} C_{ij} = 0$.

Beweis:
Ersetze die j-te Spalte von A durch ihre k-te Spalte und nenne die so erhaltene Matrix B. Es gilt also: $B_{ij} = A_{ik}$ für alle i. B hat zwei gleiche Spalten, also ist $\det(B) = 0$. Nun ist $B[i \mid j] = A[i \mid j]$. Also:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(B) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \; B_{ij} \; \det B[i \mid j] \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \; A_{ik} \; \det A[i \mid j] \\ &= \sum_{i=1}^{n} A_{ik} \; C_{ij} \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Wir fassen zusammen:

Korollar 11.3. $\sum_{i=1}^{n} A_{ik} \; C_{ij} = \delta_{jk} \; \det(A)$ $(*)$

Definition 11.4.
Die zu A *adjungierte Matrix* $adj(A)$ ist die Transponierte der Matrix der Kofaktoren von A, das heißt $(adj \; A)_{ij} := C_{ji} = (-1)^{i+j} \; \det A[j \mid i]$.

Die Formeln für Matrix Produkt, gemeinsam mit $(*)$ ergibt:

Korollar 11.5. $(adj \; A)A = \det(A) I_n$. $(**)$

Lemma 11.6.
$A(adj\ A) = \det(A)I_n$.

Beweis:
Es gilt offensichtlich dass $A^T[i \mid j] = A[j \mid i]^T$.
Wir berechnen wegen Satz 10.4:
$(-1)^{i+j}\det A^T[i \mid j] = (-1)^{i+j}\det A[j \mid i]$
(ij-te Kofaktor von A^T = ji-te Kofaktor von A).
Also $adj(A^T) = (adj A)^T$ $(***)$

Nun impliziert $(**)$ für A^T: $(adj A^T)A^T = (\det A^T)I_n = (\det A)I_n$.
Zusammen mit $(***)$ erhalten wir: $(adj A)^T A^T = [A(adj A)]^T = (\det A)I_n = A(adj A)$.
Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Korollar 11.7. $A(adj A) = (\det A)I_n$ und $(adj A)A = \det(A)I_n$. $(\dagger)$.

Erinnerung (LA I Skript 9): $A \in M_{n\times n}(R)$ ist über R invertierbar, falls es $B \in M_{n\times n}(R)$ gibt, so dass $AB = BA = I_n$. Genauso wie für den Fall wo $R = K$ ein Körper, gilt: Wenn B existiert, dann ist B eindeutig; $B := A^{-1}$.

Satz 11.8.
$A \in M_{n\times n}(R)$ ist über R invertierbar genau dann, wenn $\det(A) \in R^\times$ (eine Einheit in R). Insbesondere wenn $R = K$ ein Körper; dann ist A invertierbar über K genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$, und wenn $R = K[x]$; dann ist A invertierbar über $K[x]$ genau dann, wenn $\det(A) \in K^\times$.
Ist A invertierbar, so ist $A^{-1} = \det(A)^{-1} adj(A)$.

Beweis:
Aus $(\dagger)$ sehen wir: $\det(A)$ invertierbar in R (i.e., eine Einheit von R) $\Rightarrow A$ invertierbar über R und $A^{-1} = (\det A)^{-1} adj A$.
Umgekehrt: A invertierbar $\Rightarrow AA^{-1} = I_n \Rightarrow \det(AA^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A)\det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A)$ ist eine Einheit in R.
Für $R = K[x]$: $f, g \in K[x]$; $fg = 1 \Rightarrow \deg\ f + \deg\ g = 0 \Rightarrow \deg\ f = \deg\ g = 0$.
Also sind die Einheiten von R, die $\neq 0$ sind, Skalarpolynome. □

Beispiel 11.9.
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

$adj(A) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$

$\det(A) = -2$. A ist nicht invertierbar über $\mathbb{Z}$. A ist aber invertierbar als Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{Q}$ und $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Beispiel 11.10.
$R = \mathbb{R}[x]$

$A = \begin{pmatrix} x^2+x & x+1 \\ x-1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} x^2-1 & x+2 \\ x^2-2x+3 & x \end{pmatrix}$

$\det(A) = x+1 \qquad \det B = -6$
A nicht invertierbar $\qquad B$ invertierbar

Lemma 11.11.
Ähnliche Matrizen haben gleiche Determinanten.

Beweis:
$B = P^{-1}\ A\ P$ für $A, B \in M_{n\times n}(K)$

$\det B = \det(P^{-1}\ AP) = \det(P)^{-1}\det(P)\det(A) = \det(A)$ □

Wegen Lemma 11.11 können wir nun folgendes definieren:

Definition 11.12.
Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $\dim(V) = n$ und $T : V \longrightarrow V$ ist ein linearer Operator. Wir definieren $\det(T) \coloneqq \det([T]_{\mathcal{B}})$ für eine beliebige Basis $\mathcal{B}$ von V.

Wir beenden das Skript, und somit den Kapitel mit einer nützlicher Formel:

Satz 11.13. Cramer's Regel
Sei $A \in M_{n\times n}(K)$ mit $\det(A) \neq 0$ und $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^{n\times 1}$.

Betrachte das lineare Gleichungssystem: $AX = Y$. Dann kann man seine eindeutige Lösung $X = A^{-1}Y$ so beschreiben: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, wobei $x_j = \frac{\det B_j}{\det A}$ und B_j die $n \times n$-Matrix ist, die man erhält, wenn man die j-te Spalte von A durch Y ersetzt.

Beweis:
Es gilt $adj(A)AX = adj(A)Y$, also (wegen Korollar 11.7) gilt: $(\det A)X = adj(A)Y$

Also $(\det A)x_j = \sum_{i=1}^{n}(adj A)_{ji}y_i$

Also gilt für $1 \leq j \leq n$, dass $(\det A)x_j = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}y_i\ \det A[i \mid j] = \det B_j$. □