7 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II (SoSe 2020)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir die Parität einer Permutation einführen, und beweisen, dass der Begriff wohldefiniert ist. Wir werden dann eine wichtige Untergruppe von S_n kennenlernen, und damit Abschnitt 6 beenden. Diese Vorarbeit ist für die spätere formale Behandlung der Determinante notwending.

§ 6 Die symmetrischen Gruppen S_n (Fortsetzung)

Beispiel: Die Darstellung als Produkt von paarweise disjunkte Zyklen der Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (134)\,(25)$$

Satz 7.1. Jede Permutation $\sigma \in S_n$ ist ein Produkt von Transpositionen.

Beweis:
Das neutrale Element (1) ist $(12)\,(21)$.
Wegen Satz 6.8 genügt es zu zeigen, dass ein Zyklus ein Produkt von Transpositionen (2- Zyklus) ist. Sei $(i_1 \dots i_r) \in S_n$ ein r-Zyklus mit $r > 2$. Wir behaupten dass

$$(i_1 i_2 \dots i_r) = (i_1 i_r)\,(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_3)\,(i_1 i_2)\ .$$

Für i_r gilt:

$$(i_1 i_r)\,(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_3)\,(i_1 i_2)\, i_r = (i_1 i_r)\, i_r = i_1\ .$$

Für i_s mit $1 \leq s < r$ gilt:

$$\begin{aligned}(i_1 i_r)\,(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_3)\,(i_1 i_2)\, i_s &= (i_1 i_r)\,(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_{s+1})\,(i_1 i_s)\, i_s \\ &= (i_1 i_r)\,(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_{s+2})\,(i_1 i_{s+1})\, i_1 \\ &= (i_1 i_r)\,(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_{s+2})\, i_{s+1} = i_{s+1}.\end{aligned}$$

□

Beispiel 7.2. Die Permutation $(123) \in S_4$ hat zwei Darstellungen:

$$(123) = (13)\,(12) = (13)\,(42)\,(12)\,(14)$$

Die Darstellung ist also i.A. nicht eindeutig, sogar ist die Anzahl der Permutationen in einer Darstellung nicht eindeutig. Was ist denn eindeutig? Die **Parität** ist eindeutig, wie wir jetzt erklären.

Erinnerung: $\mathbb{Z}^n := \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$.

Definition 7.3. Seien $\sigma \in S_n$ und $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ eine Abbildung. Wir definieren σf als Abbildung $\sigma f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ wie folgend:

$$(\sigma f)\,(x_1, \dots, x_n) := f\left(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\right)$$

Beispiel 7.4. Sei $f : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}$ definiert durch $f(x_1, x_2, x_3) := x_1x_2 + x_3$ and $\sigma := (123) \in \mathrm{S}_3$. Die Abbildung $(\sigma f)(x_1, x_2, x_3) = f(x_2, x_3, x_1) = x_2x_3 + x_1$.

Lemma 7.5. Sei $\sigma, \tau \in S_n$ und $f, g : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$. Dann

(i) $\sigma(\tau f) = (\sigma\tau) f$

(ii) $\sigma(fg) = (\sigma f)(\sigma g)$

Beweis: Siehe ÜB.

Satz 7.6. Es existiert eine wohldefinierte Abbildung sign: $\mathrm{S}_n \to \{1, -1\}$ so dass:

(a) Für jede Transposition $\tau \in \mathrm{S}_n$, $\mathrm{sign}(\tau) = -1$.

(b) Für alle $\sigma, \tau \in S_n$ gilt

$$\mathrm{sign}(\sigma\tau) = \mathrm{sign}(\sigma)\mathrm{sign}(\tau)$$

Diese Abbildung ist eindeutig mit diesen Eigenschaften.

Beweis: Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\Delta : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ die Abbildung

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) := \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

Behauptung: Für eine Transposition $\tau \in \mathrm{S}_n$ gilt $\tau\Delta = -\Delta$. In der Tat, sei $\tau = (rs)$ mit $r < s$. Aus Lemma 7.5(ii) folgt

$$\tau\Delta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} \tau(x_j - x_i)$$

Offensichtlich, wenn $i, j \notin \{r, s\}$ dann $\tau(x_j - x_i) = (x_j - x_i)$.
Für den Faktor $(x_s - x_r)$ gilt $\tau(x_s - x_r) = (x_r - x_s) = -(x_s - x_r)$.
Die andere Faktoren können wir paaren wie folgt:

$$\begin{aligned} &(x_k - x_s)(x_k - x_r), \text{ wenn } k > s; \\ &(x_s - x_k)(x_k - x_r), \text{ wenn } r < k < s; \\ &(x_s - x_k)(x_r - x_k), \text{ wenn } k < r. \end{aligned}$$

Jedes Produkt ist von τ unberührt.
Also $\tau\Delta = -\Delta$. Wir haben die Behauptung bewiesen. □Beh.

Sei nun $\sigma \in \mathrm{S}_n$. Wegen Satz 7.1 schreiben wir $\sigma = \tau_1 \dots \tau_m$ wobei $\tau_1, \dots, \tau_m$ Transpositions sind. Aus Lemma 7.5(i) folgt:

$$\sigma\Delta = \tau_1(\tau_2(\dots(\tau_m\Delta)\dots))$$

und die Behauptung impliziert dass

$$\tau_1(\tau_2(\dots(\tau_m\Delta)\dots)) = (-1)^m \Delta.$$

Also **entweder** $\sigma\Delta = (-1)^m \Delta = \Delta$ wenn m gerade, **oder** $\sigma\Delta = (-1)^m \Delta = -\Delta$, wenn m ungerade. Wir merken dass beide Fälle nicht gleichzeitig auftreten können, da $\Delta \neq 0$ ist.

Für $\sigma \in S_n$, setze entweder $\mathrm{sign}(\sigma) = 1$ wenn $\sigma\Delta = \Delta$ oder $\mathrm{sign}(\sigma) = -1$ wenn $\sigma\Delta = -\Delta$.

Seien σ, $\tau \in S_n$. Aus Lemma7.5 (ii) folgt: $(\sigma\tau)\Delta = \sigma(\tau\Delta)$, also $\mathrm{sign}(\sigma\tau)$=$\mathrm{sign}(\sigma)\mathrm{sign}(\tau)$. □

Definition 7.7. Für $\sigma \in \mathrm{S}_n$, nennen wir $\mathrm{sign}(\sigma)$ die *Signatur* von σ. Wir nennen σ *gerade* wenn $\mathrm{sign}(\sigma) = 1$ und *ungerade* wenn $\mathrm{sign}(\sigma) = -1$.

Bemerkung 7.8. Die Permutation

- σ ist gerade genau dann, wenn σ ist Produkt von m Transpositionen mit m gerade, und
- σ ist ungerade wenn σ ist Produkt von m Transpositionen mit m ungerade.

Betrachte nun die folgende Untermenge von S_n:

$$A_n := \{\sigma \mid \sigma \text{ ist gerade } \}$$

Korollar 7.9. A_n eine Untergruppe von S_n und $|A_n| = \dfrac{n!}{2}$.

Beweis:
Das neutrale Element (1) ist gerade, also $(1) \in A_n$.
Wenn $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$ und $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_k$ (wobei τ_i, γ_j Transpositionen und k, n gerade sind), dann ist $\sigma\gamma = \tau_1 \cdots \tau_m \ \gamma_1 \cdots \gamma_k$. Also ist A_n abgeschlossen unter Produkt.
Da $\sigma^{-1} = \tau_m^{-1} \cdots \tau_1^{-1}$, ist A_n auch unter Inversen abgeschlossen. Siehe ÜB.

Betrachte nun $U := \{\delta \in S_n \mid \delta \text{ ist ungerade}\}$. Offensichtlich ist $S_n = A_n \cupdot U$.
Außerdem ist $A_n \longrightarrow U$; $\sigma \longmapsto (12)\sigma$ eine bijektive Abbildung.
Da $|S_n| = n!$ (siehe ÜB), folgt unsere letzte Behauptung. □

Definition 7.10. Wir nennen A_n ist die *alternierende Gruppe*.