# 6 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II (SoSe 2020)

**Prof. Dr. Salma Kuhlmann**

**KAPITEL II: MULTILINEARFORMEN UND DETERMINANTEN.**

*In diesem Skript führen wir die symmetrische Gruppe $S_n$ ein, die wir für die Definition der Determinante später brauchen. Unser erstes Ziel ist es Satz 6.8 zu beweisen. Wir werden die Untersuchung von $S_n$ in Skript 7 fortsetzen.*

## § 6 Die symmetrischen Gruppen $S_n$

**Notation 6.0:** Für $n \in \mathbb{N}$, setze $\mathbb{N}_n := \{1, \cdots, n\}$.

**Definition 6.1.**
Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine *Permutation* auf $\mathbb{N}_n$ ist eine Bijektion $\alpha : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$. Wir schreiben $S_n$ für die Menge der Permutations auf $\mathbb{N}_n$. Diese Menge $S_n$ versehen mit der Verknüpfung $S_n \times S_n \to S_n$, $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \circ \beta$ ist eine Gruppe; die *symmetrische Gruppe auf n Elemente.*
**Notation:** Wir schreiben $\alpha\beta := \alpha \circ \beta$. Für $\alpha \in S_n$ schreiben wir:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \alpha(1) & \cdots & \alpha(n) \end{pmatrix}$$

• Warum ist $S_n$ eine Gruppe?

1. Wenn $\alpha, \beta \in S_n$ dann ist $\alpha \circ \beta$ bijektiv, also $\alpha \circ \beta \in S_n$.
2. Die Identitätsabbildung $\epsilon : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$, definiert durch $\epsilon(i) := i$ für alle $i \in \mathbb{N}_n$, ist das neutrale Element von $S_n$.
3. Bijektive Abbildungen sind invertierbar: wenn $\alpha \in S_n$, dann gibt es $\beta \in S_n$ so dass $\alpha \circ \beta = \epsilon$.
4. Multiplikation ist assoziativ weil die Komposition von Abbildungen immer assoziativ ist.

$\square$

**Beispiel 6.2.**
Die Permutation $\alpha \in S_5$ mit $\alpha(1) = 3$ ; $\alpha(2) = 5$ ; $\alpha(3) = 4$ ; $\alpha(4) = 1$ ; $\alpha(5) = 2$ wird so geschrieben:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Definition 6.3.**

1. Wenn es $a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{N}_n$ gibt so dass:
   - $\alpha(a_i) = a_{i+1}$ ; $\forall 1 \leq i \leq m-1$ ; und
   - $\alpha(a_m) = a_1$ und
   - $\alpha(x) = x$ ; $\forall x \notin \{a_1, \cdots, a_m\}$,

     dann heißt $\alpha$ ein *$m$-Zyklus*.

   **Notation dafür:** $(a_1 a_2 \cdots a_m)$.

   **Konvention:** Die Identitätsabbildung wird bezeichnet $\epsilon := (1)$.

2. Ein 2-Zyklus heißt eine *Transposition*.

**Beispiel 6.4.** Die Permutation
$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
ist der 3-Zyklus (142).

**Definition 6.5.**
Die Permutationen $\alpha, \beta \in S_n$ sind *disjunkt* wenn
$$\{x \,;\, \alpha(x) \neq x\} \cap \{x \,;\, \beta(x) \neq x\} = \emptyset.$$

**Beispiel 6.6.** Betrachte folgende Transpositionen:
$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (12)$$
$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (34)$$
und
$$\gamma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (23)$$
Die Permutationen $\sigma$ und $\tau$ sind disjunkt, $\sigma$ und $\gamma$ sind nicht disjunkt, $\tau$ und $\gamma$ sind nicht disjunkt.

**Lemma 6.7.** Seien $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in S_n$ paarweise disjunkte Permutationen und sei $\tau \in S_n$. Die Permutationen $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ und $\tau$ sind disjunkt genau dann, wenn für alle $1 \leq i \leq m$ sind $\alpha_i$ und $\tau$ disjunkt.
**Beweis:** Siehe ÜB. □

**Satz 6.8.**
Jede Permutation $\sigma \in S_n$ hat eine Darstellung als Produkt $\sigma = \alpha_1 \cdots \alpha_m$, wobei $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in S_n$ paarweise disjunkte Zyklen sind.

**Beweis:**
Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Wir beweisen die Aussage per Induktion nach:

$$\Gamma(\sigma) := |\{a \in \mathbb{N}_n \,;\, \sigma(a) \neq a\}|$$

• Induktionsanfang:
wenn $\Gamma(\sigma) = 0$ dann ist $\sigma = \epsilon = (1)$.

• Induktionsannahme:
die Aussage gelte für alle $\tau \in S_n$ wofür $\Gamma(\tau) < k$.

• Induktionsschritt:

Setze $k := \Gamma(\sigma) > 0$. Sei $i_0 \in \mathbb{N}_n$ so dass $\sigma(i_0) \neq i_0$.

Für $s \in \mathbb{N}$ setze $i_s := \sigma^s(i_0)$. Da $\{i_s \,;\, s \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}_n$, ist diese Menge endlich.

Folglich gibt es $p < q \in \mathbb{N}$ so dass $i_p = i_q$. Insbesondere ist $\sigma^{q-p}(i_0) = i_0$.

Also ist die Menge $\{l \in \mathbb{N}\,;\, \sigma^l(i_0) = i_0\}$ nicht die Leeremenge.

Sei $\rho \geq 2$ die kleinste natürliche Zahl wofür $\sigma^\rho(i_0) = i_0$ und setze $r := \rho - 1$.

Die Minimalität von $\rho$ impliziert dass $|\{i_0, \cdots, i_r\}| = \rho$
(wenn $i_j = i_l$ für $0 \leq j < l \leq r$ dann wäre $\sigma^{l-j}(i_0) = i_0$, und $l - j < \rho$, Widerspruch).

Analog beweist man: für $a \in \{i_0, \cdots, i_r\}$ gilt $\sigma(a) \neq a$. (*)

Betrache den Zyklus $\tau := (i_0 \cdots i_r)$.

Per Definition gilt für alle $0 \leq l \leq r$ dass $\tau(i_l) = \sigma(i_l)$. (†)

Bemerke auch dass $\tau(a) = a$ genau dann, wenn $a \notin \{i_0, \cdots, i_r\}$. (**)

Aus (*) folgt außerdem dass $\sigma(a) = a$ impliziert $a \notin \{i_0, \cdots, i_r\}$. (***)

Aus (†), (**) und (***) folgt unmittelbar:

$$\{a \in \mathbb{N}_n \,;\, \tau^{-1}\sigma(a) = a\} = \{a \in \mathbb{N}_n \,;\, \sigma(a) = a\} \cup \{i_0, \cdots, i_r\} \text{ (††)}$$

.

Also ist $\Gamma(\tau^{-1}\sigma) < \Gamma(\sigma)$ und die Induktionsannahme gilt dafür. Schreibe

$$\tau^{-1}\sigma = \alpha_1 \cdots \alpha_m$$

oder

$$\sigma = \tau\alpha_1 \cdots \alpha_m$$

wobei $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ paarweise disjunkte Zyklen sind.

Aus (††) und (**) folgt:

$\tau^{-1}\sigma = \alpha_1 \cdots \alpha_m$ und $\tau$ sind disjunkt. Schließlich folgt aus Lemma 6.7 dass auch $\tau, \alpha_1, \cdots, \alpha_m$ paarweise disjunkte Zyklen sind. $\square$