Tag der Mathematik 2022

Gruppenwettbewerb
Einzelwettbewerb
Mathematische Hürden

Aufgaben mit Lösungen

Zentrum für Mathematik • Tachauer Straße 4 • 36119 Neuhof • 06655-9176355
Internet: www.z-f-m.de • Email: tdm@z-f-m.de

Aufgabe G1:

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto f(x) = \frac{|x|-1}{|x-1|}$
Stellen Sie $f(x)$ betragsfrei dar, beschreiben Sie das Verhalten von f für $|x| \to \infty$ und zeichnen Sie das Schaubild von f im Koordinatensystem (1 LE = 1cm).

Lösung:

$$|x| = \begin{cases} x & für\ x \geq 0 \\ -x & für\ x < 0 \end{cases} \qquad |x-1| = \begin{cases} x-1 & für\ x \geq 1 \\ -(x-1) = 1-x & für\ x < 1 \end{cases}$$

(a) $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

(b) $x > 1$: $\quad f(x) = \dfrac{x-1}{x-1} = 1$

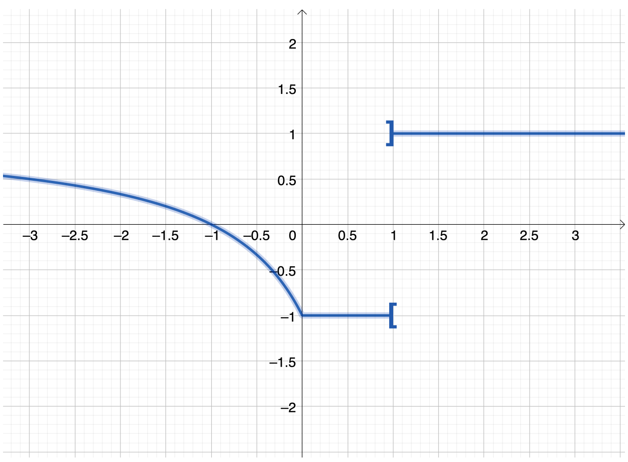
$0 \leq x < 1$: $\quad f(x) = \dfrac{x-1}{-(x-1)} = -1$

$x < 0$: $\quad f(x) = \dfrac{-x-1}{-(x-1)} \quad \left[ggf. \quad = \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{x-1+2}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1}\right]$

(c) (1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 1$

(d)



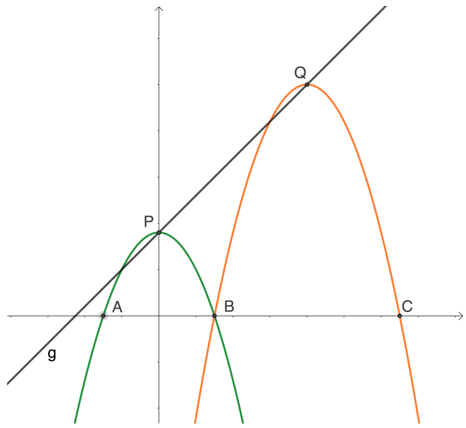
Aufgabe G2:

Die Parabel mit der Gleichung $y = -x^2 + 9$ habe den Scheitel P und schneide die x-Achse in A und B.
Diese Parabel wird so verschoben, dass sich ihr Scheitel auf der Geraden $g: y = 2x + 9$ nach Q bewegt. In dieser Lage hat die Parabel die Schnittpunkte mit der x-Achse in B und C.

Berechnen Sie die Koordinaten von C.

Lösung:

$y = -x^2 + 9 = -(x+3)(x-3)$
Also besitzt die Parabel den Scheitel $P(0|9)$ und schneidet die x-Achse in $A(-3|0)$ und $B(3|0)$.



Da P sich entlang der Geraden g mit $y = 2x + 9$ bewegt, wird P jeweils 1LE nach rechts und 2LE nach oben verschoben, d.h. bei t LE nach rechts auch $2t$ LE nach oben.

Die Gleichung der Schar der verschobenen Parabeln lautet demnach:
$y = -(x-t)^2 + 9 + 2t$ mit den Scheiteln Q$(t; 2t+9)$

Da die gesuchte Parabel die x-Achse auch in $B(3|0)$ schneiden soll, muss gelten:

	$-(x-t)^2 + 9 + 2t$	$=$	0
mit $x = 3$ folgt:	$9 + 2t$	$=$	$9 - 6t + t^2$
	$t^2 - 8t$	$=$	0
	$t(t-8)$	$=$	0

Also ist $t = 0 \lor t = 8$.

Da $t \neq 0$ bleibt als einzige Lösung $t = 8$
Die gesuchte Parabel hat die Gleichung:
$y = -(x-8)^2 + 25$ oder $y = -x^2 + 16x - 39$

Für die Berechnung von C: $-(x-8)^2 + 25 = 0 \Leftrightarrow x = 13 \lor x = 3$
➔ $C(13|0)$

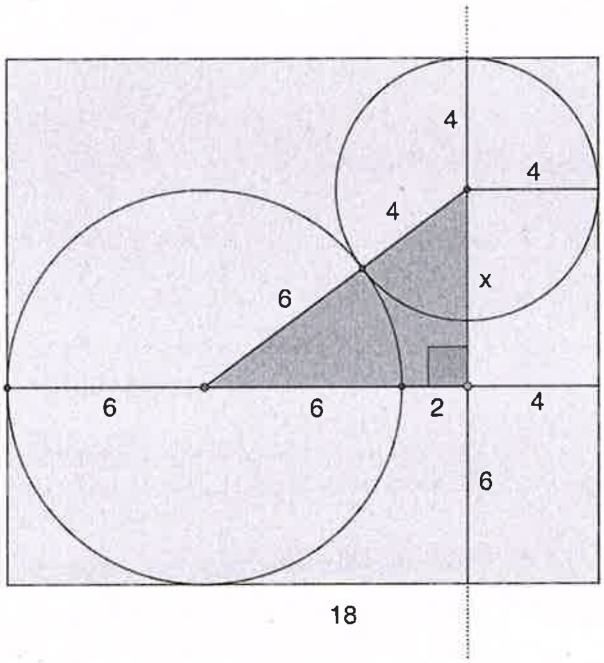
Tag der Mathematik 2022

Aufgabe G3 mit Lösung

Aufgabe G3:

Einem Rechteck sollen zwei Kreise mit einem Durchmesser von 8 cm bzw. 12 cm überschneidungsfrei einbeschrieben werden. Die eine Seitenlänge des Rechtecks ist 18 cm. Wie lang muss die andere Seitenlänge mindestens sein?

Lösung:



Zielführende Zeichnung bzw. Identifikation des gefärbten Dreiecks

Wende Satz des Pythagoras auf das gefärbte Dreieck an:

	10^2	$=$	$x^2 + 8^2$
$\Leftrightarrow$	x^2	$=$	36
$\Rightarrow$	x	$=$	6
	h	$=$	$4 + x + 6$
$\Rightarrow$	h	$=$	16

Aufgabe: G4

Gegeben sind die drei Punkte $A(7|4), B(3|1), C(0|c)$.

Wie muss c gewählt werden, damit $AC + BC$ minimal ist?

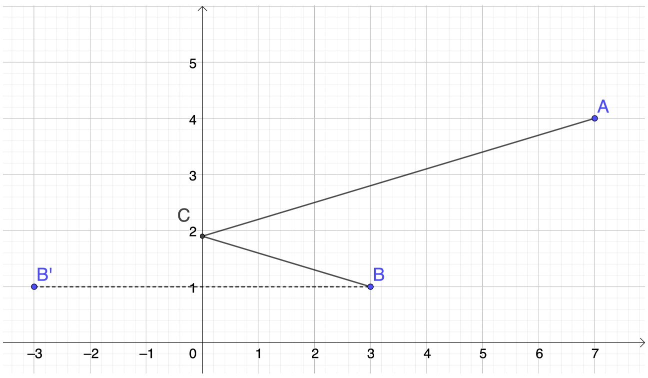
Lösung (1):

Spiegele $B(3|1)$ an der y-Achse nach $B'(-3|1)$ (→ vgl. Zeichnung):

$$AC + BC = AC + B'C \ \ wird\ minimal, wenn\ C\ auf\ AB'\ liegt$$

$$\Rightarrow g_{AB'}: \frac{y-4}{x-7} = \frac{1-4}{-3-7} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{3}{10}x + \frac{19}{10}$$

Also hat C die Koordinaten $C(0|1{,}9)$.



Lösung (2):

Abstand $\quad d(c) = \sqrt{3^2 + (c-1)^2} + \sqrt{7^2 + (c-4)^2}$

$$\begin{aligned}
d'(c) = & \quad \frac{c-1}{\sqrt{3^2+(c-1)^2}} + \frac{c-4}{\sqrt{7^2+(c-4)^2}} &=& \quad 0 \\
\Longrightarrow & \quad (c-1)^2(7^2+(c-4)^2) &=& \quad (c-4)^2(3^2+(c-1)^2) \\
\Longrightarrow & \quad (c-1)^2 \cdot 7^2 &=& \quad (c-4)^2 \cdot 3^2 \\
\Longrightarrow & \quad |c-1| \cdot 7 &=& \quad |c-4| \cdot 3
\end{aligned}$$

$$wegen\ 1 < c < 4\ folgt\ (c-1)\cdot 7 = (4-c)\cdot 3\ , also\ c = \frac{19}{10}$$

Aufgabe E1:

Gegeben ist die Gleichung: $x^{\sqrt{x}+4} = \left(\sqrt{x}\right)^x \qquad (x > 0)$

Bestimmen Sie alle Lösungen dieser Gleichung!

Lösung (1):

$$x^{\sqrt{x}+4} = (\sqrt{x})^x$$

$$\left(\left(\sqrt{x}\right)^2\right)^{\sqrt{x}+4} = \left(\sqrt{x}\right)^x$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^{2\sqrt{x}+8} = \left(\sqrt{x}\right)^x$$

Vergleich der Exponenten für
$x \neq 1$ liefert:

$$2\sqrt{x} + 8 = x$$

$$2\sqrt{x} = x - 8$$

$$x^2 - 16x + 64 = 4x$$

$$x^2 - 20x + 64 = 0$$

$x = 4$ oder $x = 16$

(notwendige) Probe liefert: $x = 16$

Obige Einschränkung $x \neq 1$ liefert
nach separater Untersuchung:
$x = 1$

$\mathbb{L} = \{\mathbf{1}\,;\mathbf{16}\}$

Lösung (2):

$x^{\sqrt{x}+4} = (\sqrt{x})^x$ (Logarithmieren)

$$\left(\sqrt{x} + 4\right) ln(x) \; = \; x \; ln\left(\sqrt{x}\right)$$

$$\left(\sqrt{x} + 4\right) ln(x) \; = \frac{1}{2} x \; ln(x)$$

$$\left(\sqrt{x} + 4 - \frac{1}{2}x\right) ln(x) = 0$$

$$\sqrt{x} + 4 - \frac{1}{2}x = 0 \qquad \vee \quad ln(x) = 0$$

$$x^2 - 20x + 64 = 0 \qquad \vee \qquad x = 1$$

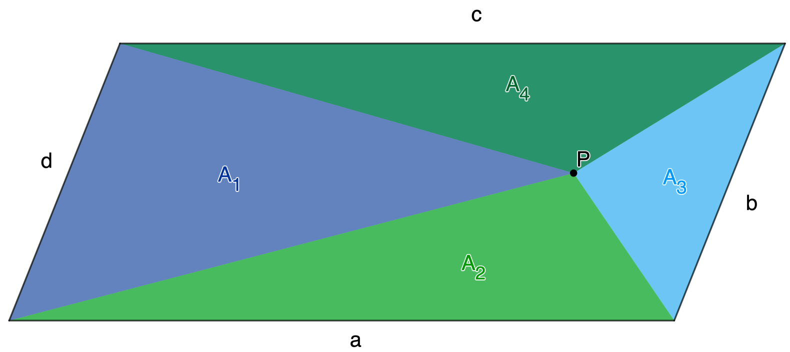
$$x = 4 \quad \vee \quad x = 16 \quad \vee \quad x = 1$$

(notwendige) Probe liefert:
$x = 16$ bzw. $x = 1$ und damit

$\mathbb{L} = \{\mathbf{1}\,;\mathbf{16}\}$

Aufgabe E2:

Gegeben ist ein beliebiger Punkt P innerhalb eines Parallelogramms.

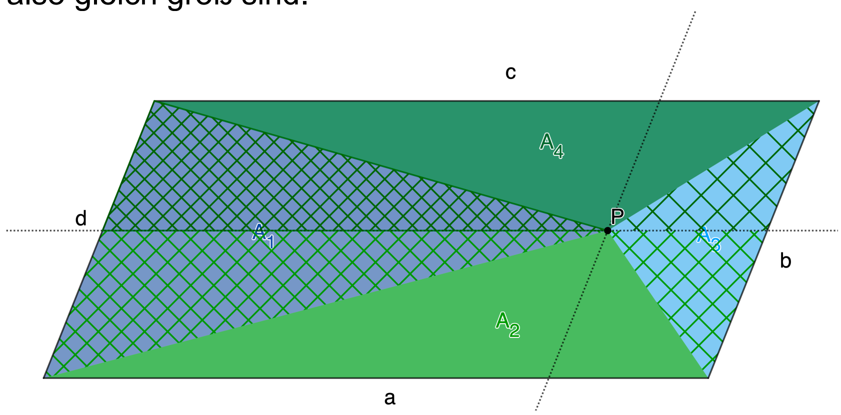


Verbindet man P mit den Ecken des Parallelogramms, dann entstehen 4 Dreiecke (vgl. Skizze).

Zeigen Sie: $A_1 + A_3 = A_2 + A_4$

Lösung (1):

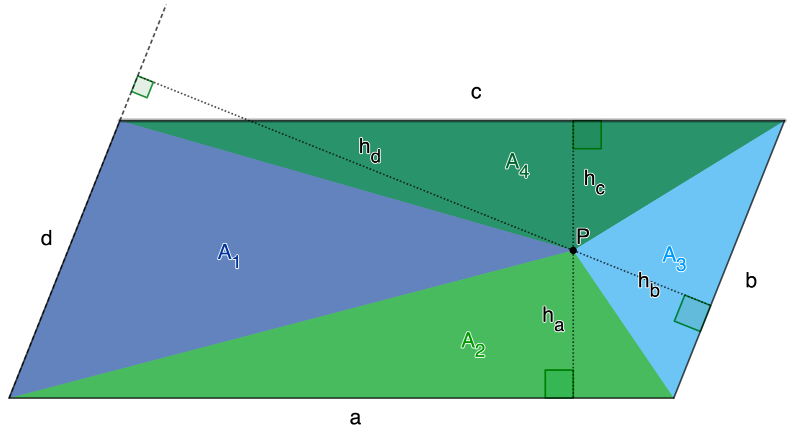
Zeichne Parallelen zu den Seiten durch P und erhalte vier Teilparallelogramme.
Es entstehen in jedem Teilparallelogramm zwei kongruente Dreiecke, die also gleich groß sind.



Obige Behauptung $A_1 + A_3 = A_2 + A_4$ verifiziert sich unmittelbar durch Flächenvergleich!

Lösung (2):

Sei D die Gesamtfläche des Parallelogramms, und h_a, h_b, h_c, h_d sind die Höhen auf a, b, c, d.



Damit ergibt sich:

$$A_1 + A_3 = \frac{1}{2}(d \cdot h_d + b \cdot h_b) = \frac{1}{2} \cdot D$$

$$(d = b;\ \ h_d + h_b = Gesamthöhe\ des\ Parallelogramms\ auf\ d\ bzw.b)$$

$$A_2 + A_4 = \frac{1}{2}(a \cdot h_a + c \cdot h_c) = \frac{1}{2} \cdot D$$

$$(a = c;\ \ h_a + h_c = Gesamthöhe\ des\ Parallelogramms\ auf\ a\ bzw.c)$$

Aufgabe E3:

Gegeben sei das LGS

$$\begin{vmatrix} ax + y = a^2 \\ x + ay = 1 \end{vmatrix}$$

Für welche Werte von a hat das Lineare Gleichungssystem keine, genau eine, unendlich viele Lösungen?

Lösung (1):

Interpretiere die Gleichungen als Geraden im KOS:

$$\begin{vmatrix} y = -ax + a^2 \\ y = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{a} \end{vmatrix}$$

Folgende Fälle sind möglich:

- $a = 1 \Longrightarrow \begin{vmatrix} y = -x + 1 \\ y = -x + 1 \end{vmatrix}$
  Beide Geraden fallen zusammen; es gibt **unendlich viele Lösungen**.

- $a = -1 \Longrightarrow \begin{vmatrix} y = x + 1 \\ y = x - 1 \end{vmatrix}$
  Beide Geraden sind (echt) parallel; es existieren **keine Lösungen**.

- $a \neq \pm 1$
  Es handelt sich um zwei nichtparallel Geraden; es gibt **genau eine Lösung**

Lösung (2):

Löse das LGS formal:

$$\left|\begin{matrix} ax+y=a^2 \\ x+ay=1 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} ax+y=a^2 \\ y-a^2y=a^2-a \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} ax+y=a^2 \\ y=\dfrac{a^2-a}{1-a^2} \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} x=a-\dfrac{a-1}{1-a^2} \\ y=\dfrac{a^2-a}{1-a^2} \end{matrix}\right|$$

$$\Longrightarrow jeweils\ genau\ eine\ Lösung\quad \left\{a-\frac{a-1}{1-a^2}\,;\,\frac{a^2-a}{1-a^2}\right\}\ für\ a\neq\pm 1$$

Untersuche die Einschränkungen für a in obiger Lösungsmenge:

- $a=1 \Longrightarrow \left|\begin{matrix} x+y=1 \\ x+y=1 \end{matrix}\right|$ ⇒ unendlich viele Lösungen
- $a=-1 \Longrightarrow \left|\begin{matrix} x-y=-1 \\ x-y=1 \end{matrix}\right|$ ⇒ es existiert keine Lösungen

Aufgabe E4:

Bei einem Turnier trifft jede Spielerin genau einmal auf jede andere Teilnehmerin. Nach jedem Spiel gibt die Schiedsrichterin jeder der beiden Spielerinnen ein farbiges Kärtchen. Dieses ist rot für die Siegerin und grün für die Verliererin, bei Unentschieden erhalten beide ein gelbes Kärtchen. Am Ende des Turniers hat die Schiedsrichterin genau 52 Kärtchen jeder Farbe verteilt.

Wie viele Teilnehmerinnen nehmen am Turnier teil?

Lösungen:

Sei n die gesuchte Anzahl der Spielerinnen, so gibt es $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1) = \binom{n}{2}$ Spiele.

Es gab 52 Siege / Niederlagen sowie $\frac{52}{2} = 26$ unentschiedene Spiele. Also wurden $52 + 26 = 78$ Spiele ausgetragen.

Also gilt:

$$\begin{array}{rrcll} & \frac{1}{2} n \cdot (n-1) & = & 78 & \\ \Leftrightarrow & n \cdot (n-1) & = & 156 & * \text{ oder alternativ pq-Formel} \\ \Leftrightarrow & n & = & 13 & \end{array}$$

* 156 ist das Produkt zweier natürlicher aufeinanderfolgender Zahlen: $156 = 12 \cdot 13$

Tag der Mathematik 2022 – Universität Konstanz

Aufgabe H1:

Betrachte die ersten beiden Reihen eines Schachbretts mit 8×2 Feldern. Es seien 8 ununterscheidbare Dominosteine der Größe 2×1 gegeben. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese beiden Reihen ganz mit diesen Dominosteinen auszulegen, wenn ein Dominostein immer genau zwei Felder des Schachbretts überdeckt?

Lösung:

Man kann das Brett mit „senkrechten“ Steinen oder Paaren von „waagrechten“ Steinen auffüllen. Die Anzahl s der senkrechten Steine ist jeweils gerade, also $s = 0, 2, 4, 6, 8$. Bei s senkrechten Steinen bleibt Platz für $w = \frac{8-s}{2}$ waagrechte Paare von Steinen. Die Abfolge der s senkrechten Steine und der w waagrechten Steine ist beliebig. Wären alle diese $s+w$ Steine bzw. Paare unterscheidbar, hätten wir dafür

$$(s + w)!$$

Möglichkeiten, diese anzuordnen. Aufgrund der Ununterscheidbarkeit ergeben sich

$$M_k := \frac{(s + w)!}{s!w!}$$

Möglichkeiten. Wir erhalten

s	0	2	4	6	8
w	4	3	2	1	0
$s+w$	4	5	6	7	8
M_k	1	10	15	7	1

und damit insgesamt 34 Möglichkeiten.

Aufgabe H2:

Die Zeiger einer Uhr stehen auf 18 Uhr 20 Min.

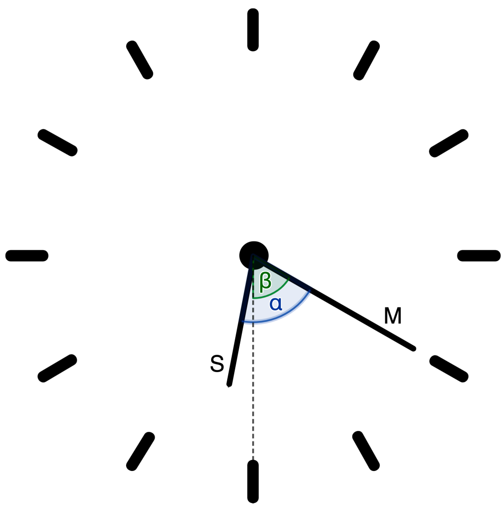
Bestimmen Sie den kleineren der beiden Winkel, der durch die Zeiger eingeschlossen wird.

Lösung:

- Der Minutenzeiger M überstreicht pro Minute $360°: 60 = 6°$ (also $\beta = 60°$)
- Der Stundenzeiger S überstreicht pro Stunde $360°: 12 = 30°$

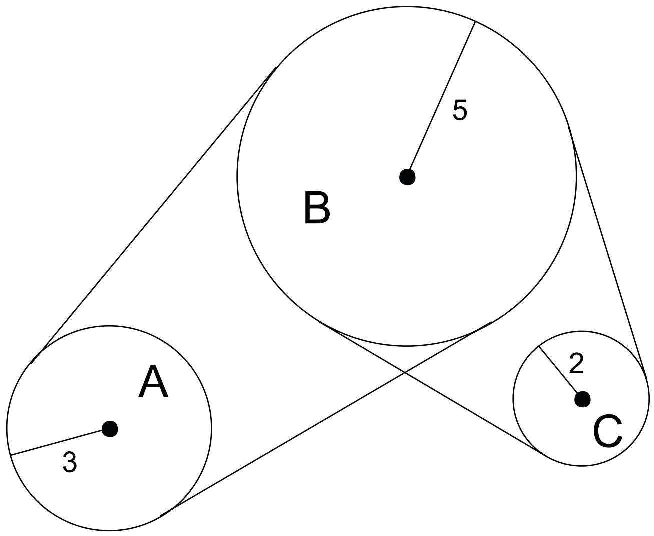
→ pro Minute $30°: 60 = 0{,}5°$

Winkel α zwischen M und S um 18:20 Uhr:
In 20 Minuten hat sich S um $20 \cdot 0{,}5° = 10°$ gedreht
$\Longrightarrow \quad \alpha = 60° + 10° = 70°$



Aufgabe H3:

Gegeben sind 3 Räder A, B, C mit den Radien 3, 5, 2 LE (vgl. Abbildung).
Rad A treibt Rad B an, welches Rad C antreibt.
Wenn A sich mit 40 Umdrehungen pro Minute dreht, wie viele Umdrehungen macht dann Rad C pro Minute?



Lösung (1):

Die 40 Umdrehungen/min von Rad A entsprechen einer zurückgelegten Strecke von $40 \cdot 3 \cdot 2\pi = 240\pi$

Da Rad C von Rad A angetrieben wird, sind die zurückgelegten Strecken gleich lang, also gilt:

$$240\pi = x \cdot 2 \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = 60$$

Das Rad C dreht sich mit 60 Umdrehungen pro Minute.

Lösung (2):

Die Drehgeschwindigkeit der Räder ist antiproportional zu ihren Radien:
Sei c die Umdrehungszahl/min von Rad C , dann gilt: $\frac{c}{40} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow c = 60$

Zentrum für Mathematik • Tachauer Straße 4 • 36119 Neuhof • 06655-9176355
Internet: www.z-f-m.de • Email: tdm@z-f-m.de

Aufgabe H4:

Wenn man ein Quadrat mit der Seitenlänge von 6cm auf ein Dreieck legt, kann man maximal 60% des Dreiecks abdecken.
Wenn man das Dreieck auf das Quadrat legt, kann man bis zu $\frac{2}{3}$ des Quadrats abdecken.

Welche Fläche hat das Dreieck?

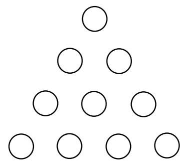
Lösung:

In beiden Fällen ist der Inhalt der abgedeckten Fläche gleich, d.h. der Inhalt der maximal abgedeckten Fläche beim Dreieck ist genauso groß wie der Inhalt der maximal abgedeckten Fläche des Quadrats.

Also gilt für die Dreiecksfläche A: $0{,}6A = \frac{2}{3} \cdot 36 \Leftrightarrow A = 24 \cdot \frac{10}{6} = 40$

Aufgabe H5:

Beim Bowlingspiel mit 10 Kegeln, die in Dreiecksform angeordnet sind (vgl. Abb.), bleiben bei einem Wurf drei Kegel stehen, die die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden.

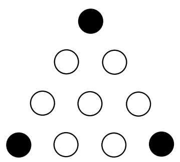


Wie viele solche Dreiecke sind möglich?

Lösung:

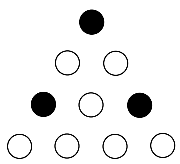
Es sind folgende Stellungen möglich:

(1)



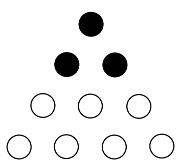
Anzahl: 1

(2)



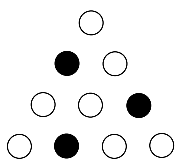
Anzahl: 3

(3)



Anzahl: 9

(4)



Anzahl: 2

Gesamtanzahl: 15 Möglichkeiten

Aufgabe H6:

Ordnen Sie die folgenden Zahlen hinsichtlich ihrer Größe:

$2^{5555}, 3^{4444}, 4^{3333}, 5^{2222}$

Lösung:

Es gilt:

$$2^{5555} = 2^{5\cdot 1111} = (2^5)^{1111} = 32^{1111}$$

$$3^{4444} = 3^{4\cdot 1111} = (3^4)^{1111} = 81^{1111}$$

$$4^{3333} = 4^{3\cdot 1111} = (4^3)^{1111} = 64^{1111}$$

$$5^{2222} = 5^{2\cdot 1111} = (5^2)^{1111} = 25^{1111}$$

Also gilt: $5^{2222} < 2^{5555} < 4^{3333} < 3^{4444}$

Aufgabe H7:

Wieviel 5-stellige Zahlen gibt es, bei denen mindestens zwei benachbarte Ziffern übereinstimmen?

Hinweis: Die Angabe eines Terms als Ergebnis genügt!

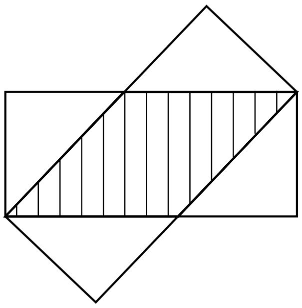
Lösung:

Es gibt $9 \cdot 10^4 = 90000$ fünfstellige Zahlen und $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^5$ Zahlen, bei denen keine zwei aufeinanderfolgende Ziffern gleich sind.

Ergebnis: $90000 - 9^5$ (= 30951)

Aufgabe H8:

Zwei 3cm x 7cm Rechtecke werden wie abgebildet übereinandergelegt.



Wie groß ist die schraffierte Fläche?

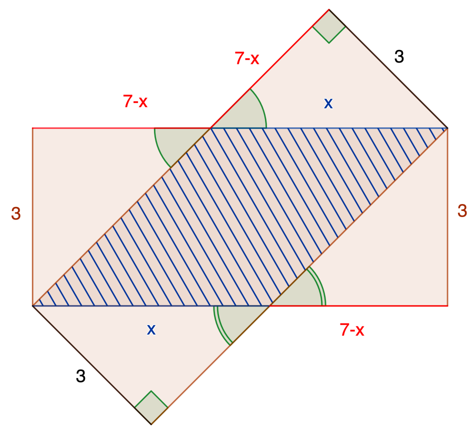
Lösung:

(1) $A = 3 \cdot 7 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (7 - x)$

(2) Da die unschraffierten Dreiecke kongruent sind (WSW), muss die schraffierte Fläche eine Raute mit der Seitenlänge x sein:

$$x^2 = 3^2 + (7-x)^2 \ (Satz\ des\ Pythagoras)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = 9 + 49 - 14x + x^2 \Leftrightarrow x = \frac{29}{7}$$



Mit (1) folgt: $A = 21 - 21 + 3 \cdot \frac{29}{7} = \frac{87}{7}$

oder (Trapezformel) $A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (x + x) = 3x \Longrightarrow A = 3 \cdot \frac{29}{7} = \frac{87}{7}$