Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS 11/12
06.12.2011
Zettel 7

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 1: Geben Sie in den Teilen a) bis d) (mit Beweis) an, ob die folgenden Mengen in den jeweiligen Vektorräumen über den jeweiligen Körpern linear abhängig oder unabhängig sind.
a) $\{\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5 & -2 & 4 & -1\end{pmatrix}\} \subset \mathbb{C}^{1\times 4}$ über $\mathbb{C}$.
b) $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\} \subset \mathbb{R}$ über $\mathbb{R}$. Was ergibt sich über $\mathbb{Q}$?
c) $\{\begin{pmatrix}123 \\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}cos(\frac{1}{3}) \\ sin(\frac{7}{13})\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sqrt{17} \\ -\frac{50}{49}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\pi \\ \frac{3\pi}{177}\end{pmatrix}\} \subset \mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$
d) $\{2, 1+2X, X^2, 2X^2+X^3, X+2X^3\} \subset \mathbb{F}_3[X]$, wobei $\mathbb{F}_3[X]$ den Raum der Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{F}_3$ bezeichnet.
e) Bilden die Spalten der Matrix $\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & -1\end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 2: Sei K ein Körper. Bekanntlich hat $Mat_{n\times n}(K)$ über K die Dimension n^2. Eine Matrix $A \in Mat_{n\times n}(K)$ heißt symmetrisch, falls $A_{ij} = A_{ji}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Ist $char(K) \neq 2$, so heißt A alternierend, falls $A_{ij} = -A_{ji}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Wir bezeichnen die Menge der symmetrischen $n \times n$-Matrizen mit $Sym_{n\times n}(K)$ und die der alternierenden mit $Alt_{n\times n}(K)$.
a) Zeigen Sie: $Sym_{n\times n}(K)$ und $Alt_{n\times n}(K)$ sind Unterräume von $Mat_{n\times n}(K)$.
b) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von $Sym_{n\times n}(K)$ und $Alt_{n\times n}(K)$.
c) Zeigen Sie: $Mat_{n\times n}(K) = Sym_{n\times n}(K) + Alt_{n\times n}(K)$.

Aufgabe 3: Sei K ein endlicher Körper mit k Elementen, und sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über K. Bestimmen Sie (mit Beweis) die Anzahl der Elemente von V.

Aufgabe 4: Sei K ein endlicher Körper mit k Elementen.
a) Zeigen Sie: $char(K) = p$ für ein $p \in \mathbb{P}$, wobei $\mathbb{P}$ wie üblich die Menge der Primzahlen bezeichnet.
b) Zeigen Sie nun: $k = p^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
(Tipp: Beachten Sie, dass Körper als Vektorräume über ihren Teilkörpern aufgefaßt werden können und benutzen Sie Aufgabe 3.)

Zusatzaufgabe für Interessierte: Sei K eine endlicher Körper mit k Elementen, und sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über K, ferner $l \leq n$.
a) Bestimmen Sie (mit Beweis) die Anzahl der Basen von V.
b) Bestimmen Sie (mit Beweis) die Anzahl der Unterräume von V mit Dimension l.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe bis zum 13.12.2011, 12.30. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.