Fachbereich Mathematik und Statistik der Universität Konstanz
S. Kuhlmann, M.Carl

WS 11/12
15.11.2011
Zettel 4

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 1: Berechnen Sie mit ausführlichem Rechenweg:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 \\ \frac{1}{2} & -5 & 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Z}_6$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 2 \\ 1 & 9 & -7 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: a) Finden Sie zwei quadratische Matrizen A und B über $\mathbb{F}_5$ so, dass $A \cdot B \neq B \cdot A$.
b) Finden Sie zwei quadratische reelle Matrizen $A \neq 0$ und $B \neq 0$ so, dass $A \cdot B = B \cdot A = 0$.
c) Finden Sie eine quadratische reelle Matrix $A \neq 0$ so, dass $A^2 = 0$

Aufgabe 3: Es sei $\mathbb{C}$ die Menge der Ausdrücke der Form $\{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$. Auf dieser Menge definieren wir die Operationen $\oplus$, $\otimes$ und $|\cdot|$, genannt komplexe Addition, komplexe Multiplikation und komplexe Betragsfunktion für $a + bi$ und $c + di$ wie folgt:
$(a + bi) \oplus (c + di) := (a + c) + (b + d)i$,
$(a + bi) \otimes (c + di) := (ac - bd) + (ad + bc)i$ und
$|(a + bi)| := \sqrt{a^2 + b^2}$.

Zeigen Sie:
a) Für $x, y \in \mathbb{C}$ gilt $|x \otimes y| = |x| \cdot |y|$, wobei nun $\cdot$ die gewöhnliche Multiplikation reeller Zahlen bezeichnet.
b) $(\mathbb{C}, \oplus, \otimes)$ ist ein Körper.
c) Zu jedem $z \in \mathbb{C}$ existiert $y \in \mathbb{C}$ so, dass $y \otimes y = z$.

Aufgabe 4: Es sei $\tilde{\mathbb{C}}$ die folgende Menge von Matrizen:
$\tilde{\mathbb{C}} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$
Außerdem definieren wir die Addition von 2×2-Matrizen durch
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{pmatrix}.$
a) Zeigen Sie, dass $(\tilde{\mathbb{C}}, +, \cdot)$ mit der Matrixaddition $+$ und Matrixmultiplikation $\cdot$ ein Körper ist.
b) Sei nun $\mathbb{C}$ definiert wie in Aufgabe 3. Betrachten Sie die Funktion:
$\varphi : \mathbb{C} \ni a + bi \longmapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \tilde{\mathbb{C}}$
Zeigen Sie: $\varphi(i)^2; = \varphi(-1)$ und, für alle $x, y \in \mathbb{C}$:
$\varphi(x \oplus y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ und $\varphi(x \otimes y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Konstruieren Sie einen unendlichen Körper K mit $char(K) = 2$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe bis zum 22.11.2011, 12.30. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.