



Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS 11/12
31.01.2012
Zettel 13

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 1: a) Prüfen Sie das folgende Argument: Es sei M eine Menge, R eine symmetrische, transitive Relation auf M . Sei $x \in M$, ferner $y \in M$ so, dass $R(x, y)$. Wegen Symmetrie ist dann auch $R(y, x)$, und wegen Transitivität auch $R(x, x)$. Also folgt die Reflexivität einer Relation aus ihrer Transitivität und Symmetrie. Wo liegt der Fehler? Finden Sie ein konkretes Gegenbeispiel.

b) Stimmt die Behauptung aus a), wenn Sie zusätzlich annehmen, dass $\forall x \in M \exists y \in M R(x, y)$? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein konkretes Gegenbeispiel.

Aufgabe 2: Es sei $E = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5\}$ die Standardbasis des \mathbb{R}^5 und W ein Unterraum von \mathbb{R}^5 , der von den Vektoren

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ \alpha_2 &= \varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + 3\varepsilon_4 + \varepsilon_5 \\ \alpha_3 &= \varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 + 6\varepsilon_3 + 4\varepsilon_4 + \varepsilon_5\end{aligned}$$

aufgespannt wird.

Finden Sie eine Basis für W^0 .

Aufgabe 3: Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum mit Unterräumen W_1 und W_2 .

Zeigen Sie: $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$ und $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$.

Aufgabe 4: Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, I_n die $n \times n$ -Einheitsmatrix. Existieren $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ mit $AB - BA = I_n$?

Zusatzaufgabe für Interessierte: Sei K ein Körper,
 $S := \{M \in \text{Mat}_{n \times n}(K) : \exists A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(K) M = AB - BA\}$, ferner
 $U := \{M \in \text{Mat}_{n \times n}(K) : \sum_{i=1}^n M_{ii} = 0\}$. Zeigen Sie: U und S sind Unterräume von $\text{Mat}_{n \times n}(K)$ und es gilt $S = U$. Bestimmen Sie die Dimension von S .

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe bis zum 07.02.2012, 12.30. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F , 4. Etage.