Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS 11/12
24.01.2012
Zettel 12

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 1: Entscheiden Sie für die jeweiligen Relationen, ob sie reflexiv, transitiv, symmetrisch sind und ob es sich um eine Äquivalenzrelation handelt. Ist R eine Relation auf einer Menge M, $x, y \in M$, so schreiben wir $R(x, y)$ für $(x, y) \in R$.
a) Sei K ein Körper, R auf $Mat_{n\times n}(K)$ definiert durch $R(M, N)$ gdw. M und N ähnlich.
b) Sei K ein Körper, R auf $Mat_{n\times n}(K)$ definiert durch $R(M, N)$ gdw. M und N zeilenäquivalent.
c) Sei R definiert auf $\mathbb{N}$ durch $R(a, b)$ gdw. $a|b$.
d) $R_m(a, b)$ gdw. a und b bei Division durch m denselben Rest lassen. (Hinweis: Zeigen Sie, dass $R_m(a, b)$ gdw. $m|(a - b)$).
e) Sei $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Menge der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Zu
$f_1, f_2 \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gelte $R(f_1, f_2)$ gdw.

$$\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 (y > x \implies \exists z \in [y, y+ \in] f_1(z) = f_2(z))$$

Aufgabe 2: Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3 in einer reellen Variablen x mit reellen Koeffizienten. Es sei $D : V \to V$ gegeben durch $D(P) = P'$, wobei P' die Ableitung von P nach x bezeichnet. Es sei $\mathbb{B} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ mit $f_i(x) := x^{i-1}$ eine angeordnete Basis von V, ferner $t \in \mathbb{R}$ und $g_i(x) := (x + t)^{i-1}$. Auf Zettel 9 haben Sie gezeigt, dass D linear ist und eine Matrixdarstellung für D bezüglich $\mathbb{B}$ bestimmt. Zeigen Sie, dass auch $\mathbb{B}' := \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ eine Basis für V ist und bestimmen Sie die Matrixdarstellung von D bezüglich $\mathbb{B}'$.

Aufgabe 3: Es sei A eine beliebige nichtleere Menge, $R \subseteq A \times A$ eine Relation auf A.
a) Sei R Äquivalenzrelation. Zu $x \in A$ heißt die Menge $[x]_R := \{y \in A : R(x, y)\}$ die Äquivalenzklasse von x unter R. Zeigen Sie, dass für $x, y \in A$ entweder $[x]_R = [y]_R$ oder $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$ gilt. Zeigen Sie weiter, dass $A = \bigcup_{x \in A} [x]_R$.
b) Zeigen Sie umgekehrt: Ist I eine Menge und sind $\{A_\iota | \iota \in I\}$ nichtleere Teilmengen von A derart, dass $\iota \neq \delta \implies A_\iota \cap A_\delta = \emptyset$ für alle $\iota, \delta \in I$ und $A = \bigcup_{\iota \in I} A_\iota$, so ist R gegeben durch

$$R(x, y) \text{ gdw. } \exists \iota \in I(\{x, y\} \subseteq A_\iota)$$

eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 4: Sei K ein Körper, $A, B, P \in Mat_{n \times n}(K)$ so, dass $B = P^{-1}AP$. Finden Sie $T \in L(K^n, K^n)$ sowie Basen $\mathbb{B}_1$ und $\mathbb{B}_2$ von K^n derart, dass $B = [T]_{\mathbb{B}_2}$ und $A = [T]_{\mathbb{B}_1}$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Sei M eine Menge mit n Elementen, $k \leq n$. Zeigen Sie: Es gibt genau $\Sigma_{\substack{e_1, \ldots, e_k \in \mathbb{N}_0: \\ e_1 + \ldots + e_k = n-k}} 1^{e_1} 2^{e_2} \ldots k^{e_k}$ viele $R \subset M \times M$, für die R eine Äquivalenzrelation auf M mit genau k verschiedenen Äquivalenzklassen ist. (Siehe Aufgabe 3 zur Definition der Äquivalenzklassen.)

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe bis zum 31.01.2012, 12.30. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.