Mathematisches Institut
der Universität Konstanz
S. Kuhlmann, M.Carl

WS 11/12
25.10.2011
Zettel 1

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 1: Überprüfen Sie bei den folgenden Strukturen, ob es sich um eine (abelsche) Gruppe handelt. Weisen Sie die gültigen Gesetze kurz nach und geben Sie im anderen Fall ein Gegenbeispiel an.
a) $(\mathbb{Z}, +)$, wobei $+$ die gewöhnliche Addition ganzer Zahlen bezeichnet.
b) $(\mathbb{Z}, \cdot)$, wobei $\cdot$ die gewöhnliche Multiplikation ganzer Zahlen bezeichnet.
c) $(\mathbb{R}_0^+, \circ)$, wobei $a \circ b = a^b$. $\mathbb{R}_0^+$ ist die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen.
d) $(G, \circ)$ mit: X eine beliebige Menge mit mindestens 3 Elementen,
$G := \{f : X \to X \,|\, f \text{ ist bijektiv}\}$, $\circ$ die Hintereinanderausführung von Funktionen,
d.h. $f \circ g(x) = f(g(x))$.
e) $(G, \circ)$ mit: X eine unendliche Menge,
$G := \{f : X \to X \,|\, f \text{ ist injektiv}\}$, $\circ$ wie in d).

Aufgabe 2: Überprüfen Sie bei den folgenden Strukturen, ob es sich um einen Ring, einen Körper oder nichts davon handelt. $+$ und $\cdot$ bezeichnen dabei die gewöhnliche Addition und Multiplikation.
a) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, wobei $+$ und $\cdot$ die gewöhnliche Addition und Multiplikation rationaler Zahlen bezeichnen
b) $(\mathbb{Q}, \cdot, +)$
c) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
d) $(\mathbb{R}, +, -)$
e) $(\{0, 1, 2\}, \oplus, \otimes)$, wobei $a \oplus b$ bzw. $a \otimes b$ die Reste von $a + b$ bzw. $a \cdot b$ bei der Division durch 3 sind. (Also ist z.B. $2 \otimes 2$ der Rest von 4 bei Division durch 3, also gleich 1.)

Aufgabe 3: Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element e, $e_1, e_2, e_3 \in G$ so, dass $e_1 \cdot x = e_2 \cdot x = x \cdot e_3 = x$ für alle $x \in G$. Außerdem seien $a, b, c \in G$ so, dass $a \cdot b = a \cdot c = e$. Zeigen Sie:
a) $e_1 = e_2 = e_3$
b) $b \cdot a = e$
c) $b = c$

Aufgabe 4: Es sei $(K,+,\cdot)$ ein Körper. Auf dem kartesischen Produkt $K\times K$ definieren wir die komponentenweise Addition und Multiplikation $\oplus$, $\otimes$ durch $(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)$ bzw. $(a,b)\otimes(c,d)=(a\cdot c,b\cdot d)$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen:
a) $(K\times K,\oplus)$ ist Gruppe.
b) $(K\times K,\oplus,\otimes)$ ist Körper.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Finden Sie eine Menge X zusammen mit einer Funktion $\oplus : X\times X\to X$, so dass $(X,\oplus)$ nicht assoziativ ist, aber alle übrigen Gesetze einer kommutativen Gruppe erfüllt.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe bis zum 01.11.2011, 12.30. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F, 4. Etage.