Fachbereich Mathematik und Statistik
der Universität Konstanz
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS 11/12
07.02.2012
Zettel 14

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 1: Gegeben seien folgende Funktionale auf $\mathbb{R}^4$:

$$f_1(x_1, ..., x_4) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4$$
$$f_2(x_1, ..., x_4) = 2x_2 + x_4$$
$$f_3(x_1, ..., x_4) = -2x_1 - 4x_3 + 3x_4$$

Bestimmen Sie $W \subseteq \mathbb{R}^4$ so, dass $W^0 = span(\{f_1, f_2, f_3\})$.

Aufgabe 2: Sei K ein Körper, $a, b \in K$ und f ein lineare Funktional auf K^2 gegeben durch $f(x_1, x_2) = ax_1 + b_2$. Zu jedem der folgenden linearen Operatoren T sei $g = T^t f$. Bestimmen Sie $g(x_1, x_2)$.
a) $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$
b) $T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$
c) $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$.

Aufgabe 3: Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten in einer reellen Variablen x, ferner $a, b \in \mathbb{R}$ und $f : V \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$f(p) = \int_a^b p(x)dx.$$

Es sei ferner D der Ableitungsoperator auf V. Bestimmen Sie $T^t f$.

Aufgabe 4: Es sei K ein Körper, V, W n-dimensionale K-Vektorräume, $A \in Mat_{n\times n}(K)$, ferner $T_A : V \to W$ gegeben durch $[T_A]_{\mathcal{E}_V}^{\mathcal{E}_W} = A$, wobei $\mathcal{E}_V$ bzw. $\mathcal{E}_W$ die Standardbasen von V bzw. W bezeichnen. Bestimmen Sie zu $g \in W^*$ die Matrix A_g so, dass $T_A^t(g)(x) = xA_g$ für alle $x \in V$ und beschreiben Sie die Abbildung $g \mapsto A_g$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Es sei K ein Körper, $V = Mat_{n\times n}(K)$.
a) Zu $B \in Mat_{n\times n}(K)$ fest definiere f_B auf V durch $f_B(A) = tr(B^t A)$, wobei $tr(X) = \Sigma_{i=1}^n X_{ii}$ für $X \in Mat_{n\times n}(K)$. Zeigen Sie, dass f_B lineares Funktional auf V ist.
b) Zeigen Sie umgekehrt: Zu jedem linearen Funktional g auf V existiert $B \in Mat_{n\times n}(K)$ mit $g = f_B$, Bezeichnungen wie in a).
c) Zeigen Sie nun: Die Abbildung $B \mapsto f_B$ ist ein Isomorphismus von V auf V^*.

Keine Abgabe. Lösungen werde voraussichtlich ab Ende nächster Woche auf unserer Homepage veröffentlicht.