Universität Konstanz

Skript

Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Wintersemester 2011/2012

TeXed by Lucas Heitele

Der Mitschrieb enthält eventuell Fehler, für die keine Haftung übernommen wird.
Meldungen über Fehler und Verbesserungen bitte an `lucas.heitele@uni-konstanz.de`

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I: Lineare Gleichungen

§1. Körper

Definition 1:

(i) Eine Verknüpfung/binäre Operation (auf einer Menge G) ist eine Funktion:
$$\star : G \times G \longrightarrow G$$
Bezeichung: $\star(g,h) := g \star h$

(ii) Sei $G \neq \emptyset$. Das Paar $(G, \star)$ ist eine Gruppe, wenn

- $(g \star h) \star k = g \star (h \star),\ \forall g, h, \in G$ (Assoziativität)
- $\exists\ e \in G$, sodass $e \star g = g = g\star,\ \forall g \in G$ (Neutrales Element)
- $\forall g \in G\ \exists h \in G$, sodass $g \star h = e = h \star g$ (Existenz von Inversen)

  NB: Eindeutigkeit von neutralem Element und Inversen, siehe Ü.B.

- $g \star h = h \star g,\ \forall h, g \in G$ (kommutativ/abelsch)

Bezeichnung: $\mathbb{Z}$:=Menge der ganzen Zahlen,
$\mathbb{Q}$:=Menge der rationalen Zahlen,
$\mathbb{R}$:=Menge der reellen Zahlen.

Beispiele:

(I) $(\mathbb{Z},+), (\mathbb{Q},+), (\mathbb{R},+)$

(II) $(\mathbb{Q}^\times, \cdot), (\mathbb{R}^\times, \cdot)$

Bezeichnung: $\mathbb{Q}^\times := \mathbb{Q}\backslash\{0\}$
$\mathbb{R}^\times := \mathbb{R}\backslash\{0\}$

(III) $\mathcal{F} := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$
Verknüpfung: $f, g \in \mathcal{F}$ definiere

$$f + g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$r \longmapsto (f+g)(r)$$

mit $(f+g)(r) := f(r) + g(r),\ \forall r \in \mathbb{R}$.

Neutrales Element:

$$Z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$Z(r) = 0,\ \forall r \in \mathbb{R}$$

Inverse:

$$-f\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(-f)(r) := -\,(f(r)),\ \forall r \in \mathbb{R}$$

Diese sind abelsche (siehe Ü.B. für nicht abelsche) und unendliche Gruppen. Wir konstruieren nun Beispiele vom endlichen Gruppen.

Bezeichnung: $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen.
$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Divisionsalgorithmus:
Seien $a, b \in \mathbb{Z},\ b > 0$.

$$\exists!\, q, r \in \mathbb{Z} \text{ mit } 0 \leq r < b \text{ und } a = bq + r.$$

Beweis: Betrachte zunächst den Fall $a > 0$.
Falls $0 < a < b$, setze $r := a$. ✓
Sonst $a \geq b$ betrachte die Menge $S := \{s \in \mathbb{N} \,|\, sb \leq a\}$.
$1 \in S$, also $S \neq \emptyset$ und S ist endlich.
Setze $q := \max(S),\ r := a - qb$ (also $r = 0$ gdw. $a = qb$).

Behauptung: $\underbrace{0 \leq r}_{\substack{r\geq 0 \text{ gilt}\\ \text{per Def.}}} < b$

Widerspruchsbeweis: Wenn $r \geq b$, dann $a - qb \geq b$, d.h.: $a \geq qb + b$,
d.h.: $a \geq (q1)b$, also $q + 1 \in S$, jedoch gilt $q + 1 > q$. ↯

Eindeutigkeit:

$$\left.\begin{array}{l} a = q_1 b + r_1 \\ b = q_2 b + r_2 \end{array}\right\} (\dagger)$$

Also von $(\dagger)$: $0 = (q_2 - q_1)b + (r_2 - r_1)$

Widerspruchsbeweis: Wenn $r_1 > r_2$, dann $(r_1 - r_2) > 0$,
also $0 < (r_1 - r_2) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{aus } (\dagger)}}{=} \underbrace{(q_2 - q_1)b}_{\substack{b>0\\ \text{also } (q_2-q_1)>0\\ \text{also } (q_2-q_1)b\geq b}} \qquad (\star)$
andererseits: $r_1 < b$ und $r_2 < b$, also $(r_1 - r_2) < (b - r_2) \leq b$.
Mit $(\star)$ erhält man einen Widerspruch:
Linke Seite in $(\star)$ $< b$, rechte Seite in $(\star) \geq b$ ↯
Also $r_1 = r_2$ und mit $(\dagger)$ bekommt man auch $q_1 = q_2$

□

Sei nun $c \in \mathbb{Z},\ c \leq 0$.
Wenn $c = 0$, setze $q := 0$ und $r := c$, dann gilt $c = 0 = 0b + 0$ ✓
Wenn $c < 0$, setze $a := (-c),\ a > 0$.
Also $\exists!\ q, r$ mit $0 \leq r < b$ und $a = bq + r$.
$r = 0 \Rightarrow c = -a = b(-q)$ ✓

$$\begin{aligned} r \neq 0 \Rightarrow c = -1 &= b(-q) + (-r) \\ &= b(-q) - b + (b - r) \\ &= b(-q-1) + (b - r) \\ &= b[-(q+1)] + \underbrace{(b - r)}_{\substack{0<r<b \\ \text{also } 0>-r>-b \\ \text{also } b>(b-r)>0}} \end{aligned}$$

□

Definition 2: Sei $n \in \mathbb{N},\ n > 1$.
$\mathbb{Z}_n := \{0, \ldots, n-1\}$ ist die Menge der „Reste" für die Division durch n.

Bezeichnung: $a \in \mathbb{Z}, ; \overline{a}$:=Rest der Division von a durch n, d.h.:
$a = qn + \overline{a},\ 0 \leq \overline{a} < n$, also mit $\overline{a} \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Wir definieren die Verknüpfung:
Zu $x, y \in \mathbb{Z}_n$ definieren $x +_n y := \overline{x + y}$

Behauptung $(\mathbb{Z}_n, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

Beweis:
Fall 1: $n = 1,\ Z_n = \{0\}$, die triviale Gruppe.
Fall 2: Sei $n \geq 2$. Die Verknüpfung ist Wohldefiniert. ✓

Kommutativ? Seien $x, y \in \mathbb{Z}_n$. $x +_n y \overset{?}{=} y +_n x$

Wir berechnen die linke Seite:

$$x +_n y \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def.} \\ \text{von} \\ +_n}}{=} \overline{x + y} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{weil} \\ (\mathbb{Z},+) \\ \text{abel.} \\ \text{Gruppe}}}{=} \overline{y + x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def.} \\ \text{von} \\ +_n}}{=} y +_n x \quad ✓$$

□

Assoziativ? Seien $x, y, z \in \mathbb{Z}_n$. $(x +_n y) +_n z \overset{?}{=} x +_n (y +_n)$

Berechne die linke Seite:
Setze $r_1 := \overline{x + y}$ und $r_2 := \overline{r_1 + z}$, also:

$x + y = q_1 n + r_1$ und $\overline{r_1 + z} = q_2 n + r_2$.
Somit also $(x + y - q_1 n) + z = q_2 n + r_2$ und damit:
$(x + y) + z = (q_1 + q_2)n + r_2 \qquad (\star)$

Berechnen der rechten Seite: Setze $r_3 := \overline{x + y}$ und $r_4 := \overline{x + r_3}$.
Also $x + z = q_3 n + r_3$ und $x + r_3 = q_4 n + r_4$.
Somit also $x + (y + z) - q_3 n = q_4 n + r_4$ und damit:
$x + (y + z) =)q_3 + q_4)n + r_4 \qquad (\star\star)$.
Vergleichen wir nun $(\star)$ und $(\star\star)$ und beachte, dass
$(x + y) + z = x + (y + z)$ in $\mathbb{Z}$ gilt.
Also:

$$(x + y) + z = (q_1 + q_2)n + r_2 = x + (y + z) = (q_3 + q_4)n + r_4$$

Eindeutigkeit vom Rest im Divisionsalgorithmus $\Rightarrow r_2 = r_4$, d.h.:

$$\overline{\overline{x + y} + z} = \overline{x + \overline{y + z}},$$

und damit per Definition:

$$(x +_n y) +_n z = x +_n (y +_n z)$$

wie gewünscht.

$\square$

$\exists^z$ vom neutralen Element $0 \in \mathbb{Z}_n$? Sei $x \in \mathbb{Z}_n$. $x +_n 0 \stackrel{?}{=} x$
$x +_n 0 = \overline{x + 0} = \overline{x}$. Aber für $x \in \mathbb{Z}_n$ gilt:
$\overline{x} = x$ und damit $x +_n 0 = x$.

$\square$

$\exists^z$ von additiven Inversen? Sei $x \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$.
Falls $x = 0$, setze $-x = 0$. Sei nun $x \neq 0$ und setze $-x := (n - x) \in \mathbb{Z}_n$.
Es gilt:

$$x +_n (-x) = \overline{x + (-x)} = \overline{n} = 0$$

wie gewünscht.

$\square$

Definition 3: Ein Tripel $(R, +, \cdot)$ ist ein Ring mit Eins, falls:

- R ist eine nichtleere Menge, und
- „+", „ $\cdot$ " sind Verknüpfungen auf R,
- $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $0 \in R$ und
- $(R, \cdot)$ ist ein Monoid, d.h.:
  - „ $\cdot$ " ist assoziativ,
  - es existiert $1 \in R$ mit $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x,\ \forall x \in R$,
  - $1 \neq 0$ und
  - die Distributivgesetze gelten:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Links:} & x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \\ & \text{und} \\ \text{Rechts:} & (y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x) \end{array}\right\} \forall x, y, z \in R$$

Definition 4: Ein Ring $(R, +, \cdot)$ ist kommutativ, falls:

$$x \cdot y = y \cdot x,\ \forall x, y \in R.$$

Beispiele: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
Gibt es endliche Beispiele?
Auf $\mathbb{Z}_n$ definieren wir: $x \cdot_n y := \overleftarrow{xy}$.

Ü.A.: Prüfe, dass $(\mathbb{Z}, +_n, \cdot_n)$ ein kommutativer Ring mit Eins ist.

Bezeichnung: $F^{\times} := F \backslash \{0\}$

Definition 5: $(F, +, \cdot)$ ist ein Körper, falls:

- $F \neq \emptyset$,
- $(F, +)$ ist abelsche Gruppe mit neutralem Element 0,
- $(F, \cdot)$ ist abelsche Gruppe mit neutralem Element 1.
- $1 \neq 0$ und
- die Distributivgesetze gelten.

Bemerkung: Also $(F,+,\cdot)$ ist ein Körper, falls $(F,+,\cdot)$ ein kommutativer Ring ist und alle $x \in F^\times$ multiplikativ inveriterbar sind, d.h.:

$$\forall x \in F^\times \; \exists\, x^{-1} \in F^\times \text{ mit } x \cdot x^{-1} = 1$$

Beispiele: $(\mathbb{Q},+,\cdot), (\mathbb{R},+,\cdot)$ und später $(\mathbb{C},+,\cdot)$ sind Körper.

Frage: Gibt es endliche Körper?
Insbesondere betrachten wir nun die Frage: Ist der Ring $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ ein Körper?
Wir werden zeigen: $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ ist ein Körper, genau dann wenn $n = p$ Primzahl.

Wir wollen nun zeigen, dass $(\mathbb{Z}_n,+_n,\cdot_n)$ genau dann ein Körper ist, wenn $n = p$ Primzahl ist.

„$\Rightarrow$“:

Lemma 1: Jeder Körper K ist ein Integritätsbereich, d.h.:

$$xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oder } y = 0, \; \forall x, y \in K$$

Beweis: Sei $xy = 0$ und $x \neq 0$, also $x^{-1}(xy) = x^{-1}0 = 0$,
d.h. $(x^{-1}x)y = 1 \cdot y = y = 0$.

□

Bemerkung: Hier haben wir benutzt:

$$(z \cdot 0) = 0, \; \forall z \in K \qquad \text{(Ü.A.)}$$

Sei nun $n > 1$. Wir zeigen:

Korollar 1: Sei $n > 1$.

$$(\mathbb{Z}_n,+_n,\cdot_n) \text{ Körper} \Rightarrow \; n = p \text{ ist eine Primzahl.}$$

Beweis: Annahme: n ist keine Primzahl, also $n = xy$ mit $1 < x, y < n$.
Also $x, y \in \mathbb{Z}_n, \; x \neq 0, \; y \neq 0$, aber $x \cdot_n y = \overline{xy} = 0$.
Also ist $(\mathbb{Z}_n,+_n,\cdot_n)$ kein Körper ↯

□

„$\Leftarrow$“: Wir wollen nun zeigen, dass $n = p$ Primzahl $\Rightarrow$ $(\mathbb{Z}_p, x_p, \cdot_p)$ ist ein Körper.
Dafür wollen wir explizit die multiplikative Inverse berechnen.

> Definition 6:
>
> (i) (positive) Divisoren:
> $a, b \in \mathbb{N},\ a = bq + r$. Falls $r = 0$: ˇb teilt a. (Bezeichnung: $b|a$)
> b ist ein Divisor von a oder a ist ein Vielfaches von b.
>
> (ii) $p \in \mathbb{N}$ ist eine Primzahl, falls:
> die einzigen (positiven) Divisoren von p sind 1 und p.
>
> (iii) $d \in \mathbb{N}$ ist gemeinsamer Teiler von a und b, falls $d|a$ und $d|b$.
> (Bezeichnung: $d = \mathrm{gT}(a, b)$)
>
> (iv) $d \in \mathbb{N}$ ist der größte gemeinsame Teiler von a und b, falls d gemeinsamer Teiler von a und b ist und d die größte natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft ist. (Bezeichnung: $d = \mathrm{ggT}(a, b)$)
> Äquivalent:
> $$\forall\, d' \in \mathbb{N} \text{ mit } d \text{ gemeinsamer Teiler von } a \text{ und } b \text{ gilt } d'|d.$$

Euklidischer Algorithmus (zum berechnen von $\mathrm{ggT}(a, b)$)
$a, b \in \mathbb{Z},\ b > 0,\ b|a \Rightarrow \mathrm{ggT}(a, b) = b$.

$$\begin{array}{llcccclc}
\text{Sonst:} & a & = & bq_1 & + & r_1 & & 0 < r_1 < b \\
 & b & = & r_1q_2 & + & r_2 & & 0 < r_2 < b \\
 & r_1 & = & r_2q_3 & + & r_3 & & 0 < r_3 < b \\
 & \vdots & & & & & & \\
(\rho) \ \text{Rekursion:} & r_{j-1} & = & r_jq_{j+1} & + & r_{j+1} & & 0 < r_{j+1} < r_j \\
 & \vdots & & & & & & \\
 & r_{n-3} & = & r_{n-2}q_{n-1} & + & r_{n-1} & & 0 < r_{n-1} < r_{n-2} \\
 & r_{n-2} & = & r_{n-1}q_n & + & \boxed{r_n} & & 0 < r_n < r_{n-1} \\
 & & & & & \uparrow & & \\
 & & & & & \text{letzte} \neq 0 & &
\end{array}$$

absteigende Folge von natürlichen Zahlen muss anhalten nach
$0 < r_n < r_{n-1} < \ldots < r_2 < r_1 < b$ endlich vielen Schritten.

Behauptung:

$$r_n = \mathrm{ggT}(a, b)$$

Die Behauptung folgt aus:

Lemma 2:	$a = bq + r \Rightarrow \mathrm{ggT}(a,b) = \mathrm{ggT}(b,r)$

Beweis: Setze $d := \mathrm{ggT}(b,r)$

(1) $d|b$ und $d|r \Rightarrow d|a$ also $d = \mathrm{gT}(a,b)$.

(2) Ferner: $d'|a$ und $d'|b \Rightarrow d'|a - bq$, d.h.: $d'|r$, also $d'|d$.
Also: $d = \mathrm{ggT}(a,b)$, wie behauptet.

□

Bemerkung 1: $r_m = \mathrm{ggT}(r_{n-1}, r_{n-2})$, weil:

$$\left.\begin{array}{l} r_n|r_{n-1} \\ \text{und} \\ r_n|r_m \end{array}\right\} \Rightarrow r_n|r_{n-1}$$

und

$$d'|r_{n-1},\ d'|r_{n-2} \Rightarrow d'|(r_{n-1} - r_{n-1}q_n)$$

Also (in (ρ)):

$$\mathrm{ggT}(a,b) = \mathrm{ggT}(b,r_1) = \mathrm{ggT}(r_1,r_2) = \ldots = \mathrm{ggT}(r_{n-1},r_{n-2}) = r_n.$$

Definition 7: Eine lineare Kombination von a und b (über $\mathbb{Z}$) ist eine ganze Zahl γ der Gestalt:

$$\gamma := \alpha a + \beta b \text{ wobei } \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$$

Bemerkung 2 Wir haben ständig die folgende Tatsache benutzt:

$$d'|a \text{ und } d'|b \Rightarrow\ d' \text{ teilt jede lineare Kombination von } a \text{ und } b.$$

Beweis: $\gamma = \alpha d'a' + \beta d'b' = d'(\alpha a' + \beta b')$

□

<u>Bemerkung 3:</u> Rückwärts Euklidischer Algorithmus:
ggT$(a,b) = r_n$ ist eine lineare Kombination (über $\mathbb{Z}$) von a und b:

$$\text{Rekursion:}\quad r_n = \underbrace{\boxed{r_{n-2}} - \boxed{r_{n-1}}}_{\text{aber hier werden nur } r_{n-1},\ r_{n-2} \text{ benötigt}} q_n$$

$$\boxed{r_{n-1}} = \boxed{r_{n-3}} - \boxed{r_{n-1}}\, q_{n-1}$$

also

$$r_n = \underbrace{\boxed{r_{n-2}} - \Big[\boxed{r_{n-3}} - \boxed{r_{n-2}}}_{\text{aber hier werden nur } r_{n-2},\ r_{n-3} \text{ benötigt}}\, q_{n-1}\Big]\, q_n$$

Verfahre so weiter.

Für numerische Beispiele und Berechnungen siehe Ü.B.

<u>Bemerkung 4:</u> $\mathrm{ggT}(a,b) = \mathrm{ggT}(b,a),\ (a,b) > 0$

<u>Korollar 2:</u> $n = p$ eine Primzahl $\Rightarrow$ $(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ ist ein Körper.

<u>Beweis:</u> $(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_u)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins. Sei nun $x \in \mathbb{Z}_p,\ x \neq 0$.
Wir wollen zeigen: $\exists\, y \in \mathbb{Z}_p$ mit $\overline{xy} = x \cdot_p y = 1$
Sei nun $x \in \{1, \ldots, p-1\}$ und p prim $\Rightarrow \mathrm{ggT}(x,p) = 1$.
Also existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha \neq 0$, sodass

$$\alpha x + \beta p = 1 \qquad (\star)$$

also $\alpha x = (-\beta)p + 1$. A priori $\alpha \in \mathbb{Z}$, nehme $\overline{\alpha} \in \{1, \ldots, p-1\}$.
(bemerke, dass $\overline{\alpha} \neq 0$ sonst $p|\alpha$, aber dann in $(\star)$: $p|1$, Unsinn!)
Also

$$\alpha = qp + \overline{\alpha} \qquad (\star\star)$$

$(\star\star)$ in $(\star)$ ergibt:

$$(qp + \overline{\alpha})x + \beta p = 1$$

und damit:

$$\overline{\alpha}x + qxp + \beta p = 1$$

somit:

$$\overline{\alpha}x + (qx + \beta)p = 1$$

$$\Rightarrow \overline{\alpha}x = -(qx + \beta)p + 1 \qquad (\star\star\star) \quad (\text{mit } \overline{\alpha} \in \mathbb{Z}_p)$$

Setze $\overline{\alpha} := y$. Berechne $x \cdot_p y = \overline{xy} = 1$ aus $(\star\star\star)$ und Eindeutigkeit vom Rest im Divisionsalgorithmus.

$\square$

Proposition 1: Sei p eine Primzahl, $a, b \in \mathbb{N}$.

Wenn $p|ab$, dann $p|a$ oder $p|b$.

Frage: Gibt es andere endliche Körper?

Definition 8: (Charakteristik)

Sei K ein Körper. Definiere:

$$\operatorname{Char}(K) := \begin{cases} \text{kleinste natürliche Zahl } (n \geq 2) \text{ wofür} \\ \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n-\text{mal}} = 0 \text{ falls diese existiert.} \\ \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

d.h.: $\operatorname{Char}(K) = 0$, falls $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n-\text{mal}} \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Lemma 3: $\operatorname{Char}(K) \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Char}(K) = p$ eine Primzahl.

Beweis: Sei $n \neq 0,\ n = \operatorname{Char}(K)$.

n nicht prim $\Rightarrow\ n = n_1 n_2$ mit $1 < n_i < n$ für $i = 1, 2$.

Also:

$$0 = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n_1 n_2\text{-mal}} = \underbrace{(1+\ldots+1)}_{n_1\text{-mal}}\underbrace{(1+\ldots+1)}_{n_2\text{-mal}} = 0$$

Also:

$$\underbrace{(1+\ldots+1}_{n_1\text{-mal}} = 0 \text{ oder } \underbrace{(1+\ldots+1)}_{n_2\text{-mal}} = 0 \quad ↯$$

$\square$

Beispiele: $\mathrm{Char}(\mathbb{F}_p), \mathrm{Char}(\mathbb{Q}) = \mathrm{Char}(\mathbb{R}) = 0$

$$\begin{bmatrix} \text{weil} & 1 > 0 \\ \text{also} & 1+1 > 0+1 > 0 \\ \vdots & \vdots \\ & \underbrace{1+1+\ldots+1}_{(n+1)\text{-mal}} = \underbrace{(1+\ldots+1)}_{n-\text{mal}} + 1 > \underbrace{(1+\ldots+1)}_{n\text{-mal}} > 0 \end{bmatrix}$$

Definition 9: $k \subset K$ ist ein Teilkörper, falls $0, 1 \in k$ und k abgeschlossen unter $x + y,\ xy,\ -x,\ x^{-1}$ für $x \neq 0$.

Bemerke: $\mathrm{Char}(k) = \mathrm{Char}(K)$.

Lemma 4:

$$K \text{ endlich} \Rightarrow \begin{cases} (1)\ \mathrm{Char}(K) = p > 0 \text{ und} \\ (2)\ |K| = p^\ell, \qquad \ell \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Beweis:

(1) Wir zeigen die Kontraposition:
$\mathrm{Char}(K) = 0 \Rightarrow k$ unendlich. (Die Umkehrung gilt i.A. nicht!)
Wir behaupten: $n_1,\ n_2 \in \mathbb{N},\ n_1 \neq n_2 \Rightarrow \underbrace{1+\ldots+1}_{n_1\text{-mal}} \neq \underbrace{1+\ldots+1}_{n_2\text{-mal}}$.
Œ sei $n_1 > n_2,\ (n_1 - n_2) > 0$ und:

$$\underbrace{(1+\ldots+1)}_{n_1\text{-mal}} - \underbrace{(1+\ldots+1)}_{n_2\text{-mal}} = \underbrace{(1+\ldots+1)}_{(n_1-n_2)\text{-mal}} = 0 \quad ↯$$

(2) Dafür brauchen wir lineare Algebra! Also später! (Basis und Dimension) □

Beispiel: $K = \mathbb{F}_p(t)$ der Körper der rationalen Funktionen über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_p$. K ist unendlich, aber $\mathrm{Char}(K) = p > 0$. Dafür brauchen wir Polynomringe. Später!

§2. Lineare Gleichungssysteme

Definition 1:

(i) Sei $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper.
Eine lineare Gleichung über K in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und Koeffizienten in K ist eine Gleichung der Form:

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b, \qquad (\star)$$

wobei $a_1, \ldots, a_n, b \in K$.
Terminologie: a_i oder der Koeffizient der Variable x_i.

(ii) Ein n-Tupel $c := (c_1, \ldots, c_n) \in K^n$ ist eine Lösung der Gleichung $(\star)$, falls die Identität:

$$a_ic_1 + \ldots + a_nc_n = b$$

gilt in K.

Beispiele:

(a) $\sqrt{2}x_1 + \pi x_2 = e$ ist eine lineare Gleichung über $\mathbb{R}$.

(b) $2\sqrt{x_1} + \pi x_2^2 = e$ ist keine lineare Gleichung über $\mathbb{R}$.

(c) $y = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung einer Geraden ℓ (in der Ebene $\mathbb{R}^2$) (a :=Steigung, b :=y-intersect).
Umschreiben: $x_2 - ax_1 = b$.
Lösung: P: Punkt in $\mathbb{R}^2$, $P = P(c_1, c_2)$ mit Koordinaten c_1 und c_2 ist eine Lösung gdw. $P \in \ell$, d.h.: P liegt auf ℓ.

Definition 2:

(i) Sei $m, n \in \mathbb{N}$.
Ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Variablen über K ist:

$$(S) \qquad \left.\begin{matrix} a_{11}\,x_1 + \ldots + a_{1n} = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + \ldots + a_{2n} = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn} = b_m \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} G_1 = b_1 \\ G_2 = b_2 \\ \vdots \\ G_m = b_m \end{matrix}$$

(ii) Eine Lösung für (S) ist $\underline{x}= (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ ein n-Tupel, sodass:
$\underline{x}$ ist eine (simultane) Lösung für alle Gleichungen in (S)

Notation: $\mathscr{L}(S) := \{\underline{x} \in K^n \,|\, \underline{x} \text{ ist Lösung von } S\}$.
$\mathscr{L}(S)$: die Lösungsmenge.

(iii) (S) ist homogen, falls $b_i = 0,\ \forall i = 1, \ldots, m$.

(iv) (S) ist konsistent, falls $\mathscr{L}(S) \neq \emptyset$.
(S) ist ansonsten inkonsitent ($\mathscr{L} = \emptyset$).

(v) (S) homogen $\Rightarrow \underline{x} = \underline{0} := (0, \ldots, 0) \in \mathscr{L}(S)$ (die triviale Lösung).
Also insbesondere: (S) homogen $\Rightarrow$ (S) konsistent.

Beispiel 1: 3 Gleichungen in 3 Variablen über $\mathbb{R}$

$$(S_1)\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 4 \\ x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \end{cases}$$

Umformung (TYP 1) Vertauschen der ersten mit der dritten Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 \qquad &= 4 \\ 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Umformung (TYP 3) Addition des (-2)-fachen der ersten Gleichung zur Zweiten:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 1 \\ 2x_2 \qquad &= 2 \\ 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Umformung (TYP 2) Multiplikation der zweiten und der dritten Gleichung mit $\frac{1}{2}$ ergibt schließlich:

$$(S_2)\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = 1 \\ \qquad x_2 \qquad = 1 \\ \qquad\qquad x_3 = 3 \end{cases}$$

Damit ist $(1, 1, 3)$ eine Lösung (prüfe durch Einsetzen)
Ist $\mathscr{L} = \{(1, 1, 3)\}$, die Frage ist, ob man durch obige Gleichungsumformungen keine Lösungen verloren hat!

Wir wollen nun zeigen, dass die Lösungsmenge unter elementaren Gleichhungsumformungen invariant ist. Wir untersuchen diese nun:

TYP 1: Vertauschen

$$(S_1)\left.\begin{array}{r}G_1=b_1\\ \vdots\\ G_i=b_i\\ \vdots\updownarrow\\ G_j=b_j\\ \vdots\\ G_m=b_m\end{array}\right\}\xrightarrow{\textit{Typ 1}}\left.\begin{array}{r}G_1=b_1\\ \vdots\\ G_j=b_j\\ \vdots\\ G_i=b_i\\ \vdots\\ G_m=b_m\end{array}\right\}(S_2)$$

<u>Bemerkung I:</u> (i) $(S_2)\xrightarrow{\textit{Typ 1}}(S_1)$
(ii) $\underline{x}$ Lösung von (S_1) $\Rightarrow$ $\underline{x}$ Lösung von (S_2)

TYP 2: Multiplikation einer Gleichung mit $\lambda\in K^\times$

$$(S_1)\left.\begin{array}{r}G_1=b_1\\ \vdots\\ G_i=b_i\\ \vdots\\ G_m=b_m\end{array}\right\}\xrightarrow{\textit{Typ 2}}\left.\begin{array}{r}G_1=b_1\\ \vdots\\ \lambda G_i=\lambda b_i\\ \vdots\\ G_m=b_m\end{array}\right\}(S_2)$$

<u>Bemerkung II:</u> (i) $(S_2)\xrightarrow{\textit{Typ 2}}(S_1)$ (Multiplikation mit λ^{-1})
(ii) $G_i=b_i\Rightarrow\lambda G_i=\lambda b_i$ (folgt aus Körperaxiomen), also:
$\underline{x}$ Lösung von $(S_1)\Rightarrow\underline{x}$ Lösung von (S_2)

TYP 3: $i\neq j,\ \lambda\in K$. Addiere das $\lambda-$fache der i^{en} Gleichung zur j^{en} Gleichung

$$(S_1)\left.\begin{array}{r}G_1=b_1\\ \vdots\\ G_i=b_i\\ \vdots\\ G_j=b_j\\ \vdots\\ G_m=b_m\end{array}\right\}\xrightarrow{\textit{Typ 2}}\left.\begin{array}{c}G_1=b_1\\ \vdots\\ G_i=b_i\\ \vdots\\ \lambda G_i+G_j=\lambda b_i+b_j\\ \vdots\\ G_m=b_m\end{array}\right\}(S_2)$$

<u>Bemerkung III:</u> (i) $(S_2)\xrightarrow{\textit{Typ 3}}(S_1)$ (addiere $(-\lambda)$-fache der i^{en} Gleichung zur j^{en})
(ii) $G_i=b_i\Rightarrow\ \lambda G_i=\lambda$ also (Körperaxiome) $\lambda G_i+G_j=\lambda b_i+b_j$.
und $\quad +\ \underline{G_j\ =b_j}$
Also $\underline{x}$ Lösung von $(S_1)\Rightarrow\underline{x}$ Lösung von (S_2).

Definition 3: (S_2) ist äquivalent zu (S_1), falls man (S_2) aus (S_1) erhält, durch endlich viele elementare Gleichungsumformungen.

Bemerkung IV: Durch Bemerkung I (i), II (i), III (i) bekommt man sofort:

$$(S_2) \text{ äquivalent } (S_1) \;\Rightarrow\; (S_1) \text{ äquivalent } (S_2).$$

Also sagen wir (S_1) und (S_2) sind äquivalent.

Satz 1: Äquivalente Systeme haben die gleichen Lösungsmengen.

Beweis: Aus Bemerkung I (ii), II (ii), III (ii) haben wir:

$$\mathscr{L}(S_1) \subseteq \mathscr{L}(S_2)$$

Aus Bemerkung I (i), II (i), III (i) bekommt man nun umgekehrt:

$$\mathscr{L}(S_2) \subseteq \mathscr{L}(S_1)$$

Und damit:

$$\mathscr{L}(S_1) = \mathscr{L}(S_2)$$

□

Bemerkung: Wir werden die Umkehrung dieses Satzes später studieren!

Also wollen wir die Gleichungen umformen, um „einfachere“ Systeme zu bekommen. Wir müssen den Begriff „einfacher“ formalisieren. Dafür führen wir nun Matrizen ein.

§3. Matrizen

Definition 1: $m, n \in \mathbb{N}$

(i) Eine $n \times n$-Matrix über K ist eine Familie in K der Gestalt

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

Wobei $a_{ij} \in K$, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Darstellung:

$$\begin{array}{ccc} & & S_j := j^{\text{te}}\ \text{Spalte} \\ m\ \text{Zeilen} \Longrightarrow & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & R_i := j^{\text{te}}\ \text{Reihe} \\ & \Uparrow n\ \text{Zeilen} & \end{array}$$

(ii) die Koeffizientenmatrix zum System S ist:

$$A(S) := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

und die erweiterte Koeffizientenmatrix ist:

$$(A, \underline{b}) := \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Die Matrixdarstellung von S ist:

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

wobei $\underline{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (eine $n \times 1$-Matrix mit Variablen als Koeffizienten)

und $\quad \underline{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ (eine $m \times 1$-Matrix über K).

(iii) Die elementaren Zeilenumformungen vom TYP 1, TYP 2, TYP 3 entsprechen genau den elementaren Gleichungsumformungen.

(iv) Seien A, B $m \times m$-Matrizen.
A und B sind Zeilenäquivalent, falls man B aus A durch endlich viele Zeilenumformungen erhält (und/oder umgekehrt).

Satz 1: (Matrixanalog von Satz 1) Bei elementaren Zeilenumformungen (auf die erweiterte Koeffizientenmatrix) ändert sich die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems nicht.

Definition 2: Eine $m \times n$-Matrix A ist reduzierter Zeilenform (Abkürzung: r.Z.F.), falls:

(a) der erste Koeffizient$\neq 0$ in einer Reihe $R_i \not\equiv 0$ ist 1. (dieser erste, von Null verschiedene Koeffizient heißt Hauptkoeffizient, bzw. Haupteins.)
(Bedeutung von $R_i \equiv 0$: eine Reihe heißt Nullreihe, falls alle Koeffizienten die darin vorkommen gleich Null sind.)

(b) jede Spalte von A, in der sich eine Haupteins befindet hat alle anderen Koeffizienten gleich Null.

Beispiel: (Matrixform)
Erweiterte Matrix von (S_1):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{nicht in r.Z.F.}$$

Erweiterte Matrix von (S_2) dagegen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Beispiele:

(i) Die (quadratische) Identitätsmatrix I_n wird so definiert:

$$(\mathrm{I})_{ij} := \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

$$\mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

I ist in r.Z.F.

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sind nicht in r.Z.F.

(iii) die $0^{m\times n}$-Matrix ($a_{ij} = 0,\ \forall i = 1, \ldots, m,\ j = 0, \ldots, n$) ist in r.Z.F.

Definition 3: Eine $m \times n$-Matrix ist A (reduzierter) Zeilenstufenform (r.Z.S.F), falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(a) A ist in r.Z.F.

(b) jede Nullzeile erscheint (falls vorhanden) nach jeder nicht Nicht-Nullzeile.

(c) Seien $Z_1, \ldots, Z_r$ die Nicht-Nullzeilen ($r \leq m$) und k_i die Spalte, in der die Haupteins in der $i^t exten$ Zeile erscheint ($i = 1, \ldots, r$). Dann gilt: $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$.

Satz 2: Jede $m \times n$-Matrix A ist Zeilenäquivalent zu einer Matrix B in r.Z.S.F.

Beweis: Fall $A = 0^{m\times n}$, dann ist A bereist in r.Z.S.F. Ansonsten:

TYP 1 Bei wiederholter Anwendung von TYP 1 können wir Œ annehmen, dass die Zeilen $Z_1, Z_2, \ldots, Z_r$ nicht Null sind ($t \leq m$)

und $Z_{r+1}, \ldots, Z_m$ Null sind (wobei $r = m$ vorkommen kann!

- Wir betrachten Z_1: Sei $0 \neq a_{1k_1}$ Hauptkoeffizient ($1 \leq k_1 \leq n$).

TYP 2 • multipliziere Z_1 mit a_{ik}^{-1} und für jedes $2 \leq i \leq r$:

TYP 3 • addiere $(-a_{ik_1})$-fache von (der neu erhaltenen Zeile) Z_1 zur i^{ten} Zeile:

$$\begin{array}{c} Z_1 \\ \\ \\ \\ Z_r \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 0 & \ldots & 0 & 1 & \star & \ldots & \star \\ & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \\ \hdashline 0 & \ldots & \ldots & \vdots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{array}\right) =: A_1$$

$\uparrow$ Spalte k_1

Nun betrachte Z_2 der Matrix A_1. Wieder:

TYP 1 Œ $Z_2 \not\equiv 0$.
Sei $a_{2k_2} \neq 0$ Hauptkoeffizient von Z_2. Bemerke: $k_2 \neq k_1$!
Also haben wir:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & \star & \dots & \star \\ 0 & \dots & 0 & a_{2k_2} & \dots & 0 & \star & \dots & \star \\ & & & & & \vdots & & & \\ & & & & & \vdots & & & \\ & & & & & 0 & & & \end{pmatrix} = A_1 \text{ (Fall 1) } (k_2 < k_1)$$

oder

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \star & \dots & \star & \dots & \star \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{2k_2} & \dots & \star \\ & & \vdots & & & & & \\ & & \vdots & & & & & \\ & & 0 & & & & & \end{pmatrix} = A_1 \text{ (Fall 2) } (k_2 > k_1)$$

TYP 2 • Wiederhole: multipliziere Z_2 mit $a_{2k:2}^{-1}$. Dann:

TYP 3 • Im Fall 1 ($k_2 < k_1$): addiere $(-a_{ik_2})$-fache von Z_2 zur i^{ten} Zeile für $3 \leq i \leq m$.
Im Fall 2 ($k_1 < k_2$):

TYP 3 addiere $(-a_{ik_2})$-fache von Z_2 zur i^{ten} Zeile (für $i = 1$ und $3 \leq i \leq m$).

Achtung: Wichtig ist es zu bemerken, dass wir die Koeffizienten $a_{ij} = 0$, $j = 1, \dots, k_1^{-1}$ und $a_{1k_1} = 1$ und $a_{ik_1} = 0$, $i = 2, \dots, n$ von A in beiden Fällen $k_2 < k_1$ oder $k_1 < k_2$ (also auf jeden Fall) nicht geändert haben!

Per Induktion wiederholen wir diese Prozedur für $i = 3, \dots, r$.
Wir erhalten eine Matrix A_r, die (a) und (b) genügt.
Schließlich:

TYP 1 bei wiederholter Anwendung vom TYP 1 erhalten wir eine Matrix B, die auch (c) genügt, also ist B in r.Z.S.F.

$\square$

Zweck: Aus der r.Z.S.F. kann man $\mathscr{L}(S)$ sofort ablesen.

Beispiele: Über $\mathbb{Q}$: Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\text{(i)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{rcr} x_1 & = & 4 \\ x_2 & = & 7 \\ x_3 & = & -1 \end{array}$$

(ii) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftarrow$ inkonsitent

(iii) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$ $x_1,\ x_2,\ x_3$ Hauptvariablen, x_4 freie Variable

$$\left.\begin{array}{ccccc} x_1 & & & +x_4 & = -1 \\ & x_2 & & +x_4 & = 6 \\ & & x_3 & +3x_4 & = 2 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{rl} x_1 = & -1-4x_4 \\ x_2 = & 6-2x_4 \\ x_3 = & 2-3x_4 \end{array}$$

$x_4 = q \in \mathbb{Q}$, also $\mathscr{L}(S) = \{(-1-4q,\ 6-2q,\ 2-3q,\ q) \in \mathbb{Q}^4 \mid q \in \mathbb{Q}\}$

§4. Homogene Systeme

Beispiel: Sei R folgende Matrix (über $\mathbb{Q}$):

$$R = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \end{array}.$$

Finde $\mathscr{L}(S)$, wobei (S) das homogene System $R\underline{x} = \underline{0}$ ist.

Lösung: R ist in r.Z.S.F. Beobachte:
$r :=$Anzahl der $\not\equiv 0$ Zeilen$= 2 =$Anzahl der Hauptvariablen.

$$(S) \quad \begin{array}{ccccc} x_1 & -3x_3 & & +\frac{1}{2}x_5 & = 0 \\ & & x_4 & +2x_5 & = 0 \end{array} \quad \text{also} \quad \begin{array}{rcc} x_2 = & 3x_3 & -\frac{1}{2}x_5 \\ x_4 = & & -2x_5 \end{array}$$

$x_1,\ x_3,\ x_5$ freie Variablen. Setze: $x_1 = a,\ x_3 = b,\ x_5 = c.$
Also $\mathscr{L}(S) = \left\{(a, 3b - \frac{1}{2}c, b, -2c, c) \in \mathbb{Q}^5 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\right\}.$

Korollar 1: Sei R eine $m \times n$-Matrix in r.Z.S.F. und setze $r :=$die Anzahl der $\not\equiv 0$ Zeilen von R. Falls $r < n$, dann hast das homogene System

$$R\underline{x} = \underline{0} \qquad (\star)$$

nichttriviale Lösungen.

Beweis: $r =$Anzahl der $\not\equiv 0$ Zeilen in r.Z.S.F
$=$Anzahl der Haupteinsen
$=$Anzahl der Hauptvariablen
Also $n - r =$Anzahl der freien Variablen und $r < n \Rightarrow n - r \neq 0 \Rightarrow$ es existiert

mindestens eine freie Variable x_j. Wir erhalten eine nichttriviale Lösung für $(\star)$ indem wir z.B. $x_j = 1$ setzen.

□

Korollar 2: Sei A eine (beliebige) $m \times n$ Matrix mit $m < n$.
Dann hat das homogene System

$$(S) \qquad A\underline{x} = \underline{0}$$

nichttriviale Lösungen.

Beweis: Sei R in r.Z.S.F. Zeienäquivalent zu A. (R ist immer noch eine $m \times n$-Matrix) Setze r :=Anzahl der $\not\equiv 0$ Zeilen von R. Also $r \leq m < n$ und damit hat nach Korollar 1 das homogene System

$$R\underline{x} = \underline{0} \qquad (\star)$$

nichttriviale Lösungen und damit auch (S).

□

Bemerkung: Sei R eine $m \times n$-Matrix in r.Z.S.F. und ohne Nullzeilen (also jede Zeile hat eine Haupteins). Dann ist $R = \mathrm{I}_n$.

Beweis: r.Z.S.F. $\Rightarrow\ 1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_n \leq n$
(wobei k_j die Spalte ist, in der die Haupteins der Zeile Z_j steht).
Sei $i \neq j$, dann ist a_{ij} in der k_j^{ten} Spalte $\overset{\text{r.Z.S.F.}}{\Rightarrow}$ $a_{ij} = 0$ (weil $a_{ij} \neq a_{jj}$).

□

Korollar 3: Sei A eine $n \times n$-Matrix. Es gilt:

$$A \text{ zeilenäquivalent zu } \mathrm{I}_n \ \Leftrightarrow\ A\underline{x} = \underline{0} \text{ hat nur die triviale Lösung.}$$

Beweis:

„$\Rightarrow$“: Klar, weil $\mathrm{I}_n\underline{x} = \underline{0}$ nur die triviale Lösung hat.

„$\Leftarrow$“: Sei R eine $n \times n$ Matrix in r.Z.S.F. und zeilenäquivalent zu A. Sei r :=die Anzahl der $\not\equiv 0$ Zeilen von R. Mit Korollar 2 folgt damit: $r \geq n$ und andererseits $r \leq n$, also $r = n$. Also hat R keine Nullzeile $\Rightarrow\ R = \mathrm{I}_n$.

□

§5. Matrixmultiplikation

Definition 1: Seien A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times p$-Matrix über K.
Wir definieren eine Matrix $C := AB$, das Produkt, als die folgende $m \times p$-Matrix:

$$c_{ij} := \sum_{r=1}^{n} A_{ir} B_{rj}$$

Also: Zeilen mal Spalten!

Beispiel:

(i)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{m\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{n\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}a_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}}_{m\times 1}$$

(ii)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+0+0 & a_{12}+0+0 & a_{13}+0+0 \\ 0+a_{21}+0 & 0+a_{22}+0 & 0+a_{23}+0 \\ 0+0+a_{31} & 0+0+a_{32} & 0+0+a_{33} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(iii) Allgemeiner: Sei A eine $n \times n$-Matrix. Es gilt:

$$C = A\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n A = A$$

Beweis: Wir zeigen $A\mathrm{I}_n = A$ ($\mathrm{I}_n A$ wird analog behandelt).

$$A(\mathrm{I}_n)_{ij} = \sum_{r=1}^{m} A_{ir} (\,\mathrm{I}_n\,)_{rj} \qquad (\star)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \underline{\text{Fall 1:}}\ r \neq j & (\,\mathrm{I}_n\,)_{rj} = 0 \\ \underline{\text{Fall 2:}}\ r = j & (\,\mathrm{I}_n\,)_{rj} = 1 \end{array}\right\} \text{ in } (\star) \text{ eingesetzt bekommen wir für die Summe:}$$

$$\sum_{r=1}^{n} A_{ir} (\,\mathrm{I}_n\,)_{rj} = A_{ij} (\,\mathrm{I}_n\,)_{jj} = A_{ij}$$

$\square$

(iv) über $\mathbb{F}_7$:

$$\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}}\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix}5 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}(1\cdot_7 5)+(2\cdot_7 0) & (1\cdot_7 6)+(2\cdot_7 1)\\ (3\cdot_7 5)+(4\cdot_7 0) & (3\cdot_7 6)+(4\cdot_7 1)\end{pmatrix} = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}}$$

(v) Die $\underbrace{j^{\text{te}} \text{ Spalte von } AB}_{\text{als } m\times 1\text{-Matrix}} = \underbrace{A}_{m\times n}\underbrace{[j^{\text{te}} \text{ Spalte von } B]}_{\text{als } n\times n\text{-Matrix}}$ und

die $\underbrace{i^{\text{te}} \text{ Zeile von } AB}_{\text{als } 1\times p\text{-Matrix}} = \underbrace{[i^{\text{te}} \text{ Zeile von } A]}_{\text{als } 1\times n\text{-Matrix}}\underbrace{B}_{n\times p}$

<u>Satz 1:</u> Seien A, B, C Matrizen über K, sodass die Prod. BC und $A(BC)$ definiert sind. Dann sind auch die Produkte AB und $(AB)C$ definiert und es gilt:

$$A(BC) = (AB)C$$

<u>Beweis:</u> Sei B eine $n \times p$-Matrix, also hat C p Zeilen und BC n Zeilen.
Also (weil $A(BC)$ definiert ist) sei A Œ eine $m \times n$-Matrix.
Also AB ist wohldefinierte $m \times p$-Matrix und $(AB)C$ auch wohldefiniert.

Wir wollen nun zeigen, dass die zwei Matrizen $A(BC)$ und $(AB)C$ gleich sind. Dafür müssen wir zeigen, dass alle ihre Koeffizienten gleich sind.

<u>Wir berechnen also:</u>

$$\begin{aligned}
[A(BC)]_{ij} &= \sum_r A_{ir}(BC)_{rj} = \sum_r A_{ir}\left(\sum_s B_{rs}C_{sj}\right)\\
&\overset{\substack{\text{Distributivität}\\ \text{in } K}}{=} \sum_r\sum_s A_{ir}B_{rs}C_{sj}\\
&\overset{\substack{\text{Kommutativität}\\ \text{und Assiziativität}\\ \text{in } K}}{=} A_{ir}B_{rs}C_{sj}\\
&= \sum_s\left(\sum_r A_{ir}B_{rs}\right)C_{sj}\\
&= \sum_s (A)_{is}C_{sj}\\
&= [(AB)C]_{ij} \qquad \square
\end{aligned}$$

Bezeichnung: Sei A eine $m \times n$-Matrix und $k \in \mathbb{N}$.

$$A^k := \underbrace{A \dots A}_{k\text{-mal}} \qquad \text{(wohldefiniert)}$$

§6. Elementare Matrizen

Notation: Sei e eine elementare Zeilenumformung auf eine $m \times n$-Matrix A.
Bezeichne mit $e(A)$ die $m \times n$-Matrix, die wir somit erhalten.

Untersuchung:

TYP 1 Vertauschen von Zeilen Z_r und Z_s von A:

$$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{für } i \neq r,\ i \neq s \\ A_{sj} & \text{für } i = r \\ A_{rj} & \text{für } i = s \end{cases}$$

TYP 2 Multiplikation von Z_r mit einem Skalar $c \neq 0,\ c \in K$:

$$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{für } i \neq r \\ cA_{rj} & \text{für } i = r \end{cases}$$

Typ 3 Ersetzen von Z_r durch $Z_r + cZ_s,\ c \in K,\ r \neq s$:

$$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{für } i \neq r \\ A_{rj} + cA_{sj} & \text{für } i = r \end{cases}$$

Definition 1: Eine $m \times m$-Matrix heißt elementar, falls sie die Form $e(\mathrm{I}_m)$ hat.

Beispiel: Die elementaren 2×2-Matrizen über K:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Typ 1}$$

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & c \end{pmatrix}, \begin{matrix} c \neq 0, \\ c \in K \end{matrix} \qquad \text{Typ 2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, \ c \in K \qquad \text{Typ 3}$$

<u>Satz 1:</u> Sei e eine elementare Zeilenumformung und E die Elementare Matrix $E := e(\,\mathrm{I}_n\,)$.
Sei A eine $m \times n$-Matrix über K. Es gilt:

$$e(A) = EA$$

<u>Beweis:</u>

<u>e ist vom Typ 1:</u> $r \neq s$

(i) $E_{ik} = \delta_{ik}$ für $i \neq r, i \neq s$
und

(ii) $E_{rk} = \delta_{sk}$ für $i = r$
und

(iii) $E_{sk} = \delta_{rk}$ für $i = s$.

Also:

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} E_{ik}A_{kj}$$

Fall (i):
$\scriptstyle i\neq r,\, i\neq s$

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}A_{ki} = \delta_{ii}A_{ij} = A_{ij}$$

Fall (ii):
$\scriptstyle i=r$

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{rk}A_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{sk}A_{kj} = \delta_{ss}A_{sj} = A_{sj}$$

Fall (iii):
$\scriptstyle i=s$

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{sk}A_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{rk}A_{kj} = \delta_{rr}A_{rj} = A_{rj}$$

<u>e ist vom Typ 2:</u> Ü.A.

<u>e ist vom Typ 3:</u> $r \neq s$

$$E_{ik} = \begin{cases} \delta_{ik} & \text{für } i \neq r \\ \delta_{rk} + c\delta_{sk} & \text{für } i = r \end{cases}$$

Also:

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik}A_{kj}$$

Fall (1): $\boxed{i \neq r}$

$$\sum_{k=1}^{m} E_{ik}A_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}A_{kj} = \delta_{ii}A_{ij} = A_{ij}$$

Fall (2): $\boxed{i = r}$

$$\sum_{k=1}^{m} E_{rk}A_{kj} = \sum_{k=1}^{m} (\delta_{rk} + c\delta_{sk})A_{kj}$$

Hier bekommen wir nur zwei Terme (die ungleich Null sind) und zwar nur für $k = r$ oder $k = s$:

$\boxed{k = r}$ $\Rightarrow$ also $k \neq s$, so $c\delta_{sk} = 0$, und damit:

$$(\delta_{rk} + c\delta_{sk})A_{kj} = (\delta_{rr} + 0)A_{rj} = A_{rj}$$

$\boxed{k = s}$ $\Rightarrow$ also $k \neq r$, so $\delta_{rk} = 0$ und damit:

$$(\delta_{rk} + c\delta_{sk} = A_{kj} = (0 + c\delta_{ss})A_{sj} = cA_{sj}$$

Also:

$$\sum E_{rk}A_{kj} = \begin{cases} A_{ij} & \text{für } i \neq r \\ A_{rj} + cA_{sj} & \text{für } i = r \end{cases}$$

□

<u>Korollar 1:</u> Seien A, B $m \times n$-Matrizen über K. Es gilt:

B ist zu A zeilenäquivalent gdw. $B = \underline{P}A$

wobei $\underline{P}$ das Produkt von $m \times m$-Elementarmatrizen ist.

<u>Beweis:</u>

„$\Rightarrow$“: Sei $\underline{P} = E_\ell \ldots e_2E_1$, wobei E_i elementare $m \times m$-Matrizen sind. Also ist E_1A zeilenäquivalent zu A und $E_2(E_1A)$ ist zeilenäquivalent zu E_1A, also auch E_2E_1A zeilenäquivalent zu A. Setzen wir das nun so weiter fort, erhalten wir, dass $E_\ell \ldots E_1A$ zeilenäquivalent zu A ist, d.h. B ist zeilenäquivalent zu A.

„$\Leftarrow$“: Sei B zeilenäquivalent zu A und $e_1, \ldots, e_\ell$ die elementaren Zeilenumformungen mit $A \underset{e_1}{\longrightarrow} \ldots \underset{e_\ell}{\longrightarrow} B$, also $E_\ell \ldots E_2E_1A = B$, wobei E_i die elementare Matrix $e_i(\mathrm{I}_m)$ ist, für $i = 1, \ldots, \ell$. Setze nun $\underline{P} := E_\ell \ldots E_2E_1$.

□

Definition 2: Eine $n \times n$-Matrix A ist invertierbar, falls es eine $n \times n$-Matrix B gibt, sodass:

$$AB = \mathrm{I}_n \text{ und } BA = \mathrm{I}_n.$$

In diesem Fall heißt B eine Inverse von A.

Proposition 1: Sei A invertierbar. Dann gibt es eine eindeutige Inverse.

Beweis: Seien B_1, B_2 beide Inverse von A. Es gilt:

$$\begin{aligned} AB_1 &= \mathrm{I}_n = AB_2, \\ \text{also} \quad B_2(AB_1) &= B_2(AB_2), \\ \text{also} \quad (B_2A)B_1 &= (B_2A)B_2, \\ \text{also} \quad \mathrm{I}_n B_1 &= \mathrm{I}_n B_2, \text{ d.h. } B_1 = B_2 \end{aligned}$$

□

Notation: Wir bezeichnen mit A^{-1} die eindeutige Inverse der invertierbaren Matrix A.

Proposition 2: Seien A, B $n \times n$-Matrizen über K.
Es gilt:

(i) wenn A invertierbar, so auch A^{-1} und

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

(ii) wenn A und B beide invertierbar sind, so auch AB und

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Beweis:

(i) Wir berechnen

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathrm{I}_n, \text{ also ist } A \text{ die Inverse von } A^{-1}$$

(ii) Wir berechnen

$$B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}\mathrm{I}_n B = B^{-1}B = \mathrm{I}_n$$

Analog $(AB)\,(B^{-1}A^{-1}) = \mathrm{I}_n$.

□

Korollar 2: Seien $A_1, \ldots, A_\ell$ invertierbare $n \times n$-Matrizen.
Dann ist das Produkt $A_1 \ldots A_\ell$ auch invertierbar und es gilt:

$$(A_1 \ldots A_\ell)^{-1} = A_\ell^{-1} \ldots A_1^{-1} \qquad (\star)$$

Beweis: Induktion nach ℓ: $\ell = 1$ ✓.
Induktionsannahme: $(\star)$ gilt für ℓ.
Induktionsschritt: von ℓ nach $\ell + 1$:

$$\begin{aligned}(A_1 \ldots a_\ell A_{\ell+1})^{-1} &= [((A_1 \ldots A_\ell)A_{\ell+1}]^{-1} \\ &\overset{\text{Prop. 2 (ii)}}{=} A_{\ell+1}^{-1}(A_1 \ldots A_\ell)^{-1} \\ &\overset{\text{Induktionsannahme}}{=} A_{\ell+1}^{-1}(A_\ell \ldots A_1)^{-1} \\ &\overset{\text{Assoziativiztät}}{=} A_{\ell+1}^{-1}A_\ell \ldots A_1^{-1}\end{aligned}$$

□

Proposition 3: Elementare Matrizen sind invertierbar.

Beweis: Sei $E = e(\mathrm{I}_n)$ eine elementare Matrix. Sei $e^\star$ die umgekehrte Zeilenumformung (auf die Zeilen von I_n) und $E^\star := e^\star(\mathrm{I}_n)$. Wir berechnen:

$$E^\star E = e^\star(\mathrm{I}_n)e(\mathrm{I}_m) = \mathrm{I}_n \text{ und } E^\star E = EE^\star = \mathrm{I}_n$$

D.h. $E^\star = E^{-1}$.

□

Beispiel: Elementare 2×2-Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für $c \in K$:

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix}$$

Für $c \in K$, $c \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} c^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$$

Satz 2: Sei A $n \times n$-Matrix.
Es sind äquivalent:

(i) A ist invertierbar

(ii) $A\underline{x} = \underline{b}$ ist konsistent für jede $n \times 1$-Matrix $\underline{b}$

(iii) $A\underline{x} = \underline{0}$ hat nur die triviale Lösung

(iv) A ist zeilenäquivalent zu I_n

(v) A ist Produkt von elementaren Matrizen.

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Setze $\underline{x} := A^{-1}\underline{b}$. Es gilt:

$$A\underline{x} = A(A^{-1}\underline{b}) = (AA^{-1})\underline{b} = \mathrm{I}_n\underline{b} = \underline{b}.$$

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) Schon bewiesen (Korollar 3 (§4))

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Wenn $A\underline{x} = \underline{0}$ nichttriviale Lösungen hätte, dann ist die r.Z.S.F. R von A nicht I_n, muss also eine Nullzeile haben.
Also ist zum Beispiel das System

$$(S) \qquad R\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \left[\text{erweiterte Koeffizientenmatrix: } \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \right]$$

inkonsistent.

Sei nun $R = \underline{P}A$, wobei $\underline{P}$ das Produkt von elementaren Matrizen (Korollar 1 (§6)), also ist $\underline{P}$ invertierbar (Korollar 2 (§6) und Proposition 3 (§6))
Also multipliziere (S) mit $\underline{P}^{-1}$:

$$(S) \qquad (\underline{P}A)\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ist inkonsistent,}$$

also auch

$$\underline{P}^{-1}(PA)\underline{x} = \underline{P}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{inkonsistent}$$

und damit

$$A\underline{x} = \underbrace{\underset{n \times n}{\underline{P}^{-1}} \underset{n \times 1}{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}}_{n \times 1} \qquad \text{inkonsistent.}$$

Setze nun

$$\underline{b} = \underline{P}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit bekommen wir $A\underline{x} = \underline{b}$ inkonsistent $\lightning$

(iv) $\Rightarrow$ (v) $A = \underline{P}'\mathrm{I}_n = \underline{P}'$, wobei $\underline{P}'$ Produkt von Elementarmatrizen (Korollar 1 (§6)).

(v) $\Rightarrow$ (i) Folgt aus Korollar 2 (§6) und Proposition 3 (§6).

□

Korollar 3: Seien A und B $m \times n$-Matrizen.
B ist zeilenäquivalent zu A gdw. $B = \underline{P}A$ mit $\underline{P}$ invertiertbare $m \times m$-Matrix.

Korollar 4: Sei A invertierbare $n \times n$-Matrix. Eine Folge von elementaren Zeilenumformungen die A zur Identitätsmatrix I_n reduzieren, reduziert I_n zu A^{-1}.

Beweis: Die elementare Zeilenumformungen werden durch Multiplikation (links) mit Elementarmatrizen erreicht, d.h.:

$$E_\ell \dots E_1 A = \mathrm{I}_n$$

Und damit gilt:

$$A^{-1} = E_\ell \dots E_1 = E_\ell \dots E_1 \mathrm{I}_n$$

□

Beispiel:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \mathrm{I}_n \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & A^{-1} \end{array}\right)$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(-1)Z_1+Z_3]{(-2)Z_1+Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2Z_1+Z_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(-3)Z_3+Z_1]{3Z_3+Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-2)Z_2+Z_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Kapitel II: Vektorräume

§1. Definitionen und Beispiele

Definition 1: Sei K ein Körper, $V \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge, versehen mit zwei Verknüpfungen:

(i) $\cdot : K \times V \longrightarrow V$ (Skalarmultiplikation)
$(c, v) \longmapsto cv$
und

(ii) $+ : V \times V \longrightarrow V$ (Vektorsumme)
$(v_1, v_2) \longmapsto v_1 + v_2$

Das Tripel $(V, \cdot, +)$ ist ein K-Vektorraum über K (K-VR) oder Vektorraum über K (VR/K), falls folgende Axiome erfüllt sind:

(1) (V, x) ist eine abelsche Gruppe

(2) $1 \cdot \alpha = \alpha, \ \forall \alpha \in V$

(3) $(c_1c_2)\alpha = c_1(c_2\alpha), \ \forall c_1, c_2 \in K, \ \forall \alpha \in K$

(4) $c(\alpha_1 + \alpha_2) = c\alpha_1 + c\alpha_2, \ \forall c \in K, \ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in V$

(5) $(c_1 + c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha, \ \forall c_1, c_2 \in K, \ \forall \alpha \in V$

Beispiel 1: $V = K^n$ mit koordinatenweise Verknüpfungen

Beispiel 2: Allgemeiner:
$K^{m\times n} := \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$:=Menge aller $m \times n$-Matrizen aus K, mit Matrizensumme und Skalarvielfach.

Beispiel 3: Sei S eine Menge.

$$V := \{f \mid f : S \longrightarrow K, \ f \text{ Abbildung}\}$$

$V := K^S$ mit Funktionensummen und Skalarvielfach.

Beispiele 1 und 2 sind Sonderfälle von Beispiel 3.

Beispiel 4: Der Vektorraum der Polynomfunktionen über K

$$f(x) = c_0 + c_1x_1 + \ldots + c_nx^n, \quad c_i \in K$$

Beispiel 5: K/k eine Körpererweiterung

Proposition 1: Für $c \in K,\ \alpha \in V$ gilt:

(1) $c \cdot 0 = 0$

(2) $0 \cdot \alpha = 0$

(3) $c \cdot \alpha = 0 \Rightarrow c = 0$ oder $\alpha = 0$

(4) $(-1)\alpha = -\alpha$

Definition 2: Sei $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in V$.
$\alpha \in V$ ist lineare Kombination der α_i's, wenn es $c_1, \ldots, c_n \in K$ gibt mit:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i$$

Proposition 2:

$$\sum c_i\alpha_i + \sum d_i\alpha_i = \sum (c_i + d_i)\alpha_i$$
$$c \sum c_i\alpha_i = \sum (cc_i)\alpha_i$$

§2. Unterräume

Definition 1: Sei V ein K-Vektorraum und $W \subseteq V$.
Eine Teilmenge $W \subseteq V$ ist ein Teilraum, falls $(W, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum ist (mit der Einschränkungen der Verknüpfungen von V auf W, d.h.: $+ : W \times W \longrightarrow W$ und $\cdot : K \times W \longrightarrow W$ sollen gelten und die Vektorraum-Axiome auch.)

Dazu sind nachzurechnen:
(1) $0_V \in W$ (2) $\alpha, \beta \in W \Rightarrow \alpha + \beta \in W$
(3) $c \in K,\ \alpha \in W \Rightarrow c\alpha \in W$ ((4) insbesondere: $\alpha \in W \Rightarrow -\alpha \in W$)
Also gibt es ein einfacheres Kriterium:

Satz 1: Sei V ein K-Vektorraum, $\emptyset \neq W \subseteq V$ eine Teilmenge.
W ein Unterraum von V gdw. für alle $\alpha, \beta \in W,\ c \in K$ gilt: $\alpha + c\beta \in W$.

Beispiele:

(1) Ist V ein K-Vektorraum, so sind V und $\{0_V\}$ Unterräume von V.

(2) $V = K^n$

$$W := \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n \,|\, x_1 = 0\}$$

ist Unterraum, aber

$$X := \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n \,|\, x_1 = 1 + x_2\}$$

nicht!

(3) die symmetrischen $n \times n$-Matrizen über K ($A_{ij} = A_{ji}$ für $1 \leq i, j \leq n$).
Seien $A, B \in \mathrm{Sym}_{n\times n}(K),\ c \in K$. Dann ist:

$$(A+cB)_{ij}) = A_{ij}+(cB)_{ij} = A_{ij}+cB_{ij} = A_{ji}+cB_{ji} = A_{ji}+(cB)_{ji} = (A+cB)_{ji}$$

Also $A + cB \in \mathrm{Sym}_{n\times n}(K)$ wie gewünscht.

□

(4) sehr wichtiges Beispiel:
Der Lösungsraum eines homogenen, linearen Gleichungssystems:
Sei A eine $m \times n$-Matrix über K, dann ist:

$$\{x \in \mathrm{Mat}_{n\times 1}(K) \,|\, Ax = 0\}$$

ein Unterraum von $\mathrm{Mat}_{n\times 1}(K)$.

Beweis: Wir zeigen allgemeiner:
Ist $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K),\ B, C \in \mathrm{Mat}_{n\times p}(K),\ d \in K$, so ist

$$A(B + dC) = AB + dAC$$

Dann ist:

$$
\begin{aligned}
[A(B+dC)]_{ij} =& \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(B_{kj} + (dC)_{kj}) \\
=& \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(B_{kj} + (dC)_{kj}) \\
=& \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} + \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(dC)_{kj} \\
=& \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} + \sum_{k=1}^{n} dA_{ik}C_{kj} \\
=&(AB)_{ij} + d\sum_{k=1}^{n} A_{ik}C_{kj} \\
=&(AB)_{ij} + d(AC)_{ij}
\end{aligned}
$$

□

Insbesondere:
Ist $Ax_1 = ax_2 = 0$, so auch $A(x_1 + dx_2) = 0$

□

<u>Definition 2:</u> Sei V ein K-Vektorraum, $X \subseteq V$.
Eine Linearkombination von Elementen aus X ist eine (endliche) Summe

$$\sum_{v \in X} c_v v$$

mit $c_v \in K$, wobei $c_v = 0$ für alle bis auf endlich viele v.

Damit können wir nun definieren:

<u>Definition 3:</u> Sei V ein K-Vektorraum, $X \subseteq V$.
Dann ist span(X), der von X <u>aufgespannte</u> oder <u>erzeugte</u> Unterraum, definiert als

$$\operatorname{span}(X) := \left\{ \sum_{v \in X} c_v v \,|\, c_v \in K \text{ und } c_v = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } v \in X \right\}$$

Konvention: $\mathrm{span}(\emptyset) = \{0\}$

Proposition 1: Für jede Teilmenge $X \subseteq V$ ist $\mathrm{span}(X)$ ein Unterraum.

Beweis: $\mathrm{span}(\emptyset) = \{0\}$ ✓

Sonst: $X \neq \emptyset \Rightarrow \mathrm{span}(X) \neq \emptyset$

$\alpha, \beta \in \mathrm{span}(X)$, etwa $\alpha = \sum_{v \in X} c_v v,\ \beta = \sum_{v \in X} d_v v$. Sei $c \in K$, dann gilt:

$$\alpha + c\beta = \sum_{v \in X} (c_v + c d_v) v \in \mathrm{span}(X)$$

□

Er ist sogar der „kleinste“ Unterraum der X enthält. Das ist unser nächstes Ziel.

Satz 2: Sei V ein K-Vektorraum, X eine Menge von Unterräumen.
Dann ist $\bigcap X$ ein Unterraum von V.

Beweis: $\bigcap X := \bigcap_{W \in X} W$

$0_V \in W$ für alle $W \in X$, also $0_V \in \bigcap X \neq \emptyset$.

Sind $\alpha, \beta \in \bigcap X,\ c \in K$, so sind für jeden $W \in X,\ \alpha, \beta \in W$, also $\alpha + c\beta \in W$.

Damit folgt:

$$\alpha + c\beta \in \bigcap X$$

□

Definition 4: Für $X \subseteq V$ definiere:

$$\mathscr{L}(X) := \bigcap \{W \subseteq V \mid W \text{ ist Unterraum und } X \subseteq W\}$$

Satz 3: Für $X \subseteq V$ ist $\mathscr{L}(X) = \mathrm{span}(X)$

Beweis: $X = \emptyset \Rightarrow \mathscr{L}(X) = \{0\} = \operatorname{span}(\emptyset)$

$X \neq \emptyset$:

(1) $\mathscr{L}(X) \subseteq \operatorname{span}(X)$:
Es ist $\operatorname{span}(X) \subseteq V$ Unterraum und $X \subseteq \operatorname{span}(X)$.
Also $\operatorname{span}(X) \in \{W \subseteq V \mid W \text{ Unterraum und } X \subseteq W\}$.
Also $v \in \mathscr{L}(X) \Rightarrow v \in \bigcap\{W \mid W \text{ Unterraum und } X \subseteq W\} \Rightarrow x \in \operatorname{span}(X)$.

(2) $\operatorname{span}(X) \subseteq \mathscr{L}(X)$:
Sei $v \in \operatorname{span}(X)$, $W \subseteq V$ Unterraum und $X \subseteq W$.
a $v \in \operatorname{span}(X)$, existieren $c_x,\ x \in X$ ($c_x \in K,\ \forall x \in X$) mit

$$v = \sum_{x \in X} c_x x,$$

wobei $c_x = 0$ für alle, bis auf endlich viele x. Da W Unterraum und $X \subseteq W$, ist

$$\sum_{x \in X} c_x x = v \in W.$$

Da W beliebig war, ist v Element jeden Unterraumes mit diesen Eigenschaften, also auch des Durchschnittes.

□

Wir können auch mehrere Unterräume zusammenfassen:

Definition 5: Seien $S_1, \ldots, S_k \subseteq V$ und V ein K-Vektorraum.
Dann ist

$$S_1 + \ldots + S_k := \{x_1 + \ldots + x_k \mid x_i \in S_i,\ 1 \leq i \leq k\}$$

kurz auch:

$$\sum_{i=1}^{k} S_i := \left\{ \sum_{i=1}^{k} x_i \mid x_i \in S_i,\ 1 \leq i \leq k \right\}$$

Korollar 1: Seien $W_1, \ldots, W_k$ Unterräume von V, dann ist

$$W := \sum_{i=1}^{k} W_i$$

Unterraum von V und $W_i \subseteq W$ für $1 \leq i \leq k$.

Beweis: Ü.A.

□

Korollar 2: Sind $W_1, \ldots W_k$ Unterräume von V, dann ist

$$\sum_{i=1}^{k} W_i = \operatorname{span}\left(\bigcup_{i=1}^{k} W_i\right)$$

Beweis:

„$\subseteq$“: Sei $v \in \sum_{i=1}^{k} W_i$, also existieren $w_i,\ i \in \{1, \ldots, k\}$ mit $w_i \in W_i$ und $v = \sum_{i=1}^{k} w_i$. Dann ist $w_i \in \bigcup_{j=1}^{k} W_j$ für jedes $1 \leq i \leq h$.
Also $v = \sum_{i=1}^{k} w_i \in \operatorname{span}\left(\bigcup_{j=1}^{k} W_j\right)$.

„$\supseteq$“: Sei $v \in \operatorname{span}\left(\bigcup_{j=1}^{k} W_j\right)$, dann existierten $c_i,\ i \leq k$ und $w_i,\ i \leq k$ mit $c_i \in K,\ w_i \in W_i$, sodass $v = \sum_{i=1}^{k} c_i w_i$
(Bemerkung: Aus jedem W_i können mehrere Elemente stammen.
Die müssen wir dann erst zusammenfassen!)
Da die W_i Unterräume sind, ist mit $w_i \in W_i$ auch $c_i w_i \in W_i$. Also existieren $(w_i',\ i \leq k$ mit $w_i' \in W_i$ und $v = \sum_{i=1}^{k} w_i'$ (nämlich $w_i' := c_i w_i$).
Also $v \in \sum_{i=1}^{k} W_i$.

$\square$

Beispiel: Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ Teilkörper, ferner:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 := (1,2,0,3,0) \\ \alpha_2 := (0,0,1,4,0) \\ \alpha_3 := (0,0,0,0,1) \end{array}\right\} \in K^5$$

$\alpha \in \operatorname{span}(\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\})$ gdw. $c_1, c_2, c_3 \in K$ existieren mit

$$\alpha = \sum_{i=1}^{3} c_i \alpha_i,$$

also hat α damit die Form $(c_1, 2c_1, c_2, 3c_1 + 4c_2, c_3)$.

$$\operatorname{span}(\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in K^5 \mid x_2 = 2x_1,\ x_4 = 3x_1 + 4x_2\}$$

§3. Basen und Dimension

Definition 1: Sei V ein K-Vektorraum.
$S \subseteq V$ ist linear abhängig (l.a.) über K, falls verschiedene $v_1, \ldots, v_n \in S$ und Skalare $c_1, \ldots, c_n \in K$, nicht alle Null existieren mit

$$c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n = 0.$$

S ist linear unabhängig (l.u.) über K, falls S nicht linear unabhängig ist.
(z.B. $\emptyset$ ist linear unabhängig.)

Konvention: $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ endlich: Wir sagen: $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig/abhängig

Bemerkung:

(1) $S_1 \subseteq S_2$ und S_1 linear abhängig $\Rightarrow$ S_2 linear abhängig.

(2) $S_1 \subseteq S_2$ und S_2 linear unabhängig $\Rightarrow$ S_1 linear unabhängig.

Beispiel 1:

(3) (i) $0 \in S \Rightarrow$ S linear abhängig (weil $0 \cdot 1 = 0$).

(ii) $\{v\}$ ist linear abhängig gdw. $v = 0$.

(iii) $\{v_1, v_2\}$ linear abhängig gdw. $v_1 = cv_2,\ c \in K$.

(4) S linear unabhängig gdw. jede endliche Teilmenge von S linear unabhängig ist, d.h. gdw. für verschiedene Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in S$ und alle $c_1, \ldots, c_n \in K$ aus $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i v_i = 0$ folgt: $c_i = 0$ für $1 \leq i \leq n$.

Beispiel 2:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &:= (3, 0, -3) \\ v_2 &:= (-1, 1, 2) \\ v_3 &:= (4, 2, -2) \\ v_4 &:= (2, 1, 1) \end{aligned}\right\} \in \mathbb{R}^3$$

$2v_1 + 2v_2 - v_3 + 0v_4 = 0 \ \Rightarrow\ v_1, v_2, v_2, v_3, v_4$ linear abhängig über $\mathbb{R}$.

Beispiel 3: Seien $\beta_1 = (1, 1, 2),\ \beta_2 = (1, 0, 1),\ \beta_3 = (2, 1, 3)$. Ist $\operatorname{span}(\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}) = \mathbb{R}^3$
Sei $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$. Können wir $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ finden mit:

$$(b_1, b_2, b_3) = c_1(1, 1, 2) + c_2(1, 0, 1) + c_3(2, 1, 3)?$$

D.h. so, dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + 2c_3 &= b_1 \\ c_1 \qquad + c_3 &= b_2 \\ 2c_1 + c_2 + 3c_3 &= b_3 \end{aligned}$$

eine Lösung für <u>alle</u> $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ hat?
Nach Satz 2 (§6) ist dies genau der Fall, wenn

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

<u>Beispiel 4:</u> $v_1 = (1, -2, 3)$, $v_=(5, 6, -1)$, $v_3 = (3, 2, 1)$ linear abhängig?
Betrachte $c_1 v_1 + c_2 + v_2 + c_3 v_3 = 0$.
Betrachte also das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} c_1 + 5c_2 + 3c_3 &= 0 \\ -2c_1 + 6c_2 + 2c_3 &= 0 \\ 3c_1 - c_2 \quad + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

v_1, v_2, v_3 sind genau dann linear abhängig, wenn es eine nichttriviale Lösung gibt.
Also v_1, v_2, v_3 linear unabhängig gdw.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist (Satz 2 (§6)).

<u>Definition 2:</u> Sei V ein K-Vektorraum.
Eine <u>Basis</u> für V ist eine linear unabhängige Teilmenge, die V erzeugt.
V ist <u>endlich dimensional</u>, falls es eine endliche Basis für V gibt, d.h.:
$S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ mit

(i) S linear unabhängig

(ii) $\operatorname{span}(S) = V$.

<u>Beispiel 5:</u> $V = K^n$. Die Standardbasis ist $\{e_i \mid i = 1, \ldots, n\}$, wobei

$$e_i = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i^{\text{te}} \text{ Stelle}}}{1}, 0, \ldots, 0).$$

Satz 1: Sei V ein K-Vektorraum, sodass V endlich erzeugt ist.
Existieren $\beta_1, \dots, \beta_m \in V$ mit $\text{span}(\{\beta_1, \dots, \beta_m\}) = V$, dann ist jede linear unabhängige Teilmenge endlich und hat höchstens m Elemente.

Beweis: Wir zeigen: Hat $S \subseteq V$ mehr als m Elemente, dann ist S linear anhängig.
Seien $v_1, \dots, v_n \in S$, $n > m$. $\text{span}(S) = V$, also gilt für alle $j = 1, \dots, n$: $V_j \in \text{span}(\{\beta_1, \dots, \beta_m\})$, also existieren $A_{1j}, \dots, A_{mj} \in K$ für $j = 1, \dots, m$ mit

$$v_j = \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\beta_i.$$

Wir analysieren nun lineare Kombinationen der v_j, $1 \leq j \leq n$:
Für $x_1, \dots, x_n \in K$ berechne

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} x_j v_j &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\beta_j \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} (A_{ij}x_j)\beta_i \\ &= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j\right)\beta_i \qquad (\star)\end{aligned}$$

Betrachte das homogene lineare Gleichungssystem mit m Gleichungen und n unbekannten $x_1, \dots, x_n$:

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j = 0 \qquad 1 \leq i \leq m \quad (\star\star)$$

$n > m$ also gibt es nach Korollar 2 (§4) nichttriviale Lösungen. Also existieren $x_1, \dots, x_n \in K$, nicht alle Null, sodass

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j = 0 \qquad 1 \leq i \leq m.$$

Zurück in $(\star)$ ergibt sich die lineare Abhängigkeit der v_j, $1 \leq j \leq n$

□

Korollar 1: Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum über K. Es gilt:

Alle Basen haben dieselbe Kardinalität.

Beweis: Seien $\mathcal{B}_1 = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$, $\mathcal{B}_2 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ Basen, d.h. linear unabhängig und erzeugend. Satz 1 (§3) impliziert nun, dass $n \leq m$ und auch $m \leq n$, also $m = n$ gilt.

$\square$

Wir können nun eindeutig $\dim V$ definieren:

Definition 3: Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\mathcal{B}$ eine Basis für V.

$$\dim V := |\mathcal{B}|$$

Wir können nun den Satz 1 (§3) umformulieren:

Korollar 2: Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $n := \dim V$.

(a) Jede Teilmenge mit mehr als n Elementen ist linear abhängig. (eine linear unabhängige Teilmenge hat $\leq n$ Elemente)

(b) Jede Teilmenge mit weniger als n Elementen ist nicht erzeugend (eine erzeugende Teilmenge hat $\geq n$ Elemente)

Beispiel 1:

(a) $V = \{0\}$, $\mathcal{B} = \emptyset$, $\dim V = |\emptyset| = 0$.

(b) $\dim K^n = n$, weil die Standardbasis $\mathcal{E} := \{e_1, \dots, e_n\}$ hat $|\mathcal{E}| = n$.

(c) $K^{m \times n} = \mathrm{Mat}_{m \times n}$ hat Dimension mn, da die mn $m \times n$-Matrizen mit einer 1 als ij^{ten} Eintrag und 0 sonst eine Basis darstellen.

Korollar 3: $S := K^{\mathbb{N}} := \{f \mid f : \mathbb{N} \longrightarrow K\}$ ist nicht endlich-dimensional.

Beweis: Die Elemente

$$\begin{aligned} f_i : \mathbb{N} &\longrightarrow K \\ n &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{für } n = i \\ 0 & \text{für } n \neq i \end{cases} \end{aligned}$$

definieren eine unendliche, linear unabhängige Teilmenge, nämlich

$$S := \{f_i \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Seien $i_1 < \ldots < i_k$ und $c_1 f_{i_1} + \ldots + c_k f_{i_k} = 0$, so

$$(c_1 f_{i_1} + \ldots + c_k f_{i_k})(i_\ell) = c_\ell = 0, \qquad \forall \ell = 1, \ldots, k.$$

□

Lemma 1: (Fortsetzungslemma)
Sei V ein K-Vektorraum, S linear unabhängig in V und $\beta \notin \operatorname{span}(S)$.
Dann ist $S \cup \{\beta\}$ linear unabhängig.

Beweis: Seien $c_1, \ldots, c_m, b \in K$ mit $c_1\alpha_1 + \ldots + c_m\alpha_m + b\beta = 0$.
Angenommen $b \neq 0$, dann gilt:

$$b\beta = (-c_1)\alpha_1 + \ldots + (-c_m)\alpha_m$$

also

$$\beta = \left[(-c_1)b^{-1}\right]\alpha_1 + \ldots + \left[(-c_m)b^{-1}\right]\alpha_m$$

$\Rightarrow \beta \in \operatorname{span}(S)$ ↯

Also $b = 0$ und damit $\sum\limits_{i=1}^{m} c_i\alpha_i = 0$ und da S l.u. folgt: $c_i = 0,\ 1 \leq i \leq m$.

□

Satz 2: Sei V endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $W \subseteq V$ ein Unterraum.
Jede linear unabhängige Teilmenge von W ist endlich und ist Teil einer (endlichen) Basis für W.

Beweis: Sei $S \subseteq W$ linear unabhängig und betrachte $S \subseteq V$ ist linear unabhängig, also $|S| \leq \dim V$. Sei nun $S_0 \subseteq W$ linear unabhängig.
Wir setzen S_0 zu einer Basis fort wie folgt:
Betrachte den Unterraum $\operatorname{span}(S_0) \subseteq W$.

- Falls $\operatorname{span}(S_0) = W$ ✓
- Falls $\operatorname{span}(S_0) \subsetneq W$: Sei $\beta_1 \in W, \beta_1 \notin \operatorname{span}(S_0)$.
  Setze $S_1 := S_0 \cup \{\beta_1\}$, linear unabhängig nach Lemma 1 (§3)
  Wiederhole: $S_2 := S_1 \cup \{S_1\}$ linear unabhängig, usw.
  In höchstens $\dim V$ vielen Schritten erreichen wir $S_m = S_0 \cup \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$, wofür $\operatorname{span}(S_m) = W$ sein muss und S_m außerdem linear unabhängig ist, also S_m Basis für W ist.

□

Korollar 4: Sei W ein echter Unterraum des endlichen K-Vektorraumes V (d.h. $W \subsetneq V$).
Dann ist W endlich-dimensional und $\dim W < \dim V$.

Beweis: Setze $S_0 \neq \emptyset$ und setze fort wie im Beweis von Satz 2 (§3) und wir erhalten eine Basis S_m von W, also $\operatorname{span}(S_m) = W$ in $m \leq \dim V$ vielen Schritten.
Also $m := \dim V \leq\sim V$, aber W echt, d.h. es existiert ein $b \notin W$, also $\beta \notin \operatorname{span}(S_m)$. Also ist $S_m \cup \{\beta\}$ linear unabhängig und damit $m + 1 \leq \dim V$ und somit $m < \dim V$.

□

Korollar 5: Sei V endlich-dimensional über K.
Jede linear unabhängige Teilmenge ist Teil einer Basis.

Korollar 6: Seien W_1, W_2 endlich-dim. Unterräume vom K-Vektorraum V. Es gilt:

$W_1 + W_2$ ist endlich-dimensional
und
$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2)$.

Beweis: Satz 2 (§3) impliziert, dass $W_1 \cap W_2$ eine endliche Basis $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ hat.
Nach Korollar 5 (§3) existieren $\beta_1, \dots, \beta_m \in W_1$ und $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in W_2$, sodass $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m\}$ Basis für W_1 ist und $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ Basis für W_2.
Der Unterraum $W_1 + W_2$ wird von $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ erzeugt.

Behauptung: Diese Vektoren sind linear unabhängig.

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \alpha_i + \sum_{j=1}^{m} y_j \beta_j + \sum_{r=1}^{n} z_r \gamma_r = 0 \qquad (\star)$$

$$\Rightarrow -\sum_{r=1}^{n} z_r \gamma_r = \sum_{i=1}^{k} x_i \alpha_i + \sum_{j=1}^{m} y_j \beta_j$$

Also $\sum\limits_{r=1}^{n} z_r\gamma_r \in W_1$, aber auch $\sum\limits_{r=1}^{n} z_r\gamma_r \in W_2$ per Definition und damit:

$$\sum_{r=1}^{n} z_r\gamma_r \in W_1 \cap W_2.$$

Also gibt es $c_1, \dots, c_k \in K$, sodass $\sum\limits_{r=1}^{n} z_r\gamma_r = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i\alpha_i$.
Aber $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ linear unabhängig $\Rightarrow z_r = 0,\ 1 \leq r \leq n$.
Also $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i\alpha_i + \sum\limits_{j=1}^{m} y_j\beta_j = 0$ in $(\star)$ und $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m\}$ linear unabhängig $\Rightarrow x_i = 0$ und $y_j = 0$ für $1 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq m$.

$\square$

Also $\dim W_1 + \dim W_2 = (k+m) + (k+n) = k + (m+k+n)$

$\square$

§4. Koordinaten

Definition 1: Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $\dim V = n$.
Eine geordnete Basis ist ein n-Tupel $(\alpha_1, \dots, \alpha_n),\ \alpha_i \in V$, sodass $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine Basis ist.

Notation und Terminologie: Wir schreiben $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine geordnete Basis (wir werden nicht $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ schreiben).

Lemma 1: Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ Basis.
Für $\alpha \in V$ existiert ein eindeutiges n-Tupel $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ mit

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i$$

Beweis: $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i\alpha_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\alpha_i \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - z_i)\alpha_i = 0$.
$\Rightarrow x_i - z_i = 0 \Rightarrow x_i = z_i, \quad$ für $\quad 1 \leq i \leq n$.

$\square$

Definition 2: Sei V endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $\mathcal{B} := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ Basis, $\alpha \in V$ und $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ wie in Lemma 1.

(1) x_i ist die i^{te} Koordinate von α bezüglich $\mathcal{B}$

(2) $(c_1, \dots, x_n)$ ist das Koordinatentupel von α bezüglich $\mathcal{B}$.

Definition 3: Seien V und W K-Vektorräume

(1) $T : V \to W$ ist eine lineare Abbildung (oder Transformation), falls

(i) $T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in V$

(ii) $T(c\alpha) = cT(\alpha), \quad \forall \alpha \in V,\ c \in K$
oder äquivalent:

(iii) $T(c\alpha + \beta) = cT(\alpha) + T(\beta) \qquad \forall \alpha, \beta \in V,\ c \in K.$

Bemerkung: $T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0) = 2T(0) \Rightarrow T(0) = 0$

(2) T ist eine Isomorphie oder ein Isomorphismus, falls T zusätzlich bijektiv ist.

Notation: $V \overset{T}{\simeq} W$ oder $V \simeq W$.

Terminologie: V und W sind isomorph.

Lemma 2: Seien V, W K-Vektorräume und $T : V \longrightarrow W$ eine lineare Transformation.
T ist injektiv gdw. $T(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0, \quad \forall \alpha \in V$

Beweis:

„$\Rightarrow$“: T injektiv und $T(\alpha) = 0 = T(0)$, also $\alpha = 0$.

„$\Leftarrow$“: Sei $T(\alpha_1) = T(\alpha_2)$, dann gilt $T(\alpha_1) - T(\alpha_2) = 0$, d.h. $T(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$ und damit $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ und somit $\alpha_1 = \alpha_2$.

$\square$

Satz 1: Sei V ein K-Vektorraum. Es gilt:

$$\dim V = n \Rightarrow V \simeq K^n$$

Beweis: Sei $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ geordnete Basis. Definiere:

$$\begin{aligned} T : V &\longrightarrow K^n \\ \alpha &\longmapsto \underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{\substack{\text{Koordinatentupel} \\ \text{von } \alpha \text{ bezügich } \mathcal{B}}} \end{aligned}$$

$T(\alpha + \beta) \stackrel{?}{=} T(\alpha) + T(\beta)$
Sei $\alpha = Sum_{i=1}^n x_i \alpha_i$, $\beta = \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i$, dann ist $\alpha + \beta = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)$ eindeutig und daraus folgt:

$$T(\alpha + \beta) = (x_1 + y_2, \dots, x_n + y_n) = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = T(\alpha) + T(\beta)$$

Analog $T(c\alpha) = cT(\alpha)$.
Außerdem:

$$T(\alpha) = (0, \dots, 0) \Rightarrow \alpha = 0,$$

da $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Also ist T injektiv.
Sei nun $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ und setze $\alpha := \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i \in V$.
Es gilt: $T(\alpha) = (x_1, \dots, x_n)$, also ist T surjektiv.

□

Notation: Koordinaten-Spaltenmatrix von α bezüglich $\mathcal{B}$:

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Beispiel 1: $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= (1,2,1) \\ \alpha_2 &= (2,9,0) \\ \alpha_3 &= (3,3,4) \end{aligned}\right\} \text{ eine Basis und } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ invertierbar.}$$

(i) Finde $\alpha \in \mathbb{R}^3$ mit $[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(ii) Finde $[\alpha]_{\mathcal{B}}$ für $\alpha = (5, -1, 9)$.

zu (i): $\alpha = -\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = (11, 31, 7)$.

zu (ii): Finde x_1, x_2, x_3 mit $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{3} x_1\alpha_i$, d.h.
$(5, -1, 9) = x_1(1, 2, 1) + x_2(2, 9, 0) + x_3(3, 3, 4)$.
Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 9x_2 + 3x_3 &= -1 \\ x_1 \qquad + 4x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Lösung $x_1 = 1,\ x_1 = -2,\ x_3 = 2$ und damit:

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Was ist der Zusammenhang zwischen $[\alpha]_{\mathcal{B}}$ und $[\alpha]_{\mathcal{B}'}$ für zwei geordnete Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$?

Bemerkung: $[\alpha]_{\mathcal{B}} = 0 \Leftrightarrow [\alpha]_{\mathcal{B}'} = 0$.

Satz 2: Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim V = n$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ geordnete Basen und $\underline{P}$ die eindeutig definierte, invertierbare Matrix mit Spalten $\underline{P}_j := [\alpha'_j]_{\mathcal{B}}$ für $j = 1, \ldots, n$. Es gelten:

(i) $[\alpha]_{\mathcal{B}} = \underline{P}[\alpha]_{\mathcal{B}'}, \qquad \forall \alpha \in V$
und

(ii) $[\alpha]_{\mathcal{B}'} = \underline{P}^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}}, \qquad \forall \alpha \in V$

Beweis: Sei $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\}$. Schreibe $\alpha'_j = \sum\limits_{j=1}^{n} P_{ij}\alpha_i$, $P_{ij} \in K$ eindeutig, d.h.:

$$[\alpha'_j]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} P_{ij} \\ \vdots \\ P_{nj} \end{pmatrix}$$

Nun sei $\alpha \in V$ beliebig und $[\alpha]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$, also:

$$\begin{aligned}
\alpha = \sum_{j=1}^{n} x'_j \alpha'_j &= \sum_{j=1}^{n} x'_j \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_i \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (P_{ij}x'_j)\alpha_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} P_{ij}x'_j \right) \alpha_i \qquad (\star)
\end{aligned}$$

Aus $(\star)$ folgt: die i^{te} Koordinate von α bezüglich $\mathcal{B}$ ist:

$$(\star\star) \qquad x_i = \sum_{j=1}^{n} P_{ij}x'_j \qquad 1 \leq i \leq n$$

Sei $\underline{P}$ nun die $n \times n$-Matrix mit ij^{tem} Koeffizient P_{ij}. Wir schreiben $(\star\star)$ nun um:

$$[\alpha]_{\mathbb{B}} = \underline{P}[\alpha]_{\mathcal{B}'}, \text{ d.h.:}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} P_{ij}x'_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} P_{nj}x'_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & \dots & P_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Ferner folgt auf $([\alpha]_{\mathcal{B}} = 0 \Leftrightarrow [\alpha]_{\mathcal{B}'})$, dass das homogene lineare Gleichungssystem $PX' = 0$ nur die triviale Lösung $X' = 0$ hat, also $\underline{P}$ invertierbar ist.
Damit folgt auch, dass

$$[\alpha]_{\mathcal{B}'} = \underline{P}^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}}$$

. $\square$

Satz 3: Sei $\underline{P}$ eine $n \times n$-Matrix (über K), V n-dimensionaler K-Vektorraum und $\mathcal{B}$ geordnete Basis. Es gibt eine eindeutig definierte Basis $\mathcal{B}'$ von V, sodass $\forall \alpha \in V$ gilt:

(i) $[\alpha]_{\mathcal{B}} = \underline{P}[\alpha]_{\mathcal{B}'}$
und

(ii) $[\alpha]_{\mathcal{B}'} = \underline{P}^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}}$

Beweis: Wenn $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\}$ (i) erfüllen sollte, dann gilt notwendigerweise:

$$[\alpha'_j]_{\mathcal{B}} = \underline{P}[\alpha'_j]_{\mathcal{B}'} = \underline{P}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{1j} \\ \vdots \\ P_{nj} \end{pmatrix},$$

also $a'_j = \sum\limits_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_i$. Nun zeigen wir, dass die so definierten α'_j eine Basis bilden. Sei $Q := \underline{P}^{-1}$. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \sum j = 1^n Q_{jk}\alpha'_j =& \sum_{j=1}^{n} Q_{jk} \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_j \\ =& \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} P_{ij}Q_{jk}\alpha_i \\ =& \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\sum_{j=1}^{n} P_{ij}Q_{jk})}_{(PQ)_{ik}} \alpha_i \\ =& \sum_{i=1}^{n} (\delta_{ik})\alpha_i \\ =& \alpha_k \text{ für } 1 \leq k \leq n \end{aligned}$$

Also $\operatorname{span}(\mathcal{B}') \supseteq \mathcal{B}$ und damit $\operatorname{span}(\mathcal{B}') = V$ (siehe Hilfslemma 1 und 2).

□

Hilfslemma 1: $\dim V = n,\ X \subseteq V$

$|X| = n$ und X linear unabhängig $\Rightarrow$ X ist eine Basis.

Hilfslemma 2: $\dim V = n,\ X \subseteq V$

$|X| = n$ und X erzeugend $\Rightarrow$ X ist eine Basis.

<u>Korollar 1:</u>

$$\underline{P} \text{ invertierbare } n \times n\text{-Matrix} \\ \Leftrightarrow \\ \text{die Spaten von } \underline{P} \text{ sind linear unabhängig in } K^n.$$

<u>Beweis:</u>

$$\underline{P}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{P}X = 0$$

hat nur die triviale Lösung gdw.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \underline{P}_i = 0$$

eine triviale lineare Kombination ist, wobei $\underline{P}_i$ die i^{te} Spalte von $\underline{P}$ ist.

□

<u>Korollar 2:</u> Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim V = n$.
Eine $n \times n$-Matrix $\underline{P}$ ist invertierbar gdw. die Spalten von $\underline{P}$ eine Basis für V bilden.

<u>Beispiel:</u> Eine parametrische Familie von geordneten Basen. $K = \mathbb{R}$, $\Theta \in \mathbb{R}$

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} \cos(\Theta) & -\sin(\Theta) \\ \sin(\Theta) & \cos(\Theta) \end{pmatrix}$$

invertierbar mit

$$\underline{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\Theta) & \sin(\Theta) \\ -\sin(\Theta) & \cos(\Theta) \end{pmatrix}.$$

So gilt für jedes $\Theta \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{B}_\Theta := \{(\cos(\Theta), \sin(\Theta)), (-\sin(\Theta), \cos(\Theta))\}$$

ist eine Basis für $\mathbb{R}^2$.
Für $\alpha = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$[\alpha]_{\mathcal{B}_\Theta} = \begin{pmatrix} \cos(\Theta) & \sin(\Theta) \\ -\sin(\Theta) & \cos(\Theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cos(\Theta) + x_2\sin(\Theta) \\ -x_1\sin(\Theta) + x_2\cos(\Theta) \end{pmatrix}$$

Erinnerung:

(i) $y=(y_1,\ldots,y_n),\ A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix},\ \alpha_i\ :\ i^{\text{te}}$ Zeile.

Es gilt: $yA=y_1\alpha_1+\ldots+y_n$.

(ii) i^{te} Zeile von BA=[i^{te} Zeilenmatrix von B] $A=[B_{i1}\ldots B_{in}]\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\underset{\text{(i)}}{=}\sum_{j=1}^{n}B_{ij}\alpha_j$

für $1\leq i\leq n$.

Also ist die i^{te} Zeile von BA eine lineare Kombination der Zeilen von A.

Korollar 3: Sei A eine $n\times n$-Matrix über K und $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ die Zeilenvektoren von A.
$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ linear unabhängig $\Rightarrow$ A invertierbar.

Beweis: $\mathcal{B}=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ ist eine Basis für K^n, also schreibe:

$$\text{Standardbasisvektor: } e_i=\sum_{j=1}^{n}B_{ij}\alpha_j,\quad 1\leq i\leq n$$

Sei B die $n\times n$-Matrix mit B_{ij} als Koeffizienten. Betrachte die Matrix BA.
Die i^{te} Zeile von BA=[i^{te} Zeile von B]A, d.h.:

$$(B_{i1}\ldots B_{in})A=\sum_{j=1}^{n}B_{ij}\alpha_j=e_i$$

Also $BA=\mathrm{I}_n$.
Für die Umkehrung siehe Ü.B.

□

§5. Zeilenraum

Definition 1: Sei $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \hline \vdots\\ \hline \alpha_m\end{pmatrix}$ $m\times n$-Matrix über K, $\alpha_1,\ldots,\alpha_m\in K^n$ Zeilen von A.
Der Zeilenraum von A ist $\operatorname{span}\{\alpha_1,\ldots,\alpha_,\}\underset{\text{U.R.}}{\subseteq}K^n$.
Der Zeilenrang von A ist die Dimension des Zeilenraums.

<u>Satz 1:</u> Zeilenäquivalente Matrizen haben denselben Zeilenraum.

<u>Beweis:</u> $B = \underline{P}A$, $\underline{P}$ invertierbar, A, B $m \times n$-Matrizen.

$$\left.\begin{matrix} A \; m \times n \\ P \; m \times m \end{matrix}\right\} B \; m \times n$$

Also $B = \underline{P}A \longleftarrow$ jede B-Zeile ist lineare Kombination von A-Zielen.
Also $A = P^{-1}B \leftarrow$ jede A-Zeile ist lineare Kombination von B-Zeilen.
Also jede B-Zeile in $\operatorname{span}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ und umgekehrt.
Also Zeilenraum von A = Zeilenraum von B.

□

Wir werden auch die Umkehrung von Satz 1 zeigen. Dafür studieren wir den Zeilenraum von Matrizen in r.Z.S.F.

<u>Satz 2:</u> Sei $R \not\equiv 0$ in r.Z.S.F. Dann bilden die Zeilenvektoren von R die ungleich Null sind eine Basis für den Zeilenraum von R.
(also Zeilenrang von R=Anzahl der Zeilen die ungleich Null sind.

<u>Beweis:</u> Seien $\rho_1, \ldots, \rho_r$ die Zeilen ungleich Null.

$$R = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_r \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Es ist klar, dass $\rho_1, \ldots, \rho_r$ den Zeilenraum erzeugen. Wir zeigen nun die lineare Unabhängigkeit (Analog zu Korollar 3 (§3)).
Seien $k_1 < \ldots < k_r$ die Spaltenindizes (in der die Haupteinsen der ρ_i stehen).

$$c_1\rho_1 + \ldots + c_r\rho_r = c_1(0, \ldots, \underset{k_1}{1}, \ldots, 0) + \ldots + c_r(0, \ldots, 0, \underset{k_r}{1}, \ldots, 0) = (0, \ldots, 0)$$

impliziert $c_1 = \ldots = c_r = 0$.

□

<u>Hilfslemma:</u> Seien R und R' $m \times n$-Matrizen in r.Z.S.F. Es gilt:
R und R' haben denselben Zeilenraum $\Rightarrow$ $R = R'$.

<u>Beweis:</u> $k_1 < \ldots < k_r$ bzw. $k'_1 < \ldots < k'_r$ Spaltenindizes von R bzw R' in denen die Haupteinsen stehen.
Bemerke: ρ_i ist genau dann lineare Kombination von $\{\rho'_1, \ldots, \rho'_r\}$, wenn $k_i = k'_i$ für alle $i = 1, \ldots, r$

$\square$

<u>Satz 3:</u> Seien $m, n \in \mathbb{N}$, K Körper und W ein Unterraum von K^n mit $\dim V \leq m$.
Es gilt:
Es existiert genau eine $m \times n$-Matrix R in r.Z.S.F. mit Zeilenraum $R = W$.

<u>Beweis:</u>

<u>Existenz:</u> $\dim W \leq m$. Seien $\alpha, 1 \ldots, \alpha_m \in W$ mit $\operatorname{span}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} = W$.
Setze:

$$A := \left(\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \alpha_m \end{array} \right) \qquad m \times n\text{-Matrix}$$

Dann ist Zeilenraum $A = W$.
A ist zeilenäquivalent zu R in r.Z.S.F. und damit gilt:
Zeilenraum A =Zeilenraum $R = W$.

<u>Eindeutigkeit:</u> Sei R' eine Matrix in r.Z.S.F. mit Zeilenraum R =Zeilenraum R'
Daraus folgt nach dem Hilfslemma: $R = R'$.

$\square$

<u>Korollar 1:</u> Jede $m \times n$-Matrix ist zeilenäquivalent zu einer <u>eindeutigen</u> Matrix in r.Z.S.F.

<u>Beweis:</u> A zeilenäquivalent zu R und A zeilenäquivalent zu R'

$$\Rightarrow \text{Zeilenraum } R = \text{ Zeilenraum } A = \text{ Zeilenraum } R'$$

$$\Rightarrow R = R'$$

$\square$

<u>Korollar 2:</u> Seien A, B $m \times n$-Matrizen über K. Es gilt:
A zeilenäquivalent zu B gdw. Zeilenraum A = Zeilenraum B.

<u>Beweis:</u>

„⇒“: ✓

„⇐“:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Zeilenraum } A = \text{Zeilenraum } R \\ = \text{Zeilenraum } B = \text{Zeilenraum } R'\end{array}\right\} \Rightarrow R = R'$$

Also A zeilenäquivalent zu R und B zeilenäquivalent zu R
$\Rightarrow$ A zeilenäquivalent zu B.

□

<u>Korollar 3:</u> Seien A und B $m \times n$-Matrizen über K, dann sind äquivalent:

(i) A und B sind zeilenäquivalent

(ii) A und B haben denselben Zeilenraum

(iii) $B = \underline{P}A$, $\underline{P}$ invertiertbare $m \times n$-Matrix.

<u>Zusammenfassung:</u>
Verfahren zum Berechnen von Basis und Dimension von Zeilenraum von A.

(I)
- Reduziere A zu R in r.Z.S.F.
- eine Basis für Zeilenraum $A = \{\rho_1, \ldots, \rho_r\}$ (die Nicht-Nullzeilen von R).

(II) Nun betrachten wir den Lösungsraum $\underset{\text{U.R.}}{\subseteq}$ K^n zu $AX = 0$, wobei A eine $m \times n$-Matrix ist. Setze $S :=$Lösungsraum.
Wir berechnen eine Basis und die Dimension:
- Reduziere A zu R in r.Z.S.F. S ist auch Lösungsraum für $RX = 0$
- Seien $\rho_1, \ldots, \rho_r$ die Nicht-Nullzielen von R und $k_1, \ldots, k_r$ die Spaltenindizes in denen die Haupteinsen der Zeilen stehen.

<u>Erinnerung:</u> • Lösungsverfahren:
$\{x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}\}$ Hauptvariablen. $J = \{1, \ldots, n\} \backslash \{k_1, \ldots, k_r\}$.
$\{x_j \,|\, j \in J\}$ freie Variablen, $|J| = n - r$.

Löse: •

$$\left.\begin{aligned} x_{k_1} &= \sum_{j\in J} c_{1j}x_j \\ &\vdots \\ x_{k_r} &= \sum_{j\in J} c_{rj}x_j \end{aligned}\right\} (\star) \qquad \begin{matrix} c_{ij}\in K \\ 1\le i\le r \\ j\in J \end{matrix}$$

• Alle Lösungen bekommt man durch Einsetzen beliebiger Werte für $x_j,\ j\in J$.

• Also sei E_j die Lösung, die man bekommt durch Einsetzen von $x_j=1$ und $x_i=0,\ \forall i\in J\backslash\{j\}$.

Behauptung: Die $(n-r)$ Vektoren $\{E_j\,|\,j\in J\}$ sind eine Basis für S.

Beweis:

(1) Linear unabhängig: Wie oben (die Spaltenmatrix E_j hat eine 1 in der j^{ten} Zeile und 0 in den anderen Zeilen, die durch Elementen aus J indiziert sind).

(2) Erzeugend: folgt aus $(\star)$
Details: Ü.A.

□

Also ist $\{E_j\,|\,j\in J\}$ Basis und damit ist $\dim S=n-r$.

Kapitel III: Lineare Transformationen

§1. Definitionen und Beispiele

Beispiel 1:

(i) $T=0$

(ii) $I(\alpha)=\alpha$ Identität

Beispiel 2: V :=Polynomfunktionen über K.

$$f(x)=x_0+c_1x+\ldots+c_kx^k$$
$$(Df)(x)=c_1+2x_3c+\ldots+kc_kx^{k-1}$$

Ableitungsoperator

Beispiel 3: Sei A eine $m\times n$-Matrix über K.

(a)

$$\begin{aligned} T\,:\,K^{n\times 1} &\longrightarrow K^{m\times 1} \\ X &\longmapsto T(X) \end{aligned}$$

mit $T(X):=AX$.

(b)

$$\begin{aligned} U \,:\, K^m &\longrightarrow K^n \\ \alpha &\longmapsto U(\alpha) \end{aligned}$$

mit $U(\alpha) := \alpha A$.

Beispiel 4: Sei P eine $m \times m$ und A eine $n \times n$-Matrix über K.

$$\begin{aligned} T \,:\, K^{m\times n} &\longrightarrow K^{m\times n} \\ A &\longmapsto T(A) \end{aligned}$$

mit $T(A) := PAQ$ ist linearer Operator.

Beispiel 5: $V = \{f \mid f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$

$$\begin{aligned} T \,:\, V &\longrightarrow V \\ f &\longmapsto Tf \end{aligned}$$

wobei $(Tf)(x) := \int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ für $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 1: Lineare Abbildungen erhalten lineare Kombinationen:

$$T\left(\sum_{j=1}^{m} c_j\alpha_j\right) = \sum_{j=1}^{n} c_jT(\alpha_j).$$

Satz 1: Sei V endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine geordnete Basis für V. Seien $\beta_1, \dots, \beta_n$ beliebige Vektoren in W.
Es existiert genau eine lineare Abbildung $T : V \longrightarrow W$ mit

$$T(\alpha_j) = \beta_j \qquad (\star)$$

für $1 \leq j \leq n$.

Beweis:

Existenz: Sei $\alpha \in V$, dann existieren $x_1, \dots, x_n \in K$, sodass:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i.$$

Definiere:

$$T(\alpha) := \sum_{i=1}^{n} x_i\beta_i$$

damit ist insbesondere ($\star$) erfüllt.
Ist T linear?
Sei $\gamma = y_1\alpha_1 + \ldots + y_n\alpha_n$ und $c \in K$, dann ist

$$c\alpha + \gamma = (cx_1 + y_1)\alpha_1 + \ldots + (cx_n + y_n)\alpha_n.$$

Und damit:

$$\begin{aligned} T(c\alpha + \gamma) =& (cx_1 + y_1)\beta_1 + \ldots + (cx_n + y_n)\beta_n \\ =& (cx_1\beta_1 + y_1\beta_1) + \ldots + (cx_n\beta_n + y_n\beta_n) \\ =& (cx_1\beta_1 + \ldots + cx_n\beta_n) + (y_1\beta_2 + \ldots + y_n\beta_n) \\ =& c(x_1\beta_2 + \ldots + x_n\beta_n) + (y_1\beta_1 + \ldots + y_n\beta_n) \\ =& cT(\alpha) + T(\gamma) \checkmark \end{aligned}$$

Eindeutigkeit: Seien $T, U : V \longrightarrow W$ linear mit $T(\alpha_j) = \beta_j)U(\alpha_j)$.
Z.z.: $T(\alpha) = U(\alpha)$ für alle $\alpha \in V$.
Berechne:

$$\begin{aligned} U(\alpha) =& U\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_iU(\alpha_i) \\ =& \sum_{i=1}^{n} c_iT(\alpha_i) = T\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i\right) = T(\alpha) \end{aligned}$$

$\square$

<u>Bemerkung 2:</u> Wir haben gezeigt:

(1) $T, T : V \longrightarrow W$ lineare Abbildungen. Es gilt:

$$T = U \text{ gdw. } T(\alpha_j) = U(\alpha_j) \text{ für } 1 \leq j \leq n$$

für eine Basis $\{\alpha_j \mid 1 \leq j \leq n\}$ von V.

(2) Wenn wir die Werte $T(\alpha_j)$ kennen, können wir „T per Linearität fortsetzen“.

<u>Beispiel 6:</u> $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= (1, 2) \\ \alpha_2 &= (3, 4) \end{aligned}\right\} \text{ Basis für } V$$

$\beta_1 = (3, 2, 1)$, $\beta_2 = (6, 5, 4)$.

$$\begin{aligned} T :& \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ T(1, 2) =& (3, 2, 1) \\ T(3, 4) =& (6, 5, 4) \end{aligned}$$

$T(e_1) = ?$
$e_1 = (1, 0) = (-2)(1, 2) + (3, 4)$ und damit:

$$T(e_1) = (-2)(3, 2, 1) + (6, 5, 4) = (0, 1, 2)$$

Beispiel 7: $T : K^m \longrightarrow K^n$ ist eindeutig bestimmt durch

$$T(e_i) := \beta_i, \quad i = 1, \dots, m,\ \beta_i \in K^n.$$

Sei $\alpha = (x_1, \dots, x_m) \in K^m$. $T(\alpha)?x_1\beta_1 + \ldots + x_m\beta_m$.
Setze:

$$B = \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \beta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(e_1) \\ \hline \vdots \\ \hline T(e_m) \end{pmatrix}}_{m\times n\text{-Matrix}}$$

Berechne:

$$\underset{1\times m}{\alpha B = (x_1, \dots, x_m)} \underset{m\times n}{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}} = \underset{1\times n}{x_1\beta_1 + \ldots + x_m b_m}$$

Also $T(\alpha) = \alpha B$

Bild und Nullraum (Kern)

Lemma 1: Sei $T : V \longrightarrow W$ lineare Abbildung.

(1) $T(V) := R_T = \{T(\alpha) \mid \alpha \in V\} = \{w \mid w \in W \text{ und } \exists\, \alpha \in V \text{ mit } T(\alpha) = w\}$
ist ein Unterraum von W.

(2) $N := T^{-1}\{0\} := \{\alpha \mid \alpha \in V \text{ und } T(\alpha) = 0\}$
$N := \ker(T)$ ist ein Unterraum von V.

Beweis:

(1) $\beta_1, \beta_2 \in R_T,\ c \in K \Rightarrow c\beta_1 + \beta_2 \in R_T$?
$\beta_1 = T(\alpha_1),\ \beta_2 = T(\alpha_2)$ und damit:

$$T(c\alpha_1 + \alpha_2) = cT(\alpha_1) = T(\alpha_2) = c\beta_1 + \beta_2 \quad \checkmark$$

$T(0) = 0 \in R_T$, also $R_T \neq \emptyset$ und damit ist R_T Unterraum.

(2) $\alpha_1, \alpha_2 \in N,\ c \in K \Rightarrow c\alpha_1 + \alpha_2 \in N$?
$T(c\alpha_1 + \alpha_2) = c0 + 0 = 0$, also $c\alpha_1 + \alpha_2 \in N$ und auch $0 \in N$.
Somit $N \neq \emptyset$ und damit ist N Unterraum.

$\square$

Definition 1: Sei V endlich-dimensional, $T : V \longrightarrow W$ lineare Abbildung.

$$\operatorname{rang}(T) := \dim R_T$$

Bemerkung: V endlich-dimensional, $T : V \longrightarrow W$ lineare Abbildung.
Es gilt: $R_T = T(V) \underset{\text{U.R.}}{\subseteq} W$ ist endlich erzeugt, weil:
Sei $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ eine Basis für V, dann gilt für $\alpha \in V$:

$$T(\alpha) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i T(\alpha_i) := \sum_{i=1}^{n} c_i \beta_i$$

$\Rightarrow T(\alpha) \in \operatorname{span}\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$, also $R_T = \operatorname{span}\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$

$\square$

Satz 2: V endlich-dimensional, $T : V \longrightarrow W$. Es gilt:

$$\dim V = \dim \ker T + \operatorname{rang} T$$

Beweis: Sei $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ eine Basis für $N = \ker T$. Sei $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n \in K$, sodass $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n\}$ eine Basis für V ist.

Behauptung: $\{T(\alpha_{k+1}, \ldots, T(\alpha_n)\}$ bilden eine Basis für R_T.

Beweis: Nach obiger Bemerkung folgt , dass

$$\{\underbrace{T(a_1), \ldots, T(\alpha_k)}_{=0}, T(\alpha_{k+1}), \ldots, T(\alpha_n)\}$$

R_T erzeugen, d.h. $\{T(\alpha_{k+1}), \ldots, T(\alpha_n)\}$ erzeugen R_T.
Sei nun

$$\sum_{i=k+1}^{n} c_i(T(\alpha_i)) = \text{, also } T\,(\underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} c_i\alpha_i}_{=:\alpha}) = 0$$

und damit also $\alpha \in N$.
Es existieren $b_1, \ldots, b_k$ mit $\alpha = \sum_{i=1}^{k} b_i \alpha_i$, also:

$$0 = \alpha - \alpha = \sum_{i=1}^{k} b_i \alpha_i - \sum_{j=k+1}^{n} c_j \alpha_j = 0$$

Aber $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\}$ linear unabhängig und damit folgt: $b_1 = \ldots = b_k = c_{k+1} = \ldots = c_n = 0$.

□

Beispiel: Sei $m \times n$-Matrix.

$$\begin{aligned} T_A \,:\, K^{n\times 1} \to & K^{m\times 1} \\ T_A(X) := & AX \end{aligned}$$

$\ker T_A =$Lösungsraum von $AX = 0$

$$R_{T_A} = \{Y \in K^{m\times 1} \,|\, \exists X \,:\, AX = Y\} \qquad (\star)$$

Seien $A_1, \dots, A_n$ die Spaten von A. Damit ergibt $(\star)$:

$$Y \in R_{T_A} \Leftarrow \exists X \,:\, Y = x_1 A_1 + \vdots x_n A_n$$

Also R_{T_A} =Spaltenraum von A und Rang(T_A)=Spaltenrang von A, wobei: Spaltenraum:=span$\{A_1, \dots, A_n\}$ und Spaltenrang:=dim Spaltenraum.

§2. Die Algebra der lineare Transformationen

Seien V, W K-Vektorräume. Wir haben gesehen, dass

$$\text{Fkt}(V, W) = \{f \,|\, f \,:\, V \longrightarrow W \text{ eine Funktion}\}$$

versehen mit Funktionenaddition und Skalarmultiplikation ist ein K-Vektorraum.

Satz 1: Setze $L(V, W) := L := \{T \,|\, T \,:\, V \longrightarrow W \text{ lineare Abbildung}\}$ mit Addition:

$$\begin{aligned} (T + U)(\alpha) :=& T(\alpha) + U(\alpha) \qquad T, U \in L \\ (\alpha T)(\alpha) :=& \alpha(T(\alpha)) \qquad\qquad \alpha \in K \end{aligned}$$

Es gilt: $T + U \in (V, W)$ und $\alpha T \in L$

Beweis:
$$\begin{aligned} (T + U)(c\alpha + \beta) =& T(c\alpha + \beta) + T(c\alpha + \beta) \\ =& cT(\alpha) + T(\beta) + cU(\alpha) + U(\beta) \\ =& c(T(\alpha) + U(\alpha)) + (T(\beta) + U(\beta)) \\ =& c(T + U)(\alpha) + (T + U)(\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (dT)(c\alpha + \beta) =& dT(c\alpha + \beta) \\ =& d(cT(\alpha) + T(\beta)) \\ =& cdT(\alpha) + \alpha T(\beta) \\ =& c(dT(\alpha)) + (dT)(\beta) \end{aligned}$$

□

Bemerkung: $0 \in L(V,W)$ und damit $L(V,W) \neq \emptyset$. Also $L(V,W) \underset{\text{U.R.}}{\subseteq} \text{Fkt}(V,W)$.
Insbesondere ist $L(V,W)$ ein K-Vektorraum.

Satz 2: Sei V ein n-dimensionaler und W ein m-dimensionaler K-Vektorraum, dann gilt:

$$\dim L(V,W) = mn$$

Beweis: $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ und $\mathcal{B}' = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ geordnete Basen für V und W
Für jedes (p,q) für $1 \leq p \leq m,\ 1 \leq q \leq n$ definiere die lineare Abbildung $E^{p,q}$:

$$E^{p,q} : V \longrightarrow W \text{ definiere für } j = 1, \ldots, n :$$
$$E^{p,q} := \begin{cases} 0 & j \neq q \\ \beta_p & j = q \end{cases} = \delta_{jq}\beta_p$$

Behauptung: $\{E^{p,q} \,|\, 1 \leq p \leq m,\ 1 \leq q \leq m\}$ bilden eine Basis für L.

Beweis: Sei $T : V \longrightarrow W$, für $1 \leq j \leq m$ schreibe $T(\alpha_j) = \sum\limits_{p=1}^{m} A_{pj}\beta_p$ in $\mathcal{B}'$ für $A_{pj} \in K$. Außerdem gilt $T = \sum\limits_{p=1}^{m}\sum\limits_{q=1}^{n} A_{pq}E^{p,q} =: U$, weil:

$$\begin{aligned} U(\alpha_j) &= \left(\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} A_{pq}E^{p,q}\right)(\alpha_j) \\ &= \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} A_{pq}\delta_{jq}\beta_p \\ &= \sum_{p=1}^{m} A_{pj}\beta_p \\ &= T(\alpha_j). \end{aligned}$$

Also $U(\alpha) = T(\alpha),\ \forall \alpha \in V$ und damit $U = V$.
Also $\{E^{p,q} \,|\, 1 \leq p \leq m,\ 1 \leq q \leq n\}$ erzeugen L.
Linear unabhängig?
Sei $U = \sum\limits_{p=1}^{m}\sum\limits_{q=1}^{n} A_{pq}E^{p,q} = 0$ für $A_{pq} \in K$.
Also für $\alpha_j,\ j = 1, \ldots, n$ gilt:

$$U(\alpha_j) = 0, \text{ d.h. } \sum_{p=1}^{m} A_{pj}\beta_p = 0$$

Da $\{\beta_p \,|\, 1 \leq p \leq m\}$ linear unabhängig ist, folgt: $A_{pj} = 0$ für alle $p = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$.

□

Satz 3: Seien V, W, Z K-Vektorräume, $T \in L(V,W)$, $U \in L(W,Z)$ lineare Abbildungen. Es gilt:

$$V \xrightarrow{U \circ T} Z \text{ ist wieder linear.}$$

Beweis:
$$\begin{aligned}(U \circ T)(c\alpha + \beta) &= U(T(c\alpha + \beta)) \\ &= U(cT(\alpha) + T(\beta)) \\ &= cU(T(\alpha)) + U(T(\beta)) \\ &= c(U \circ T)(\alpha) + (U \circ T)(\beta)\end{aligned}$$

□

Sonderfall: $V = W = Z$. Also hat $L(V,V)$ eine Vektormultipikation $UT := U \circ T$.

Bezeichnung: Schreibe
$$\begin{aligned} T^0 &:= \mathrm{I} && \text{Identitätsabbildung} \\ T^2 &:= T \circ T \\ &\;\vdots \\ T^n &:= \underbrace{T \circ \ldots \circ T}_{n \text{ mal}} \end{aligned}$$

Definition 1: Sei K ein Körper. Eine lineare Algebra L über K ist ein K-Vektorraum versehen mit Vektormultiplikation, sodass

(a) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma \qquad \forall \alpha, \beta, \gamma \in L$

(b) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$
$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma \qquad \forall \alpha, \beta, \gamma \in L$

(c) $c(\alpha\beta) = (c\alpha)\beta = \alpha(c\beta) \quad \forall c \in K, \ \forall \alpha, \beta \in L$
Falls ein $\mathrm{I} \in L$ existiert mit

(d) $\mathrm{I}\alpha = \alpha\mathrm{I} = \alpha \qquad \forall \alpha \in L$
heißt L eine lineare Algebra mit Einheit.
Falls

(e) $\alpha\beta = \beta\alpha \qquad \forall \alpha, \beta \in L$
heißt L kommutativ.

Lemma 1: $L(V,V)$ ist eine K-lineare Algebra mit Einheit, d.h. es gelten:

(a) $\mathrm{I} \circ U = U \circ \mathrm{I} = U \qquad \forall U \in L(V,V)$

(b) $U(T_1 + T_2) = UT_1 + UT_2$
$(T_1 + T_2)U = T_1U + T_2U \qquad \forall U, T_1, T_2 \in L(V,V)$

(c) $c(UT_1) = (cU)T_1 = U(cT_1) \qquad \forall U, T_1 \in L(V,V),\ \forall c \in V$

Beweis:

(a) ✓

(b)
$$\begin{aligned} U(T_1+T_2)(\alpha) &= U((T_1+T_2)(\alpha)) \\ &= U(T_1(\alpha)+T_2(\alpha)) \\ &) U(T_1(\alpha)) + U(T_2(\alpha)) \\ &= (UT_1)(\alpha) + (UT_2)(\alpha) \end{aligned}$$

Außerdem:
$$\begin{aligned} ((T_1+T_2)U)(\alpha) &= (T_1+T_2)(U(\alpha)) \\ &= T_1(U(\alpha)) + T_2(U(\alpha)) \\ &= (T_1U + T_2U)(\alpha) \end{aligned}$$

(c) analog.

□

Definition 2: Sei $T : V \longrightarrow W$ eine Abbildung. T ist invertierbar, wenn es eine Abbildung U gibt mit

$$U : W \longrightarrow V \text{ und}$$
$$U \circ T = \mathrm{Id}_V \text{ und } T \circ U = \mathrm{Id}_W$$

(Wobei Id_V die Identitätsabbildung bezeichnet, $\mathrm{Id}_V(x) = x,\ \forall x \in V$)

Lemma 2: T invertierbar $\Leftrightarrow$ T ist bijektiv.

Beweis:

„$\Rightarrow$“: (1) $T(x_1) = T(x_1) \Rightarrow x_1 = (U \circ T)(x_1) = U(T(x_1)) = U(T(x_2))$
$= (U \circ T)(x_2) = x_2$ injektiv ✓

(2) $(T \circ U)(y) = y$, also $y = T(U(y))$, $\forall y \in W$ injektiv ✓

„$\Leftarrow$“: T bijektiv $\Leftrightarrow$ $\forall y \in W \exists!\, x \in V$ mit $T(x) = y$. Setze $U(y) := x$, also $U : W \longrightarrow V$ wird eindeutig definiert durch

$$U(y) = x \Leftrightarrow T(x) = y$$

Berechne: $U(T(x)) = ?$:
Setze $y := T(x)$, also $U(T(x)) = x$. Analog $T(U(y)) = y$,
also $U \circ T = \mathrm{Id}_V$ und $T \circ U = \mathrm{Id}_W$

□

Bezeichnung: T invertierbar $\Rightarrow$ U ist eindeutig definiert. Schreibe $U := T^{-1}$. Also

$$T^{-1}(y) = 0 \Leftrightarrow y = T(x)$$

Satz 4: T linear und invertierbar $\Rightarrow$ T^{-1} linear und invertierbar.

Beweis: $T^{-1}(\underbrace{c\beta_1 + \beta_2}_{=:Y}) \stackrel{?}{=} \underbrace{cT^{-1}(\beta_1) + T^{-1}(\beta_2)}_{=:X}$

$$T^{-1}(Y) = X \Leftrightarrow T(X) = Y$$

Also berechne:

$$T(X) = T(cT^{-1}(\beta_1) + T^{-1}(\beta_2)) = cT(T^{-1}(\beta_1)) + T(T^{-1}(\beta_2)) = c\beta_1 + \beta_2$$

□

Satz 5: Es seien: $V \xrightarrow{G} W \xrightarrow{L}$, G, L invertierbare Abbildungen. Dann ist:

$L \circ G : V \longrightarrow Z$ invertierbar und
$(L \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ L^{-1}$.

Beweis: $(G^{-1} \circ L^{-1}) \circ (L \circ G) = G^{-1} \circ (L^{-1} \circ L) \circ G = G^{-1} \circ \mathrm{I} \circ G = G^{-1} \circ G = \mathrm{I}$
Andere: Analog.

□

Definition und Bezeichnung: $\mathrm{GL}_K(V) := \{T \mid T : V \longrightarrow V$ invertierbare lineare Abbildung$\}$

Bemerkung: Wir haben grade gezeigt, dass $\mathrm{GL}_K(V)$ mit der Verknüpfung $\circ$ eine Gruppe ist. $\mathrm{GL}_K(V)$ ist die ă (general linear group).

Definition 3: T ist singulär falls $\ker(T) \neq \{0\}$. Sonst heißt T regulär oder nicht singulär. Also T regulär bedeutet: $T(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$.

Satz 6: $T : V \longrightarrow W$ ist regulär $\Leftrightarrow$ T bildet eine linear unabhängige Teilmenge von V auf eine linear unabhängige Teilmenge von W ab.

Beweis:

„$\Rightarrow$“: Sei $\ker(T) = \{0\}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ linear unabhängig in V.
Z.z.: $T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_k)$ linear unabhängig.
Sei $c_1 T(\alpha_1) + \ldots + c_k T(\alpha_k) = 0$, also $T(c_1\alpha_1 + \ldots + c_k\alpha_k) = 0$ und damit: $c_1\alpha_1 + \ldots + c_k\alpha_k \in \ker(T)$, also $c_1\alpha_1 + \ldots + c_k$ $a_k = 0$ und da $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ linear unabhängig, folgt:
$c_1 = \ldots = c_k = 0$.

$\square$

Korollar 1: Sei $\dim V = \dim W = d$, $T : V \longrightarrow W$ lineare Abbildung. Es gilt:

$$T \text{ ist injektiv} \Leftrightarrow T \text{ ist surjektiv.}$$

Beweis: Wir wenden den Dimensionssatz (Satz 2 (§1)) an:
$d = \mathrm{rang}(T) + \dim\ker(T)$. Also:

$$\begin{aligned} T \text{ injektiv } &\Leftrightarrow \ker(T) = \{0\} \\ &\Leftrightarrow \dim\ker(T) = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{rang}(T) = d \\ &\Leftrightarrow \dim R_T = d \\ &\Leftrightarrow R_T = W \\ &\Leftrightarrow T \text{ surjektiv.} \end{aligned}$$

$\square$

§3. Matrixdarstellung von linearen Abbildungen

Ansatz: Seien V, W K-Vektorräume mit $\dim V = n$, $\dim W = m$,
$T : V \longrightarrow W$ lineare Abbildung
$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ geordnete Basis für V und
$\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$ geordnete Basis für W.

Definition 1: T ist eindeutig bestimmt durch $T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_n) \in W$. Schreibe:

$$[T(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} := \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix} \text{ für } j = 1, \dots, n$$

und setze:

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} := \left(\begin{array}{c|c|c} [T(\alpha_1)]_{\mathcal{B}'} & \dots & [T(\alpha_n)]_{\mathcal{B}'} \end{array} \right)$$

Diese $m \times n$-Matrix heißt Matrixdarstellung von T bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$

Welche Eigenschaften hat $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$?

Satz 1: Es gilt für $\alpha \in V$:

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}[\alpha]_{\mathcal{B}}$$

Beweis: Setze $A := [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = [A_{ij}]_{\substack{1 \le i \le m, \\ 1 \le j \le n}}$, $[\alpha]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Nun ist $[T(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix}$, also ist $T(\alpha_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} A_{ij}\alpha'_i$.

Berechne nun:

$$\begin{aligned} T(\alpha) =& T\left(\sum_{i=1}^{n} x_j\alpha_j\right) \\ =& \sum_{j=1}^{n} x_j T(\alpha_j) \\ =& \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\alpha'_j \\ =& \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j\right)\alpha'_j \end{aligned}$$

Es folgt:

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} A_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} A_{mj}x_j \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{wie behauptet.}$$

□

Bemerkung: $(\star)$ bestimmt die Matrix $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ eindeutig!

Beispiel: Sei A eine $m \times n$-Matrix. Wir haben 2 lineare Abbildungen dazu assoziiert:

(1) $T : K^{n\times 1} \longrightarrow K^{m\times 1}$

$T(x) := Ax$

und

(2) $U : K^{m} \longrightarrow K^{n}$

$U(\alpha) := \alpha A$

(1) Seien $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}'$ die Standard-Basen für $K^{n\times 1}$ und $K^{m\times 1}$.
Wir berechnen $[T]_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}$:
Setze $\mathcal{E} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$ und $\mathcal{E}' = \{\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_m\}$.
Dafür berechne $[T(\varepsilon_j)]_{\mathcal{B}'}$. Nun ist:

$$T(\varepsilon_j) = A\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = j^{\text{te}} \text{ Spalte von } A = \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\varepsilon'_i.$$

Also $[T(\varepsilon_j)]_{\mathcal{E}'} = j^{\text{te}}$ Spate von A insbesondere ist $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = A$.

(2) Siehe Ü.B.

Satz 2: Die Abbildung

$$\begin{aligned} \rho : (V,W) &\longrightarrow K^{m\times n} \\ T &\longmapsto [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \end{aligned}$$

ist eine Isomorphie von K-Vektorräumen.

Beweis: ρ linear? Berechne:

$$\rho(cT_1+T_2) = [cT_1+T_2]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \left(\begin{array}{c|c|c} [(cT_1+T_2)(\alpha_1)]_{\mathcal{B}'} & \dots & [(cT_1+T_2)(\alpha_n)]_{\mathcal{B}'} \end{array} \right) =?$$

Nun ist:

$$\underbrace{[(cT_1+T_2)(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'}}_{j^{\text{te}}\text{Spalte von } \rho(cT_1+T_2)} = [cT_1(\alpha_j)+T_2(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} = c \underbrace{[T_1(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'}}_{j^{\text{te}}\text{Spalte von } \rho(T_1)} + \underbrace{[T_1(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'}]}_{j^{\text{te}}\text{Spalte von } \rho(T_2)}$$

Also ist die j^{te}Spalte von $\rho(cT_1+T_2)$ gleich die j^{te}Spalte von $\rho(T_2)$ plus c mal die j^{te}Spalte von $\rho(T_1)$. Also $\rho(cT_1+T_2) = c\rho(T_1)+\rho(T_2)$.

ρ injektiv?

Sei $T \in L(V,W)$ mit $\rho(T) = 0_{m\times n}$. Dann ist $[T(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\forall j = 1,\dots,n$.

Aber dann ist $T(\alpha_j) = 0\ \forall j = 1,\dots,n$. Also ist T die Nullabbildung.

ρ surjektiv?
Folgt nun, weil $mn = \dim L(V,W) = \dim K^{m\times n}$. (siehe Ü.B.)

□

Wir betrachten den Sonderfall: $T :\longrightarrow V$ linearer Operator und $\mathcal{B}?\mathcal{B}'$.

Definition und Bezeichnung: Schreibe $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} := [T]_{\mathcal{B}}$ die Matrixdarstellung des Operators T in der Basis $\mathcal{B}$. Hier gilt also die folgende Version von $(\star)$:

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\alpha]_{\mathcal{B}}$$

Nun betrachten wie die Matrixdarstellung von Hintereinaderausführungen:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "U \circ T"'] & W \arrow[r, "U"] & Z \end{tikzcd}$$

Ansatz: V, W, Z endlich-dimensionale K-Vektorräume und T, U lineare Abbildungen. $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ Basis für V, $\mathcal{B}' = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ für W,$\mathcal{B}'' = \{\gamma_1, \dots, \gamma_p\}$ für Z. Setze $A := [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}, B := [U]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}, C := [U \circ T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} =?$

Satz 3:
$$[U \circ T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = [U]_{\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{B}}$$

Beweis: $[T(\alpha]_{\mathcal{B}'} \overset{(\star)}{=} A[\alpha]_{\mathcal{B}}$ und $[U(T(\alpha))]_{\mathcal{B}''} \overset{(\star)}{=} B[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'}$
Also $[(U \circ T)(\alpha)]_{\mathcal{B}''} = BA[\alpha]_{\mathcal{B}}$. Also erfüllt die Matrix BA $(\star)$ bezüglich $U \circ T$.
Die Eindeutigkeit impliziert nun unsere Behauptung.

□

Korollar 1:
$$\begin{aligned} \rho \,:\, L(V,V) &\longrightarrow K^{n\times n} \\ \rho(T) &:= [T]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$
ist ein K-Algebren Isomorphismus.

Beweis: ρ ist ein K-Vektorraum Isomorphismus. Ferner gilt: $\rho(T_1 \circ T_2) = \rho(T_1)\rho(T_2)$.

□

Korollar 2: $T \,:\, V \longrightarrow V$. Es gilt:
$$T \text{ ist invertierbar gdw. } [T]_{\mathcal{B}} \text{ invertierbar}$$
In diesem Fall gilt ferner: $[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{-1}$.

Beweis:
$$\begin{aligned} T \text{ invertierbar } &\Leftrightarrow \exists T^{-1} \text{ mit } T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = \mathrm{Id} \\ &\Leftrightarrow [T \circ T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T^{-1} \circ T]_{\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}} \\ &\Leftrightarrow [T]_{\mathcal{B}}[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} = \mathrm{Id}_n \\ &\Leftrightarrow [T]_{\mathcal{B}}^{-1} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

□

Ansatz: V endlich-dimensional
$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ und $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$ geordnete Basen für V
$T \in L(V, V)$.

Fragestellung: Was ist die Beziehung zwischen $[T]_{\mathcal{B}}$ und $[T]_{\mathcal{B}'}$?
Nun: Satz 2 (§3) liefert eine invertierbare Matrix $\underline{P}$, sodass für alle $\underline{\underline{\alpha \in V}}$ gilt:

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = \underline{P}[\alpha]_{\mathcal{B}'} \qquad (\star\star)$$

Und Satz 1 (§3) liefert eine eindeutige Matrix, sodass

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\alpha]_{\mathcal{B}} \qquad (\star)$$

Nun gilt $(\star\star)$ für $T(\alpha) \in V$:

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}} = \underline{P}[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} \qquad (\star\star\star)$$

$(\star), (\star\star)$ und $(\star\star\star)$ liefert:

$$[T]_{\mathcal{B}}\underline{P}[\alpha]_{\mathcal{B}'} = \underline{P}[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'}$$

oder

$$\underbrace{(\underline{P}^{-1}[T]_{\mathcal{B}}\underline{P})}_{\nearrow}[\alpha]_{\mathcal{B}'} = [T(\alpha)]_{\mathcal{B}'}$$

Also erfüllt diese die bestimmende matrizielle Gleichung $(\star)$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}'$.
Die Eindeutigkeit von $[T]_{\mathcal{B}'}$ für die Erfüllung von $(\star)$ liefert nun:

$$\boxed{[T]_{\mathcal{B}'} = \underline{P}^{-1}[T]_{\mathcal{B}}\underline{P}}$$

wobei

$$\underline{P} = \left(\begin{array}{c|c|c} [\alpha'_1]_{\mathcal{B}} & \dots & [\alpha'_n]_{\mathcal{B}} \end{array} \right)$$

Bemerkung: Betrachte die Abbildung $\pi : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung, eindeutig definiert durch die Angaben $\pi(\alpha_j) := \alpha'_j \ \forall j = 1, \dots, n$. Dieser Operator ist invertierbar, da er eine Basis auf eine Basis abbildet (Korollar 1 (§2)). Somit ist die Matrixdarstellung von $[\pi]_{\mathcal{B}}$ invertierbar. Es ist:

$$[\pi]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c|c} [\pi(\alpha_1)]_{\mathcal{B}} & \dots & [\pi(\alpha_n)]_{\mathcal{B}} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c} [\alpha'_1]_{\mathcal{B}} & \dots & [\alpha'_n]_{\mathcal{B}} \end{array} \right) = \underline{P}$$

$\underline{P}$ heißt deshalb „Matrix des Basiswechsels“

Wir haben beweisen:

Satz 4: (Ansatz wie oben)

$$[T]_{\mathcal{B}'} = [\pi]_{\mathcal{B}}^{-1}[T]_{\mathbb{B}}[\pi]_{\mathcal{B}}$$

oder

$$[T]_{\mathcal{B}'} = \underline{P}^{-1}[T]_{\mathcal{B}}\underline{P}$$

Definition 2: Seien $A, B \in K^{n\times n}$. Wir sagen B ist zu A ähnich, falls es eine invertierbare Matrix $\underline{P} \in K^{n\times n}$ gibt, sodass

$$B = \underline{P}^{-1}A\underline{P}$$

Wir haben in Satz 4 (§3) bewiesen:
Sind $B = [T]_{\mathcal{B}'}$ und $A = [T]_{\mathcal{B}}$ die Darstellungsmatrizen des Operators T bezüglich der Basen $\mathcal{B}'$ beziehungsweise $\mathcal{B}$, dann ist B zu A ähnlich.
Eigentlich gilt auch die Umkehrung!

Satz 5: B ist ähnlich zu A gdw. B und A denselben linearen Operator (bezüglich geeigneter Basen) darstellen.

Beweis:

„$\Leftarrow$“: Bereits gemacht.
Sei nun $\mathcal{B}$ eine beliebige Basis.

„$\Rightarrow$“: Sei T der eindeutig definierte Operator durch

$$[T]_{\mathcal{B}} = A, \text{ d.h. } [T(\alpha)]_{\mathcal{B}} \qquad (\star)$$

Sei $\mathcal{B}'$ die Basis erhalten durch $\underline{P}$, d.h wofür

$$\underline{P} = \left(\begin{array}{c|c|c} [\alpha_1']_{\mathcal{B}} & \dots & [\alpha_n']_{\mathcal{B}} \end{array} \right) \text{ \underline{\underline{sein sollte}}.}$$

Diese Angabe bestimmt also, dass

$$[\alpha_j']_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} P_{1j} \\ \vdots \\ P_{nj} \end{pmatrix}, \text{ d.h. } \alpha_j' := \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_i.$$

Es gilt $[T]_{\mathcal{B}'})B$ Ü.A. (siehe Ü.B.)

$\square$

Exkurs: Definition: Sei eine Relation $R \subseteq S \times S$.. Schreibe $xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$.
R heißt Äquivalenzrelation, falls:

(1) $xRx \; \forall x \in S$ (Reflexivität)

(2) $xRy \Rightarrow yRx \; \forall x, y \in S$ (Symmetrie)

(3) $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz \; \forall x, y, z \in S$ (Transitivität)

Beispiel: B ähnlich A ist eine Äquivalenzrelation auf $K^{n\times n}$:

(1) $B = \mathrm{I}_n^{-1} B \mathrm{I}_n$

(2) $B = P^{-1}AP \Rightarrow APBP^{-1} = (P^{-1})^{-1} = B\,(P^{-1})$.
Setze $Q := P^{-1}$, also $A = Q^{-1}BQ$

(3) $\left.\begin{array}{l} B = P^{-1}AP \\ C = Q^{-1}BQ \end{array}\right\} \Rightarrow C = (PQ)^{-1}A(PQ)$

§4. Lineare Funktionale

Bemerkung 1: $W = K^1$ ist ein K-Vektorraum mit $\dim W = 1$. Standardbasis ist $\{1\}$.
$W' \subseteq W$ Unterraum$\Rightarrow W' = \{0\}$ oder $W' = W$, also $\dim W' = 0$ oder $\dim W' = 1$ und $\dim W' = 1$ gdw. $\dim W' \neq \{0\}$.

Definition 1:	$f \in L(V, K)$ heißt lineares Funktional.

Beispiel 1: $V = K^n$, $\mathcal{E}$ Standardbasis. Sei $(a_1, \ldots, a_n) \in V$ fixiert. Definiere $f : V \longrightarrow K$ durch

$$f(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \qquad (\star)$$

Es gilt: $f \in L(V, K)$ und $[f]_{\mathcal{E},\{1\}} = [a_1, \ldots, a_m]$.
Umgekehrt sei $f \in L(V, K)$. Setze $a_j := f(\varepsilon_j)$, dann erfüllt f $(\star)$ für $(a_1, \ldots, a_n)$.

Allgemeiner sei $\sim V = n$ und $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ geordnete Basis. Sei $(a_1, \ldots, a_n) \in K^n$ fixiert. Definiere $f : V \longrightarrow K$ durch

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \qquad (\star)$$

Dann ist $f \in L(V,K)$ und

$$[f]_{\mathcal{B},\{1\}} = \left(\begin{array}{c|c|c} [f(\alpha_1)]_{\{1\}} & \dots & [f(\alpha_n)]_{\{1\}} \end{array} \right)$$
$$= \left(\begin{array}{c|c|c} [a_1]_{\{1\}} & \dots & [a_n]_{\{1\}} \end{array} \right)$$
$$= [a_1 \dots a_n]$$

Und umgekehrt: $f \in (V,K)$. Setze$a_i = f(\alpha_i)$, dann ist$f$ wie in $(\star)$.

Beispiel 2: $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ Intervall. $V = C([a,b]) := \{g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$. Setze:

$$f(g) := \int_a^b g(t)\mathrm{d}t \text{ für } g \in V$$

Definition und Notation: $V^\star = L(V,K)$ heißt der Dualraum.

Sei nun $\dim V = n$.

Bemerkung 2: $\dim V^\star = \dim L(V,K) = n = \dim V$.

Wir werden nun jeder Basis $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ für V eine Basis $\mathcal{B}^\star$ von $V^\star$ zuordnen. Satz 1 (§1) liefert für $i = 1, \dots, n$ ein eindeutig definiertes Funktional f_i mit $f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$.

Behauptung: $\{f_1, \dots, f_n\}$ ist eine Basis für $V^\star$.

Es genügt zu zeigen, dass sie linear unabhängig sind.

Beweis: Für $f = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i f_i$, $(c_i \in K)$ gilt für alle $j = 1, \dots, n$:

$$f(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(\alpha_j) = c_j \qquad (\star\star)$$

Insbesondere ist $f = 0$, dann gilt $f(\alpha_j) = 0 \;\forall j = 1, \dots, n$,
d.h. $c_j = 0 \;\forall j = 1, \dots, n$

$\square$

Definition 2: $\mathcal{B}^\star = \{f_1, \dots, f_n\}$ heißt Dualbasis zu $\mathcal{B}$.

Satz 1: Sei $\dim V = n$, $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ Basis für V.
Es existiert eine eindeutige (Dual)Basis $\mathcal{B}^\star$ für $V^\star$, mit $\mathcal{B}\star = \{f_1, \ldots, f_n\}$

$$f_i(\alpha_j) = \delta_{ij} \qquad (1)$$

und $\forall f \in V^\star$:

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_j) f_i \qquad (2)$$

und $\forall \alpha \in V$:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} f_i(\alpha)\alpha_j \qquad (3)$$

d.h.:

$$[f]_{\mathcal{B}^\star} = \begin{pmatrix} f(\alpha_1) \\ \vdots \\ f(\alpha_n) \end{pmatrix} \text{ und } [\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} f_1(\alpha) \\ \vdots \\ f_n(\alpha) \end{pmatrix} \quad \forall f \in V^\star \text{ und } \forall \alpha \in V.$$

Beweis:

(1) ✓

(2) $f \in V^\star \Rightarrow f = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i$ und ($\star\star$) liefert:

$$c_j = f(\alpha_j) \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

(3) Analog: $\alpha = \sum_{j=1}^{n} x_i \alpha_i \Rightarrow f_j(\alpha) = f_j\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i\right) = x_j$.

□

Bemerkung 3: (3) beschreibt f_i also die „i^{te} Koordinatenfaktoren bezüglich der Basis $\mathcal{B}$“

$$\begin{aligned} f_i : V &\longrightarrow K \\ \alpha &\longmapsto \text{die } i^{\text{te}} \text{ Koordinate in } [\alpha]_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Bemerkung 4: $f \in V^\star$, $f \neq 0$, $\mathrm{Im}(f) \subseteq K$ Unterraum, $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$,
also (Bemerkung 1) ist $\mathrm{Im}(f) = K \Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f) = R_T = 1$.
Dimensionssatz (Satz 2 (§1)) impliziert nun:
$\dim\ker(f) + 1 = n \Rightarrow \dim\ker(f) = n - 1$ (wobei $n := \dim V$)

Definition 3: Sei $\dim V = n$ und $W \subseteq V$ Unterraum mit $\dim W = n-1$,
dann heißt W Hyperraum (oder Hyperebene, oder Unterraum der Kodimension 1.)

Bemerkung 4 besagt: $f \in V^\star$, $f \neq 0 \Rightarrow \ker(f) \subseteq V$ ist ein Hyperraum.
Wir werden die Umkehrung (und mehr) zeigen.

Definition 4: Sei V ein K-Vektorraum, $S \subseteq V$.
Der Annihilator von S ist bezeichnet mit S° und definiert als:

$$S^\circ := \{f \in V^\star \,|\, S \subseteq \ker(f)\} = \{f \in V^\star \,|\, f(\alpha) = 0 \;\forall \alpha \in S\}$$

Bemerkungen:

(i) $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow S_2^\circ \subseteq S_1^\circ$ Klar.

(ii) $S^\circ = (\mathrm{span}(S))^\circ$ Klar.

(iii) $S^\circ \subseteq V^\star$ ist immer ein Unterraum. Klar.

(iv) $S = \{0\} \Leftrightarrow S^\circ = V^\star$

(v) $S = \{0\} \Rightarrow S^\circ = \{0\}$ Klar.

(vi) Also $\mathrm{span}(S) = V \Leftrightarrow S^\circ = \{0\}$.

Beweis zu (iv):

„$\Rightarrow$“: ist klar.

„$\Leftarrow$“: Sei $S^\circ = V^\star$. Z.z.: $S = \{0\}$
Zum Widerspruch sei $\alpha \neq 0$, $\alpha \in S$.
$\{\alpha\}$ linear unabhängig $\Rightarrow$ ergänze zu einer Basis für V:
$\mathcal{B} = \{\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ sei $\mathcal{B}^\star$ Dualbasis $\mathcal{B}^\star = \{f_1, \ldots, f_n\}$.
Es gilt also $f(\alpha_1) = 1$, also $f_1 \notin S^\circ$ ↯

$\square$

Beweis zu (vi)

„$\Rightarrow$“: schon gezeigt.

„$\Leftarrow$“: Sei $S^\circ = \{0\}$. Z.z. $\mathrm{span}(S) = V$.
Zum Widerspruch setze $W := \mathrm{span}(S)$ und sei $\alpha \in V \backslash W$,
$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subseteq W$ Basis für W. Dann ist $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha\}$ l.u.
Ergänze zu einer Basis für V:

$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha = \alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n\}$.
$\{f_1, \ldots, f_k, f_{k+1}, f_{k+2}, \ldots, f_n\} = \mathcal{B}^\star$ Dualbasis.
Es gilt: $f_{k+1}(\alpha_j) = 0,\ f_{k+1}(\alpha_{k+1}) = 1,\ \forall j = 1, \ldots, k$.
Also $f_{k+1} \not\equiv 0$ und $f_{k+1} \in S^\circ$ ↯

□

Korollar 1: (Trennungseigenschaft)
Sei $W \subseteq V$ Unterraum und $\alpha \notin W$. Es existiert $f \in V^\star$ mit

$$f(W) = \{0\} \text{ und } f(\alpha) \neq 0$$

Beweis: Sei $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ eine Basis für W.
Nun $\alpha \notin \operatorname{span}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \Rightarrow \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha\}$ linear unabhängig.
Ergänze zu Basis für V: $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha = \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n\}$ und sei
$\mathcal{B}^\star = \{f_1, \ldots, f_k, f_{k+1}, \ldots, f_n\}$ Dualbasis. Setze $f := f_{k+1}$

□

Satz 2: (Dimensionsformel für Annihilatoren)
Sei V endlich-dimesnionaler K-Vektorraum, $W \subseteq V$ Unterraum. Es gilt:

$$\dim W + \dim W^\circ = \dim V$$

Beweis: Sei $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ Basis für W. Ergänze zu einer Basis für V:
$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n\}$. Sei $\mathcal{B}^\star = \{f_1, \ldots, f_n\}$ Dualbasis.

Behauptung: $\{f_{k+a}, \ldots, f_n\}$ ist eine Basis für $W^\star$.

Beweis: Es ist klar, dass $f_j \in W^\circ$ für $i \geq k+1$,
weil $f_i(\alpha_j) = \delta_{ij} = 0$ falls $i \geq k+1$ und $j \leq k$.
Also $\alpha \in W \Rightarrow \alpha$ Linearkombination von $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$
$\Rightarrow f_i(\alpha) = 0\ \forall i \geq k+q$. Also $f_i \in W^\circ$ für $i \geq k+1$, wie behauptet.

□

Nun sind $\{f_{k+1}, \ldots, f_n\}$ sind linear unabhängig als Teil einer Basis
und damit genügt es zu zeigen: $\operatorname{span}\{f_{k+1}, \ldots, f_n\} = W^\circ$.
Sei $f \in V^\star$. Es gilt $f = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\alpha_i)$ (allgemein).

Ist aber $f \in W^\circ$, dann $f(\alpha_i) = 0$ für $i \leq k$.
Also:

$$f = \sum_{i=k+1}^{n} f(\alpha_i) f_i$$

$\square$

Korollar 2: Sei $\dim W = k$, $\dim V = n$, $W \subseteq V$ Unterraum. Es gilt:

W ist der Durchschnitt von $(n-k)$ Hyperebenen von V.

Beweis: In der Notation des obigen Beweises:

$$W = \bigcap_{i=k+1}^{n} \ker(f_i)$$

$\square$

Bemerkung: Ist W Hyperebene, $\dim W = n-1$, also ist $W = \ker(f_n)$.

Korollar 3: W_1, W_2 Unterräume von V. Es gilt:

$$W_1^\circ = W_2^\circ \Rightarrow W_1 = W_2$$

Beweis: Zum Widerspruch sei $W_1 \neq W_2$, $\alpha \in W_2$, $\alpha \notin W_1$ Korollar 1$\Rightarrow$ $\exists f \in V^\star$ mit $f(W_1) = \{0\}$ und $f(\alpha) \neq 0$.
Also $f \in W_1^\circ$, aber $f \notin W_2^\circ$ ↯ $\square$

Beobachtung: Beziehung zu homogenen Gleichungssystemen

Sei $(\star)$ $\left\{\begin{array}{cccc} A_{11}x_1 + & \dots & +A_{1n}x_n & = 0 \\ & \vdots & & \\ A_{m1}x_1 + & \dots & +A_{mn}x_n & = 0 \end{array}\right\}$ homogenes Gleichungssystem mit Koeffizienten im Körper K.

Definiere für $i = 1, \dots, m$ ein Funktional auf K^n:

$$f(x_1, \dots, x_n) := \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$$

Es gilt:

$$\text{Lösungsraum von } (\star) = \bigcap_{i=1}^{m} \ker(f_i)$$

(folgt unmittelbar aus den Definitionen).
Wir werden diese einfache Beobachtung nutzen, um Annihilatoren zu berechnen.

Beispiel 1: $V = \mathbb{R}^5$, $W = \operatorname{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ wobei:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (2, -1, 3, 4, -1) \\ \alpha_2 &= (-1, 1, 2, 5, 2) \\ \alpha_3 &= (0, 0, -1, -2, 3) \\ \alpha_4 &= (1, -1, 2, 3, 0) \end{aligned}$$

Finde W°.
Sei $f \in V^\star$. Es gilt $f(x_1, \ldots, x_5) = \sum_{j=1}^{5} c_j x_j$ allgemein.

Insbesondere:

$$\begin{aligned} f \in S^\circ &\Leftrightarrow f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = f(\alpha_3) = f(\alpha_4) = 0 \text{ (LGS in } c_1, \ldots, c_5) \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{5} A_{ij} c_j = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq 4 \end{aligned}$$

Wobei A_{ij} die Koeffizienten der Koeffizientenmatrix A
des homogenen Gleichungssystems, d.h.:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{r.Z.S.F.}} R = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{array} \end{array}$$

c_1, c_3, c_5 Hauptvariablen, c_2, c_4 freie Variablen.
Wie üblich finden wir den Lösungsraum für

$$\sum_{j=1}^{5} R_{ij} c_j = 0, \ 1 \leq i \leq 3$$

d.h.:

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 \quad - c_4 \quad &= 0 \\ c_3 + 2c_4 \quad &= 0 \\ c_5 &= 0 \end{aligned}$$

Setze $c_2 = a, c_4 = b \in \mathbb{R}$ beliebig, dann sind $c_1 = a + b$, $c_3 = -2b$, $c_5 = 0$ und:

$$W^\circ = \{f \mid f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (a+b)x_1 + ax_2 - 2bx_3 + bx_4,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

Basis für W° erhält man z.B. durch Einsetzen:

$$\left.\begin{array}{l} a = 1,\ b = 0 \text{ und} \\ a = 0,\ b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 + x_2 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 - 2x_3 + x_4 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{ist Basis} \\ \text{für } W^\circ \end{array}$$

§5. Bidual

Sei V endlich-dimensionaler K-Vektorraum.
Zwei Fragen haben wir noch nicht beantwortet:

(i) $\begin{array}{l} V \longrightarrow V^\star \\ \mathcal{B} \longmapsto \mathcal{B}^\star \end{array}$ Umkehrung? Sei $\mathbb{B}$ Basis für $V^\star$, $\exists \mathcal{B}$ Basis für V, sodass $\mathbb{B} = \mathcal{B}^\star$?

(ii) $\begin{array}{l} V \longrightarrow V^\star \\ W \longmapsto W^\circ \end{array}$ Umkehrung? Sei U ein Unterraum von $V^\star$, $\exists \mathcal{B}$ Unterraum von V, sodass $U = W^\circ$?

Bemerkung: Wir betrachten $(V^\star)^\star := V^{\star\star}$ und $\dim(V^{\star\star}) = \dim V = \dim V^\star$.
Der Dualraum $V^{\star\star}$ zu $V^\star$ heißt der Bidualraum zu V.

Proposition 1: Sei $\alpha \in V$. α induziert kanonisch ein Funktional $L_\alpha \in V^{\star\star}$ wie folgt:

$$\begin{array}{ll} L_\alpha : V^\star \longrightarrow K & \text{definiert durch:} \\ L_\alpha(f) := f(\alpha) & \text{für } f \in V^\star \end{array}$$

Beweis: $L - \alpha(cf + g) = (cf + g)(\alpha) = cf(\alpha) + g(\alpha) = cL_\alpha(f) + L_\alpha(g)$

□

Satz 1: Die Abbildung

$$\begin{array}{l} \lambda : V \longrightarrow V^{\star\star} \\ \qquad \alpha \longmapsto L_\alpha \end{array}$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis: $\lambda(c\alpha+\beta)\stackrel{?}{=}c\lambda(\alpha)+\lambda(\beta)$.
Z.z. ist also: $[\lambda(c\alpha+\beta)](f)=[c\lambda(\alpha)+\lambda(\beta)](f)\ \forall f\in V^\star$
Wir berechnen:

$$\begin{aligned}[\lambda(c\alpha+\beta)](f) =&L_{c\alpha+\beta}(f)\\ =&f(c\alpha+\beta)\\ =&cf(\alpha)+f(\beta)\\ =&cL_\alpha(f)+L_\beta(f)\\ =&c\lambda(\alpha)(f)+\lambda(\beta)(f)\\ =&[c\lambda(\alpha)+\lambda(\beta)](f).\end{aligned}$$

Also ist λ linear.
Wir zeigen λ ist bijektiv: Es genügt zu zeigen, dass $\dim V=\dim V^{\star\star}$.
Zu beweisen: λ ist regulär. Sei $\lambda(\alpha)=0$ (d.h. $L_\alpha\equiv 0$). Z.z.: $\alpha=0$.
Angenommen $\alpha\neq 0$, also $\{\alpha\}$ linear unabhängig.
Sei $\mathcal{B}=\{\alpha,\dots,\alpha_n\}$ Basis für V. $\mathcal{B}^\star=\{f_1,\dots,f_n\}$ Dualbasis.
Es gilt $f_1(\alpha_1)=f_1(\alpha)=1$, also $L_\alpha(f_1)\neq 0$ also $L_\alpha\not\equiv 0$ $\lightning$

$\square$

Korollar 1: Sei L ein lineares Funktional auf $V^\star$.

$$\exists!\alpha\in V \text{ mit } L=L_\alpha,$$

d.h. für alle $f\in V^\star$:

$$L(f)=f(\alpha) \qquad (\star\star)$$

Beweis: Setze $\alpha:=\lambda^{-1}(L)$

$\square$

Korollar 2: Sei $\mathbb{B}$ eine Basis für $V^\star$. Dann existiert eine Basis $\mathcal{B}$ für V mit $\mathcal{B}^\star=\mathbb{B}$.

Beweis: Setze $\mathbb{B}:=\{f_1,\dots,f_n\}$. Satz 1 (§5) (1) liefert eine Basis, dual zu $\mathbb{B}$:
$\mathbb{B}^\star:=\{L_1,\dots,L_n\}$ für $(V^\star)^\star$, sodass $L_i(f_j)=\delta_{ij}$.
Korollar 1 (§6) liefert: $\forall i=1,\dots,n\exists!\alpha_i\in V$ mit $(\star\star)$, d.h.:

$$L_i(f)=f(\alpha_i)\ \forall 1\leq i\leq n,\ f\in V^\star$$

Insbesondere: $\delta_{ij}=L_i(f_j)=f_j(\alpha_i)$ $1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n$.
Setze nun $\mathcal{B}:=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$

$\square$

Bemerkung: Sei $E \subseteq V^\star$, dann ist $E^\circ \subseteq V^{\star\star}$.

$$E^\circ = \{L \in V^{\star\star} \mid L(f) = 0 \; \forall f \in W\}$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}\lambda^{-1}(E^\circ) =& \{\alpha \in V \mid \lambda(\alpha) \in E^\circ\}\\ =& \{\alpha \in V \mid L_\alpha \in E^\circ\}\\ =& \{\alpha \in V \mid L_\alpha(f) = 0 \; \forall f \in E\}\\ =& \{\alpha \in V \mid f(\alpha) = 0 \; \forall f \in E\} \qquad (\dagger)\end{aligned}$$

Satz 2: Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum. Es gilt:

$$\lambda^{-1}(W^{\circ\circ}) = W$$

Beweis: $\dim W + \dim W^\circ = \dim V = \dim V^\star = \dim W^\circ + \dim W^{\circ\circ}$
$\Rightarrow \dim W = \dim W^{\circ\circ} = \dim \lambda^{-1}(W^{\circ\circ})$
Es genügt zu zeigen: $W \subseteq \lambda^{-1}(W^{\circ\circ}) \underset{(\dagger)}{=} \{\alpha \in V \mid f(\alpha) = 0 \; \forall f \in W^\circ\}$
aber $\alpha \in W \Rightarrow f(\alpha) = 0 \; \forall f \in W^\circ$ per Definition!

□

Korollar 3: Sei $U \subseteq V^\star$ Unterraum. Setze $W := \lambda^{-1}(U^\circ)$. Es gilt:

$$W^\circ = U$$

Beweis: $\dim V^\star = \dim U + \dim U^\circ = \dim V = \dim W + \dim W^\circ$
Also $\dim U = \dim W^\circ$ (weil $\dim W = \dim \lambda^{-1}(U^\circ) = \dim U^\circ$).
Es genügt zu zeigen: $U \subseteq W^\circ$.
$W \underset{(\dagger)}{=} \{\alpha \in V \mid f(\alpha) = 0 \; \forall f \in U\}$. Sei $f \in U$. Es gilt: $f(\alpha) = 0 \; \forall \alpha \in W$,
also $f \in W^\circ$ per Definition.

□

§6. Die Transponierte Abbildung

Ansatz wie immer:
Sei $T : V \longrightarrow W$ lineare Transformation. T induziert eine Abbildung $T^t : W^\star \longrightarrow V^\star$ definiert durch $V^\star \ni f := T^t(g) := g \circ T$ für $g \in W^\star$.
D.h.: $f(\alpha) = (g \circ T)(\alpha) = g(T(\alpha)) \; \forall \alpha \in V$.

Behauptung: T^t ist linear: $c \in K$, $g_1, g_2 \in W^\star$:
$$T^t(cg_1 + g_2) = (cg_1 + g_2) \circ T = c(g_1 \circ T) + (g_1 \circ T) = cT^t(g_1) + T^t(g_2)$$
□

Wir haben bewiesen:

Satz 1: Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume.
Für jede lineare Abbildung $T : V \longrightarrow W$ $\exists! T^t : W^\star \longrightarrow V^\star$ auch linear, sodass

$$T^t(g)(\alpha) = g(T(\alpha)) \; \forall g \in W^\star,\, \alpha \in V$$

Definition 1: T^t ist die transponierte Abbildung zu T.

Satz 2: Es gelten:

(0) $\ker(T^t) = (R_T)^\circ$
(Nullraum der transponierten T^t =Annihilator vom Bild von T)

(1) $\operatorname{Rang}(T^t) = \operatorname{Rang}(T)$

(2) $R_{T^t} = (\ker T)^\circ$
(Bild der transponierten T^t =Annihilator vom Nullraum von T).

Beweis:

(0) $g \in \ker(T^t) \Leftrightarrow T^t(g) = 0 \Leftrightarrow g \circ T = 0 \Leftrightarrow g(T(\alpha)) = 0 \; \forall \alpha \in V \Leftrightarrow g \in (R_T)^\circ$

(1) Setze nun $\dim V =: n$, $\dim W =: m \, r := \operatorname{Rang}(T) = \dim R_T$
Satz 2 (§5) impliziert:

$$\dim(R_T) + \dim(R_T)^\circ = \dim W = m$$

Also:
$$r + \dim(R_T)^\circ = m \Rightarrow \dim(R_T)^\circ = m - r$$

Aus (0) folgt nun: $\dim(\ker T^t) = m - r$. Nun ist $T^t : W^\star \longrightarrow V^\star$ und Satz 2 (§1) liefert:

$$\operatorname{Rang}(T^t) + \dim(\ker T^t) = \dim W^\star = m$$

Also $\operatorname{Rang}(T^t) = m - (m - r) = r$

(2) Setze $N := \ker(T)$.

<u>Behauptung:</u> $R_{T^t} \subseteq N^\circ$

<u>Beweis:</u> Sei $f \in R_{T^t}$, also $f = T^t(g)$. $f \in V^\star$ für ein $g \in W^\star$.
Sei $\alpha \in N$ berechne:

$$f(\alpha) = (g \circ T)(\alpha) = g(T(\alpha)) = g(0) = 0$$

□

Andererseits haben wir wieder:

$$\dim N^\circ = n - \dim N = \text{Rang}(T) \underset{(1)}{=} \text{Rang}(T^t)$$

D.h.: $R_{T^t} \subseteq N^\circ$ und $\dim N^\circ = \dim N^\circ$.
Also $R_{T^t} = N^\circ$.

□

<u>Satz 3:</u> Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume, $T : V \longrightarrow W$, $T^t : W^\star \longrightarrow V^\star$ lineare Abbildungen. Seien $\mathcal{B}$, bzw. $\mathcal{B}'$ geordnete Basis für V bzw. W und $\mathcal{B}^\star$ bzw. $(\mathcal{B}')^\star$ Dualbasis. Es gilt:

$$[T]^t_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = [T^t]_{(\mathcal{B}')^\star,\mathcal{B}^\star}$$

<u>Beweis:</u>

<u>Erinnerung:</u> Sei A eine $m \times n$-Matrix, dann ist A^t $n \times m$-Matrix und $(A^t)_{ij} = (A)_{ji}$.

Setze $A := [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, $B := [T^t]_{(\mathcal{B}')^\star,\mathcal{B}^\star}$, $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $\mathcal{B}' = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$, $\mathcal{B}^\star = \{f_1, \dots, f_m\}$ und $(\mathcal{B}')^\star = \{g_1, \dots, g_m\}$
Per Definition gilt:

$$(\star) \qquad T\alpha_j = \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\beta_i \quad j = 1, \dots, n$$

$$(\star\star) \qquad T^t g_j = \sum_{i=1}^{n} B_{ij} f_i \quad j = 1, \dots, m$$

Wir berechnen nun:

$$\begin{aligned}((T^t)(g_j))(\alpha_j) &\overset{\text{Def}}{=} g_j(T(\alpha_j)) \overset{(\star)}{=} g_j\left(\sum_{k=1}^{m} A_{ki}\beta_i\right)\\ &= \sum_{k=1}^{m} A_{ki} g_j(\beta_i) = \sum_{k=1}^{m} A_{ki}\delta_{jk}\\ &\overset{(\star\star\star)}{=} A_{ji}\end{aligned}$$

Nun für beliebiges $f \in V^\star$:

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) f_i$$

(Darstellung zur Basis $\mathcal{B}^\star$)
Speziell für $f = T^t g_j$ ergibt sich dann:

$$\sum_{i=1}^{n} B_{ij} f_i \overset{(\star\star)}{=} T^t g_j = \sum_{i=1}^{n} T^t g_j(\alpha_i) f_i = \overset{(\star\star\star)}{=} \sum_{i=1}^{n} A_{ij} f_j$$

Da $\mathcal{B}^\star$ eine Basis ist, ist die Darstellung jedes f eindeutig,
also $B_{ij} = A_{ji}$, wie behauptet.

□

Wir geben nun als Anwendung einen sehr eleganten Beweis des Satzes, dass der Zeilenrang der Matrix stets gleich ihrem Spaltenrang ist.

Erinnerung:

(i) $\mathrm{Sr}(A)$: Spaltenrang von A=Dimension des von den Spaltenvektoren von A aufgespannten Unterraumes.

(ii) $\mathrm{Zr}(A)$:Zeilenrang von A=Dimension des von den Zeilenvektoren von A aufgespannten Unterraumes.

Satz 4: Es sei $\mathcal{E}_n$ die Standardbasis für K^n und $\mathcal{E}_m$ die Standardbasis für K^m,
$T : K^n \longrightarrow K^m$ gegeben durch $T((x_1, \dots, x_m)) = (y_1, \dots, y_,)$,
wobei $y_i := \sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$. Es gilt:

$$[T]_{\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_m} = A$$

Beweis: Ü.A.

□

Offenbar ist $\mathrm{Sr}(A) = \mathrm{Rang}(T)$, denn $\mathrm{Bild}(T)$ besteht gerade aus den Linearkombinationen der Spaltenvektoren von a. Außerdem ist $\mathrm{Zr}(A) = \delta(A^t)$, denn die Zeilen von A sind gerade die Spalten von A^t. Mit den Resultaten der letzten beiden Sätze folgt also:

$$\mathrm{Sr}(A) = \mathrm{Rang}(T) = \mathrm{Rang}(T^t) = \mathrm{Sr}(A^t) = \mathrm{Zr}(A), \text{ da } A^t = [T^t]_{\mathbb{E}_m^\star, \mathcal{E}_n^\star}.$$

□

Definition 2: $\mathrm{Rang}(A) := \mathrm{r}(A) = \mathrm{Sr}(A) = \mathrm{Zr}(A)$

§7. Quotientenräume

Es sei V ein K-Vektorraum, $W \subseteq V$ Unterraum.

Definition 1: (Kongruenz)
Für $\alpha, \beta \in V$: $\alpha \equiv \beta \mod W$ (α kongruent zu β modulo W), falls $\alpha - \beta \in W$.

Lemma 1: $\equiv \mod W$ ist eine Äquivalenzrelation auf V.

Beweis:

(1) Reflexiv: $\alpha - \alpha = 0 \in W$

(2) Symmetrisch: $\alpha - \beta \in W \Rightarrow -(\alpha - \beta) = (\beta - \alpha) \in W$.

(3) Transitiv: $\alpha - \beta \in W$ und $\beta - \gamma \in W$, so auch $\alpha - \gamma = (\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) \in W$.

□

Definition 2: Zu $\alpha \in V$ heißt

$$[\alpha]_W := \{\beta \in W \mid \alpha \equiv \beta \mod W\}$$

die Restklasse von $\alpha \mod W$.

$$\{[\alpha]_W \mid \alpha \in V\}$$

heißen Restklassen von W.

Notation: $$V/W := \{[\alpha]_W \,|\, \alpha \in W\}$$

Bemerkung: Offenbar ist $[\alpha]_W = \{\alpha + \gamma \,|\, \gamma \in W\}$. Wir können daher für $[\alpha]_W$ auch $\alpha + W$ schrieben, also ist:

$$V/W := \{\alpha + W \,|\, \alpha \in W\}$$

Erinnerung:

(i) $[\alpha]_W = \alpha + W$ ist die Nebenkasse von α modulo W. Ein $\beta \in [\alpha]_W$ heißt „Repräsentant" der Äquivalenzklasse.

(ii) V/W :=Menge der Nebenklassen versehen mit der Verknüpfung $+$:

$$(\alpha_1 + W) + (\alpha_2 + W) := (\alpha_1 + \alpha_2) + W$$

und einer Verknüpfung „Skalarmultiplikation":

$$c(\alpha + W) := (c\alpha) + W \text{ für } c \in K$$

Lemma 2: Diese Verknüpfungen sind wohldefiniert von der Wahl der Repräsentanten, d.h.:

(a) $$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv \alpha' \mod W \\ \text{und} \\ \beta \equiv \beta' \mod W \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha + \beta = \alpha' + \beta' \mod W$$

(b) $$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv \alpha' \mod W \\ \text{und} \\ c \in K \end{array}\right\} \Rightarrow c\alpha \equiv c\alpha' \mod W.$$

Beweis:

(a) $$\left.\begin{array}{l} \alpha - \alpha' \in W \\ \text{und} \\ \beta - \beta' \in W \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\underbrace{(\alpha - \alpha')}_{\in W} + \underbrace{(\beta - \beta')]}_{\in W}}_{\in W} = (\alpha + \beta) - (\alpha' + \beta') \in W$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta \equiv \alpha' + \beta' \mod W.$$

(b) $\alpha - \alpha' \in \Rightarrow c(\alpha - \alpha') \in W \Rightarrow c\alpha - c\alpha' \in W \Rightarrow c\alpha \equiv c\alpha' \mod W$

$\square$

Lemma 3: V/W mit diesen Verknüpfungen ist ein K-Vektorraum.

Beweis: Ü.A.

Was ist 0?
$0_{V/W} = 0 + W = W$ ist der Nullvektor in V/W.
Was ist additives Inverses?
$(\alpha + W) = ((-\alpha) + W) = 0 + W = W = 0_{V/W}$.

$\square$

Notation: $\overline{\alpha} := \alpha + W$.

Also:

(i) $\overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2} := \overline{\alpha_1 + \alpha_2}$

(ii) $c\overline{\alpha_1} = \overline{c\alpha_1}$

(iii) $\overline{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \alpha + W = W \Leftrightarrow \alpha \in W$

Satz 1: (die kanonische Projektion)

$$\pi_W : V \twoheadrightarrow V/W$$

$$\pi_W(\alpha) := \overline{\alpha}$$

ist eine surjektive lineare Transformation mit $\ker(\pi_W) = W$.

Beweis: $\pi_W(c\alpha_1 + \alpha_2) = (c\alpha_1 + \alpha_2) + W = (c\alpha_1 + W) + (\alpha_2 + W) = c(\alpha_1 + W) + (\alpha_2 + W)$.
Sei $\overline{\alpha} \in V/W$, dann ist $\overline{\alpha} = \pi_W(\alpha)$.
$\alpha \in ker(\pi_W) \Leftrightarrow \overline{\alpha} = 0_{V/W} \Leftrightarrow \alpha + W = W \Leftrightarrow \alpha \in W$.

$\square$

Korollar 1: $$\dim W + \dim {}^{V}\!\big/\!_{W} = \dim V$$

Satz 2: (Homomorphiesatz)
Seien V, Z K-Vektorräume, $T : V \longrightarrow T$ linear. Es gilt:

$$ {}^{V}\!\big/\!_{\ker T} \simeq R_T $$

Beweis: Definiere $\overline{T} : {}^{V}\!\big/\!_{\ker T} \twoheadrightarrow R_T$ mit $\overline{T}(\alpha + \ker T) := \overline{T}(\overline{\alpha}) = T(\alpha)$

(i) $\overline{T}$ wohldefiniert?
$\overline{\alpha} = \overline{\alpha'} \Rightarrow T(\mathscr{A}) = T(\alpha')$?
$\alpha - \alpha' \in \ker T \Leftrightarrow T(\alpha - \alpha') = 0 \Leftrightarrow T(\alpha) = T(\alpha')$

(ii) linear?
$\overline{T}(\overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2}) = \overleftarrow{T}(\overline{\alpha_1 + \alpha_2} = T(\alpha_1 + \alpha_2) = T(\alpha_1) + T(\alpha_2) = \overline{T}(\overleftarrow{\alpha_1} + \overline{T}(\overline{\alpha_2})$

(iii) $T(\alpha) \in R_T$. Es ist $\overline{T}(\overline{\alpha}) = T(\alpha)$, also $\overline{T}$ ist surjektiv.

(iv) $\overline{T}$ injektiv?
$\overline{\alpha} \in \ker(\overline{T}) \Leftrightarrow \overline{T}(\overline{\alpha}) = 0 \Leftrightarrow T(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \ker T \Leftrightarrow \overline{\alpha} = 0$.
Also ist $\overline{T}$ regulär.

□

Korollar 2: Seien W, W' Unterräume von V und $V = W \oplus W'$, dann gilt:

$$ {}^{W \oplus W'}\!\big/\!_{W} \simeq W' $$

Beweis: $V = W \oplus W'$ bedeutet: $\forall v \in V \exists! w \in W$ und $w' \in W'$, sodass $v = w + w'$.
Definiere

$$\begin{aligned} \underline{P}_{W'} : V &\twoheadrightarrow W' \\ v &\longmapsto w' \end{aligned}$$

$\underline{P}_{W'}$ ist linear (Ü.A.)✓und surjektiv (Ü.A.)✓
$\alpha \in \ker(\underline{P}_{W'}) \Leftrightarrow \underline{P}_{W'}(v) = 0 \Leftrightarrow w' = 0 \Leftrightarrow \alpha \in W$.

Satz 2 $\Rightarrow {}^{V}\!\big/_{\ker(\underline{P}_{W'})} \simeq \mathrm{Bild}(\underline{P}_{W'})$

$\square$

<u>Korollar 3:</u> Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum. Es gilt:

$$\left({}^{V}\!\big/_{W}\right)^{\star} \simeq W^{\circ}$$

<u>Beweis:</u> Sei $\pi_W : V \twoheadrightarrow {}^{V}\!\big/_{W}$ betrachte $\pi_W^t : \left({}^{V}\!\big/_{W}\right)^{\star} \longrightarrow V^{\star}$. Setze $T := \pi_W$.

$R_{T^t} = (\ker(T))^{\circ} = W^{\circ}$.

$\ker(T^t) = (R_T)^{\circ} = ({}^{V}\!\big/_{W})^{\circ} = ({}^{V}\!\big/_{W})^{\circ} = \{0\}$.

Also T^t regulär und surjektiv auf W°.

$\square$

<u>Fragestellung:</u> Sei $W \subseteq V$ Unterraum: Was ist die Beziehung zwischen $W^{\star}$ und $V^{\star}$?

<u>Korollar 4:</u> Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum. Es gilt:

$$W^{\star} \simeq {}^{W^{\star}}\!\big/_{W^{\circ}}$$

<u>Beweis 1:</u> $\mathrm{Id} : W \longrightarrow V$ Identitätsabbildung. $\mathrm{Id}^t : V^{\star} \longrightarrow W^{\star}$.

$\ker(\mathrm{Id}^t) = (R_{\mathrm{Id}})^{\circ} = W^{\circ}$

$R_{\mathrm{Id}^t} = (\ker(\mathrm{Id}))^{\circ} = (\{0\})^{\circ} = W^{\star}$.

$\square$

<u>Beweis 2:</u> Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \rho : V^{\star} &\longrightarrow W^{\star} \\ \rho(f) &:= f|_W \qquad \text{(Die Restringierung)} \end{aligned}$$

Ist ρ linear? Was ist $\ker(\rho)$? Was ist R_ρ? Benutze den Homomorphiesatz (nach der Berechnung von $\ker(\rho)$ und R_ρ. (Ü.A.)

$\square$