Universität Konstanz

Fachbereich
Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

Lineare Algebra II
Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1

(a) Sei K ein Unterkörper von $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

$$\langle x^2 + 8x + 16, x + 1\rangle = K[x].$$

(b) Finden Sie

$$ggT(x^3 - (4 - i)x^2 + (4 - 4i)x + 4i, x^3 - 2x^2 + x - 2).$$

(c) Zeigen Sie, dass die Polynome $x^3 + 3x^2 - 4, x^3 + x^2 - 8x - 12, x - 3 \in \mathbb{Q}[x]$ teilerfremd sind.

Aufgabe 3.2

Definition: Eine Teilmenge I eines Ringes R heißt ein Ideal von R, wenn $0 \in I$ und für alle $r \in R$ und $u, w \in I$, $u + w \in I$ und $ur \in I$ gelten. Für $K[x]$ ist diese Definition äquivalent zu der Definition aus der Vorlesung.

(a) Finden Sie $d \in \mathbb{Z}$ positiv mit $\langle d\rangle = \langle 146, 210\rangle$.

(b) Verwenden Sie den Euklidischen Algorithmus, um zu beweisen, dass $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealbereich ist.

(c) Seien $n, m \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass genau dann $d =$ ggT(n, m) gilt, wenn $\langle n, m\rangle = \langle d\rangle$.

Hinweis: Für $n, m \in \mathbb{Z}$,

$$\langle n, m\rangle = \{an + bm \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Aufgabe 3.3

(a) Schreiben Sie

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 1 & 2 & 5 & 3 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix} \in \mathsf{S}_n$$

als Produkt von disjunkten Zyklen und als Produkt von Transpositionen. Berechnen Sie sign(σ).

(b) Zeigen Sie, dass $\alpha, \beta \in \mathsf{S}_n$ kommutieren (d.h. $\alpha\beta = \beta\alpha$), wenn α und β disjunkt sind.

(c) Seien $\tau, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathsf{S}_n$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ paarweise disjunkt.

Zeigen Sie, dass $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ und τ genau dann disjunkt sind, wenn für $0 < i \leq m$ α_i und τ disjunkt sind.

Aufgabe 3.4

Seien $n \in \mathbb{N}$, $\sigma, \tau \in \mathsf{S}_n$ und $f, g : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$.
Erinnerung: Die Funktion $\sigma f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ ist durch

$$(\sigma f)(x_1, ..., x_n) := f(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)})$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, dass $(\sigma\tau)f = \sigma(\tau f)$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $\sigma(f + g) = (\sigma f) + (\sigma g)$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $\sigma(fg) = (\sigma f)(\sigma g)$ gilt.

Aufgabe 3.5 Zusatzaufgabe für Interessierte
Definition: Ein Integritätsbereich R heißt euklidischer Ring, falls eine Gradfunktion $\mu : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}_0$ existiert mit folgenden Eigenschaften: für alle $x, y \in R$ mit $y \neq 0$ existieren Elemente $q, r \in R$ mit $x = qy + r$, wobei entweder $r = 0$ oder $\mu(r) < \mu(y)$ ist.
Zeigen Sie, dass ein euklidischer Ring ein Hauptidealbereich ist.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe **Montag, 14.05.2012** bis 10.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.
