Universität Konstanz
Fachbereich
Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

Algebra
Übungsblatt 7

Die ersten vier Aufgaben sollen am Montag 07.01.13 bis 12.00 Uhr in den Briefkästen bei F 411 abgegeben sein. Die anderen Aufgaben sind freiwillig und müssen nicht abgegeben werden.

Aufgabe 7.1

(a) Zeigen Sie, dass jeder algebraisch abgeschlossene Körper unendlich ist.

(b) Sei K entweder $\mathbb{Q}$ oder F_p und $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von K. Zeigen Sie, dass $[\overline{K} : K]$ unendlich ist.

Aufgabe 7.2

(a) Seien $\overline{K}$ und $\widetilde{K}$ algebraische Abschlüsse von K. Seien $f(x) \in K[x]$ irreduzibel und $\alpha \in \overline{K}$, $\beta \in \widetilde{K}$ Nullstelle von f. Zeigen Sie, dass ein Homomorphismus $\sigma : \overline{K} \to \widetilde{K}$ mit $\sigma(\alpha) = \beta$ und $\sigma|_K = \mathrm{id}_K$ existiert.

Hinweis: Benutzen Sie das Zornsche Lemma.

(b) Zeigen Sie, dass der algebraische Abschluss von K eindeutig bis auf K-Isomorphie bestimmt ist, d.h. zeigen Sie, dass je zwei algebraische Abschlüsse isomorph über K sind.

Aufgabe 7.3

Seien K ein Körper und $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von K.

(a) Sei $K \subseteq F \subseteq \overline{K}$ und sei F normal über K. Zeigen Sie, dass für jeden K-Endomorphismus $\phi : \overline{K} \to \overline{K}$ $\phi(F) = F$ gilt.

(b) Sei $K \subseteq F \subseteq \overline{K}$ und sei F normal über K. Zeigen Sie, dass jedes irreduzible Polynom über K mit einer Nullstelle in F vollständig in F zerfällt.

(c) Sei F/K eine algebraische Körpererweiterung. Folgern Sie, dass F/K genau dann normal ist, wenn alle $f \in K[x]$ irreduzibel mit einer Nullstelle in F vollständig in F zerfallen.

Aufgabe 7.4

(a) Finden Sie einen Körper F und endliche Körpererweiterungen K_1, K_2 von F mit $[K_1 : F][K_2 : F] > [K_1K_2 : F]$.

(b) Seien K/F eine algebraische Körpererweiterung und $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $F(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \text{ Span }_F\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$

(ii) Span $_F\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ ist ein Körper

(iii) $1 \in$ Span $_F\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ und für alle i, j $\alpha_i\alpha_j \in$ Span $_F\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$

Aufgabe 7.5
Berechnen Sie die Zerfällungskörper von $x^3 - 2$ und $x^4 + 4$ über $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 7.6
Sei $S = \{7^k \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \subseteq \mathbb{Z}$. Welche der folgenden Ringe sind isomorph?

$$F_7 \times F_7,\ S^{-1}\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}[x]/\langle 7x - 1\rangle,\ F_7[x]/\langle x^2 + 5\rangle,\ \mathbb{Z}/\langle 49\rangle$$

Aufgabe 7.7
Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

1. Jedes maximale Ideal ist ein Primideal.
2. Körper haben keine Primideale.
3. Jeder faktorielle Ring ist ein Hauptidealbereich.
4. Jeder Hauptidealbereich ist ein faktorieller Ring.
5. Das Polynom $x^3 + 8x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$ ist irreduzibel.
6. Das Polynom $x^4 + x^3 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ ist irreduzibel.
7. Das Polynom $(x + 1)^3 + 8(x + 1) + 2 \in \mathbb{Q}[x]$ ist irreduzibel.
8. 5 ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[i]$.
9. 4 ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[i]$.
10. 4 ist prim in $\mathbb{Z}[i]$.
11. Jedes echte Ideal ist in einem Primideal enthalten.
12. Seien R, S Integretätsbereiche. Der Ring $S \times R$ ist ein Integretätsbereich.

13. Ein Ring R ist genau dann ein Integretätsbereich, wenn das Nullideal prim ist.
14. $\mathbb{R}[x]/\langle x^3\rangle$ ist ein Integretätsbereich.
15. Eine Körpererweiterung ist genau dann algebraisch, wenn sie endlich ist.
16. Die Vereinigung von zwei Idealen ist immer ein Ideal.
17. Der Durchschnitt von zwei Idealen ist immer ein Ideal.

Aufgabe 7.8

Eine Menge A heißt abzählbar, falls eine injektive Funktion von A nach $\mathbb{N}$ existiert. Für Mengen A, B schrieben wir $|A| = |B|$, falls eine bijektive Funktion von A nach B existiert. Wir schreiben $\aleph_0$ für $|\mathbb{N}|$ und $2^{\aleph_0}$ für $|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist. Seien A_i unendlich abzählbare Mengen. Zeigen Sie, dass $\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ unendlich abzählbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass für $r \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq r \leq 1$ eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \{0, 1\}$ existiert so, dass
$$r = \sum_{i=1}^{\infty} a_i/2^i.$$
Betrachten Sie die Funktion ϕ von der Menge der Folgen in $\mathbb{R}$ definiert durch
$$\phi : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} a_i/2^i.$$
Zeigen Sie, dass $|\phi^{-1}(r)| \leq 2$ für alle $r \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq r \leq 1$ gilt und ϕ surjektiv ist. Zeigen Sie, dass die Menge $\{r \in \mathbb{R} \mid |\phi^{-1}(r)| = 2\}$ unendlich abzählbar ist. Folgern Sie, dass $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

(c) Zeigen Sie, dass die Menge der reellen Zahlen die algebraisch über $\mathbb{Q}$ sind unendlich abzählbar ist.

(d) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen. Zeigen Sie, dass Folgen $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $r_n \leq r_{n+1} \leq s_{n+1} \leq s_n$ und $a_1, a_2, .., a_n \notin [r_n, s_n]$ existieren. Folgern Sie, dass $\mathbb{R}$ nicht abzählbar ist.

(e) Folgern Sie, dass $2^{\aleph_0}$ reelle Zahlen existieren, die transzendent über $\mathbb{Q}$ sind.

(f) Folgern Sie, dass $2^{\aleph_0}$ komplexe Zahlen existieren, die transzendent über $\mathbb{Q}$ sind.

Abgabe **Montag, 07.01.2013** bis 12.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.
