**Universität Konstanz**
**Fachbereich**
**Mathematik und Statistik**
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

# Algebra
## Übungsblatt 4

Alle Ringe seien kommutativ mit Eins.

**Aufgabe 4.1**

(a) Zeigen Sie, dass die Einheiten von $\mathbb{Z}[2i]$ genau $1$ und $-1$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass $2i$ und $2$ irreduzibel in $\mathbb{Z}[2i]$ sind.

(c) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}[2i]$ kein faktorieller Ring ist.

**Hinweis**: In Teil (a) und (b) betrachten Sie die Abbildung $x \mapsto x\bar{x}$.

**Aufgabe 4.2**

(a) Zeigen Sie, dass $3$ irreduzibel und nicht prim in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Ideal $\langle 3, 2+\sqrt{-5}\rangle \lhd \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ kein Hauptideal ist.

**Hinweis**: Betrachten Sie die Abbildung $x \mapsto x\bar{x}$.

**Aufgabe 4.3**

Diese Aufgabe enthält einen Fehler. Das Polynom in Teil (b) sollte $x^{2^n}+1$ sein. Siehe UB6 für die korrekte Aufgabe.

(a) Welche der folgenden Polynome sind irreduzibel über $\mathbb{Q}$?

$$X^{10}+161X^9+21X+42,\ X^4+4X^3+2X^2+X+1,\ X^3+X^2+X+1$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ das Polynom $X^{2n}+1$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

**Hinweis**: Für Teil (b) betrachten Sie das Polynom $(X+1)^{2n}+1$.

**Aufgabe 4.4**

Diese Aufgabe enthält einen Fehler. Es sollte heißen: Falls $R$ faktoriell ist, haben alle Nichteinheiten von $r \in R[x]\backslash\{0\}$ eine Darstellung als Produkt von irreduziblen Elementen. Zeigen Sie, dass diese Darstellung eindeutig bis auf Reihenfolge und Assoziiertheit ist.

In der Vorlesung (Montag 19. November) haben wir bewiesen, dass, falls $R$ ein faktorieller Ring ist, alle Nichteinheiten $r \in R\backslash\{0\}$ eine Darstellung als Produkt von irreduzibel Elementen haben. Zeigen Sie, dass diese Darstellung eindeutig bis auf Reihenfolge und Assoziiertheit ist.

**Aufgabe 4.5 Zusatzaufgabe für Interessierte**

Der Zweck dieser Aufgabe ist zu beweisen, dass $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}]$ ein Hauptidealbereich ist. Also, $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}]$ ist ein Hauptidealbereich aber kein euklidischer Ring (siehe Aufgabe 3.5).
Sei $N : \mathbb{Q}[\sqrt{-19}] \to \mathbb{Q}$ die Abbildung $x \mapsto x\bar{x}$.

Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit ggT$(a, b, c) = 1$ und $\frac{a+b\sqrt{-19}}{c} \in \mathbb{Q}[\sqrt{-19}] \backslash \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}]$.

(a) Sei $c \geq 5$. Zeigen Sie, dass es $s, t \in \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}]$ gibt, so dass

$$0 < N(\frac{a + b\sqrt{-19}}{c} \cdot s - t) < 1$$

gilt.

**Hinweis**: Wegen $ggT(a, b, c) = 1$ gibt es $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit $ax + by + cz = 1$. Sei $q \in \mathbb{Z}$ mit $|ay - 19bx - cq| \leq c/2$. Setzen Sie $s = y + x\sqrt{-19}$ und $t = q - z\sqrt{-19}$.

(b) Für $c = 2, 3, 4$ finden Sie $s, t \in \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}]$ so, dass

$$0 < N(\frac{a + b\sqrt{-19}}{c} \cdot s - t) < 1$$

gilt.

**Hinweis**: Für $c = 3$ beweisen Sie, dass $3$ kein Teiler von $a^2 + 19b^2$ ist. Sei $q \in \mathbb{Z}$ mit $0 < a^2 + 19b^2 - 3q < 3$. Setzen Sie $s = a - b\sqrt{-19}$ und $t = q$.

Für $c = 4$ beachten Sie, dass $a, b$ nicht beide gerade sind. Falls $a, b$ beide ungerade sind, beweisen Sie, dass es ein $q \in \mathbb{Z}$ mit $a^2 + 19b^2 = 8q + 4$ gibt. Setzen Sie $s = \frac{a-b\sqrt{-19}}{2}$ und $t = q$. Falls $a$ oder $b$ gerade ist, beweisen Sie, dass ein $q \in \mathbb{Z}$ mit $a^2 + 19b^2 = 4q + r$ und $0 < r < 4$ existiert. Setzen Sie $s = a - b\sqrt{-19}$ und $t = q$.

(c) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{-19}]$ der Quotientkörper von $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}]$ ist. Folgern Sie, dass $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}]$ ein Hauptidealbereich ist.

---

Abgabe **Montag, 26.11.2012** bis 12.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.

---