

9. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl
WS 2011/2012: 18. November 2011
(WS 2015/2016: Korrekturen vom 17. November 2015)

Korollar 1 Seien A und B $m \times n$ -Matrizen über K . Es gilt: B ist zu A zeilenäquivalent gdw $B = PA$, wobei P das Produkt von $m \times m$ -elementaren Matrizen ist.

Beweis “ \Leftarrow ” Sei $P = E_\ell \dots E_2 E_1$, wobei E_t eine elementare $m \times m$ -Matrix ist.
Also ist $E_1 A$ zeilenäquivalent zu A
und $E_2(E_1 A)$ ist zeilenäquivalent zu $E_1 A$.
Also ist $E_2 E_1 A$ zeilenäquivalent zu A .
So weiter fortsetzen:
 $E_\ell \dots E_1 A$ ist zeilenäquivalent zu A
i.e. B ist zeilenäquivalent zu A .
“ \Rightarrow ” Sei B zeilenäquivalent zu A und seien e_1, \dots, e_ℓ die elementaren Zeilenumformungen mit $A \xrightarrow{e_1} \dots \xrightarrow{e_\ell} B$.
Also $E_\ell \dots E_2 E_1 A = B$,
wobei E_t die elementare Matrix $e_t(I_m)$ für $t = 1, \dots, \ell$ ist.
Setze $P := E_\ell \dots E_2 E_1$. □

Definition 1 Eine $n \times n$ -Matrix A ist invertierbar, falls es eine $n \times n$ -Matrix B gibt, so dass

$$AB = I_n \text{ und } BA = I_n.$$

In diesem Fall heißt B eine *Inverse von A* .

Proposition 1 Sei A invertierbar. Dann gibt es eine eindeutige Inverse.

Beweis Seien B_1, B_2 beide Inverse von A . Es gilt:
 $AB_1 = I_n = AB_2$
also $B_2(AB_1) = B_2(AB_2)$ (Multiplikation)
also $(B_2 A)B_1 = (B_2 A)B_2$
also $I_n B_1 = I_n B_2$, i.e. $B_1 = B_2$ □

Notation Wir bezeichnen mit A^{-1} die eindeutige Inverse der invertierbaren Matrix A .

Proposition 2 Seien A, B $n \times n$ -Matrizen über K . Es gilt
(i) Wenn A invertierbar, so auch A^{-1} und $(A^{-1})^{-1} = A$.
(ii) Wenn A und B beide invertierbar, so auch AB und $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Beweis

- (i) Wir berechnen $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Also ist A die Inverse von A^{-1} .
- (ii) Wir berechnen $B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B \equiv I_n$.
Analog $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n$. \square

Korollar 2

Seien A_1, \dots, A_ℓ $n \times n$ -invertierbare Matrizen, dann ist das Produkt $A_1 \cdots A_\ell$ auch invertierbar und es gilt $(A_1 \cdots A_\ell)^{-1} = A_\ell^{-1} \cdots A_1^{-1}$ (*)

Beweis

Induktion nach ℓ . Für $\ell = 1$ ist es klar.

Induktionsannahme: (*) gilt für ℓ .

Induktionsschritt: (*) gilt für $\ell + 1$:

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } (A_1 \cdots A_\ell A_{\ell+1})^{-1} &= \\ ((A_1 \cdots A_\ell) A_{\ell+1})^{-1} &= \leftarrow \text{ Proposition 2 (ii)} \\ A_{\ell+1}^{-1} (A_1 \cdots A_\ell)^{-1} &= \leftarrow \text{ Induktionsannahme} \\ A_{\ell+1}^{-1} (A_\ell^{-1} \cdots A_1^{-1}) &= \leftarrow \text{ Assoziativität} \\ A_{\ell+1}^{-1} A_\ell^{-1} \cdots A_1^{-1} & \quad \square \end{aligned}$$

Proposition 3 Elementare Matrizen sind invertierbar.**Beweis**

Sei $E = e(I_n)$ eine elementare Matrix. Sei e^* die umgekehrte Zeilenumformung (auf die Zeilen von I_n) und $E^* := e^*(I_n)$. Wir berechnen

$$E^*E = e^*(I_n)e(I_n) = I_n \quad \text{und} \quad E^*E = EE^* = I_n$$

D.h. $E^* = E^{-1}$. \square

Beispiel 1

2×2 -elementare Matrizen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix} \\ c \neq 0 \\ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} c^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Satz 1

Sei A eine $n \times n$ -Matrix. Sind äquivalent:

- (i) A ist invertierbar.
 - (ii) $A\underline{x} = \underline{b}$ ist konsistent für jede $n \times 1$ -Spaltenmatrix \underline{b} .
 - (iii) $A\underline{x} = \underline{0}$ hat nur die triviale Lösung.
 - (iv) A ist zeilenäquivalent zu I_n .
 - (v) A ist Produkt von elementaren Matrizen.
- (ii) und (iii): Beziehung zwischen homogener und allgemeiner (quadratischer) Systeme.

Beweis(i) \Rightarrow (ii)Setze $\underline{x} := A^{-1}\underline{b}$. Es gilt $A\underline{x} = A(A^{-1}\underline{b}) = (AA^{-1})\underline{b} = I_n\underline{b} = \underline{b}$.(iii) \Leftrightarrow (iv) schon bewiesen (Korollar 3, 7. Vorlesung i.e. Korollar 7.3)(ii) \Rightarrow (iii)Wenn $A\underline{x} = 0$ nicht triviale Lösungen hätte, dann ist die r.Z.S.F. R von A nicht I_n , also muss eine Nullzeile haben. Also ist zum Beispiel das System

$$(S) \quad R\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ inkonsistent.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \dots & \dots & \dots & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Nun $\boxed{R = PA}$ wobei P das Produkt von elementaren Matrizen ist (Korollar 1). Also ist P invertierbar (Korollar 2 und Proposition 3).Also multipliziere (S) durch P^{-1} :

$$(S) \quad (PA)\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist inkonsistent.}$$

$$\text{Also } P^{-1}(PA)\underline{x} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist inkonsistent.}$$

$$\text{Also } A\underline{x} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ inkonsistent.}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} n \times n & n \times 1 \\ & n \times 1 \end{matrix}}_{n \times 1}$$

$$\text{Setze } \underline{b} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ wir bekommen } A\underline{x} = \underline{b}. \text{ Inkonsistent. Widerspruch.}$$

(iv) \Rightarrow (V) $A = P'I_n = P'$, wobei P' das Produkt von elementaren Matrizen ist (Korollar 1).(v) \Rightarrow (i)Folgt aus Korollar 2 und Proposition 3. □**Korollar 3** Seien A und B $m \times n$ -Matrizen. B ist zeilenäquivalent zu A genau dann, wenn $B = PA$, wobei P eine invertierbare $m \times m$ -Matrix ist.