7. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS 2011/2012: 11. November 2011

(WS 2015/2016: Korrekturen vom 9. November 2015)

Korollar 1 Sei R eine $m \times n$-Matrix in r.Z.S.F und setze $r :=$ die Anzahl der $\not\equiv 0$-Zeilen von R.
Falls $r < n$, dann hat das homogene System

$$R\underline{X} = \underline{0}(*)$$

nicht triviale Lösungen.

Beweis $r =$ Anzahl der $\not\equiv 0$-Zeilen in r.Z.S. F.
$=$ Anzahl der Haupteins
$=$ Anzahl der Hauptvariablen.

Also $n-r =$ Anzahl der freien Variablen und $r < n \Rightarrow n-r \neq 0 \Rightarrow$ es existiert mindestens eine freie Variable x_j. Wir erhalten eine nicht triviale Lösung für $(*)$, indem wir z.B. $x_j = 1$ setzen. $\square$

Korollar 2 Sei A eine (beliebige) $m \times n$-Matrix mit $m < n$. Dann hat das homogene System

$$(S) \qquad A\underline{X} = \underline{0}$$

nicht triviale Lösungen.

Beweis Sei R in r.Z.S.F zeilenäquivalent zu A. (R ist immer noch eine $m \times n$-Matrix.)
Setze $r :=$ Anzahl der $\not\equiv 0$-Zeilen von R.
Also $r \leq m < n$. Also hat

$$R\underline{X} = \underline{0}(*)$$

nach Korollar 1 nicht triviale Lösungen und damit auch (S). $\square$

Bemerkung 1 Sei R eine $n \times n$-Matrix in r.Z.S.F und *ohne Nullzeilen* (also jede Zeile hat eine Haupteins). Dann ist $R = I_n$.

Beweis r.Z.S.F $\Rightarrow \quad 1 \leq k_1, < k_2 < \cdots < k_n \leq n$, wobei k_j die Spalte ist, in der die Haupteins der Zeile Z_j erscheint).
Also $\quad k_j = j$, für alle $j = 1, \ldots, n$.
Also $\quad a_{jj} = 1$, für alle $j = 1, \ldots, n$.
Sei $i \neq j$, dann ist a_{ij} in der k_j-Spalte
$\xrightarrow{r.Z.S.F} a_{ij} = 0$ (weil $a_{ij} \neq a_{jj}$). $\square$

Korollar 3 Sei A eine $n \times n$-Matrix. Es gilt:
A zeilenäquivalent zu $I_n \Leftrightarrow A\underline{X} = \underline{0}$ hat nur die triviale Lösung.

Beweis "$\Rightarrow$" klar, weil $I_n\underline{X} = \underline{0}$ nur die triviale Lösung hat.
"$\Leftarrow$" Sei R eine $n \times n$-Matrix in r.Z.S.F und zeilenäquivalent zu A. Sei $r :=$ Anzahl der $\not\equiv 0$-Zeilen von R. Korollar 2 $\Rightarrow r \geq n$. Andererseits $r \leq n$. Also $r = n$. Also hat R keine Nullzeilen $\Rightarrow R = I_n$. $\square$

Kapitel 1: § 5 Matrix-Multiplikation

Definition 1 Seien A eine $\mathbf{m} \times n$- und B eine $n \times \mathbf{p}$-Matrix über K.
Wir definieren eine neue Matrix $C := AB$; das Produkt als die folgende $m \times p$-Matrix:

$$C_{ij} := \sum_{r=1}^{n} A_{i\mathbf{r}} B_{\mathbf{r}j}.$$

Also Zeilen mal Spalten!

Beispiel 1 (1)

$$\underset{m \times n}{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}} \underset{n \times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} = \underset{m \times 1}{\begin{pmatrix} a_{11} & x_1 & + & \cdots & + & a_{1n} & x_n \\ a_{21} & x_1 & + & \cdots & + & a_{2n} & x_n \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m1} & x_1 & + & \cdots & + & a_{mn} & x_n \end{pmatrix}}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + 0 + 0 & a_{12} + 0 + 0 & a_{13} + 0 + 0 \\ 0 + a_{21} + 0 & 0 + a_{22} + 0 & 0 + a_{23} + 0 \\ 0 + 0 + a_{31} & 0 + 0 + a_{32} & 0 + 0 + a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(3) **Allgemeiner:** Sei A eine $n \times n$-Matrix. Es gilt $C = AI_n = I_nA = A$.
Beweis: Wir zeigen $AI_n = A$. (I_nA wird analog behandelt.)

$(AI_n)_{ij} = \sum_{r=1}^{n} A_{ir}(I_n)_{rj} \qquad (*)$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Fall 1} & r \neq j & (I_n)_{rj} = 0 \\ \text{Fall 2} & r = j & (I_n)_{rj} = 1 \end{array}\right\} \text{in } (*) \text{ eingesetzt ergibt die Summe}$$

$\sum_{r=1}^{n} A_{ir}(I_n)_{rj} = A_{ij}(I_n)_{jj} = A_{ij}$ □

(4) Über $\mathbb{F}_7$:

$$\underset{2 \times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} \underset{2 \times 2}{\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} (1 \bullet_7 5) + (2 \bullet_7 0) & (1 \bullet_7 6) + (2 \bullet_7 1) \\ (3 \bullet_7 5) + (4 \bullet_7 0) & (3 \bullet_7 6) + (4 \bullet_7 1) \end{pmatrix} =$$

$$\underset{2 \times 2}{\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

(5) Die j-te Spalte von AB (als $m \times 1$-Matrix) $= \underbrace{A}_{m\times n}$ [j-te Spalte von B] (als $n \times 1$-Matrix).
und:
Die i-te Zeile von AB (als $1 \times p$-Matrix) $=$ (als $1 \times n$-Matrix) [i-te Zeile von A] $(n \times p)B$.

Satz 1 Seien A, B, C Matrizen über K, so dass die Produkte BC und $A(BC)$ definiert sind, dann sind auch die Produkte AB und $(AB)C$ definiert und es gilt:

$$A(BC) = (AB)C.$$

Beweis Sei B eine $n \times p$-Matrix. Also hat C p Zeilen und BC n Zeilen. Also (weil $A(BC)$ definiert ist) Œ ist A eine $m \times n$-Matrix. Also ist AB eine wohldefinierte $m \times p$-Matrix und $(AB)C$ ist damit auch wohldefiniert.

Wir wollen nun zeigen, dass die zwei Matrizen $A(BC)$ und $(AB)C$ gleich sind. Dafür müssen wir zeigen, dass alle ihre Koeffizienten gleich sind.

Wir berechnen also:

$$\begin{aligned}
[A(BC)]_{ij} &= \textstyle\sum_r A_{ir}\ (BC)_{rj} \\
&= \textstyle\sum_r A_{ir}\ (\sum_s B_{rs}\ C_{sj}) \\
&= \textstyle\sum_r \sum_s A_{ir}\ B_{rs}\ C_{sj} \text{ (Distributivität und Assoziativität in } K) \\
&= \textstyle\sum_s \sum_r A_{ir}\ B_{rs}\ C_{sj} \text{ (Kommutativität und Assoziativität in } K) \\
&= \textstyle\sum_s (\sum_r A_{ir}\ B_{rs})\ C_{sj} \\
&= \textstyle\sum_s (AB)_{is}\ C_{sj} \\
&= [(AB)C]_{ij}.
\end{aligned}$$

Bezeichnung Seien A eine $n \times n$-Matrix und $k \in \mathbb{N}$.
$A^k := \underbrace{A \cdots A}_{k\text{-mal}}$ (wohldefiniert).