23. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS2011/2012: 24. Januar 2012

(WS 2015/2016: Korrekturen vom 25. Januar 2016)

Definiton 1 Sei V ein K-Vektorraum $\dim V = n$, $S \subseteq V$.
Annihilator S ist bezeichnet mit S^0 und definiert als
$S^0 = \{f \in V^* \mid S \subseteq \ker(f)\} = \{f \in V^* \mid f(\alpha) = 0$ für alle $\alpha \in S\}$.

Bemerkungen

(*i*) $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow S_2^0 \subseteq S_1^0$

(*ii*) $S^0 = (\text{ span } (S))^0$

(*iii*) $S^0 \subseteq V^*$ ist immer ein Unterraum.

(*iv*) $S = \{0\} \Leftrightarrow S^0 = V^*$

(*v*) $S = V \Rightarrow S^0 = \{0\}$

(*vi*) Also span $(S) = V \Leftrightarrow S^0 = \{0\}$

Beweis von (iv) "$\Rightarrow$" ist klar.
Für "$\Leftarrow$": Sei $S^0 = V^*$. Zu zeigen $S = \{0\}$. Zum Widerspruch sei $\alpha \neq 0$ und $\alpha \in S$. $\{\alpha\}$ ist linear unabhängig $\Rightarrow$ ergänze zu einer Basis $\mathcal{B}$ für V:
$\mathcal{B} = \{\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.
Sei $\mathcal{B}^*$ die Dualbasis: $\mathcal{B}^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$. Es gilt $f_1(\alpha_1) = 1$, also $f_1 \notin S^0$. □

Beweis von (vi) "$\Rightarrow$" Schon gemacht.

"$\Leftarrow$" Sei $S^0 = \{0\}$. Zu zeigen span $(S) = V$.
Zum Widerspruch setze $W :=$ span (S) und sei
$\alpha \in V \backslash W$ und $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subseteq W$ eine Basis für W. Dann ist $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha\}$ linear unabhängig.
Ergänze zu einer Basis für V: $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha = \alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n\}$.

Sei $\{f_1, \ldots, f_k, f_{k+1}, \ldots, f_n\} = \mathcal{B}^*$ die Dualbasis. Es gilt $f_{k+1}(\alpha_j) = 0$ für alle $j = 1, \ldots, k$ und $f_{k+1}(\alpha_{k+1}) = 1$. Also $f_{k+1} \not\equiv 0$ und $f_{k+1} \in S^0$. □

Korollar 1 (Trennung Eigenschaft)
Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum und $\alpha \notin W$. Es existiert ein $f \in V^*$ mit $f(W) = \{0\}$ und $f(\alpha) \neq 0$.

Beweis Sei $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ eine Basis für W. Nun ist $\alpha \notin$ span $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, also $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha\}$ ist linear unabhängig.
Ergänze zu einer Basis für V: $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha = \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\}$ und sei $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_n\}$ die Dualbasis. Setze $f := f_{k+1}$. □

Satz 1 **(Dimensionsformel für Annihilatoren)**
Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über K und $W \subseteq V$ ein Unterraum. Es gilt: $\dim W + \dim W^0 = \dim V$.

Beweis Sei $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ eine Basis für W. Ergänze zu einer Basis für V:
$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\}$. Sei $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ die Dualbasis.

Behauptung $\{f_{k+1}, \dots, f_n\}$ ist eine Basis für W^0.

Beweis Es ist klar, dass $f_i \in W^0$ für alle $i \geq k+1$, weil $f_i(\alpha_j) = \delta_{ij} = 0$, falls $i \geq k+1$ und $j \leq k$. Also wenn $\alpha \in W$, ist α eine lineare Kombination von $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ und $f_i(\alpha) = 0$ für alle $i \geq k+1$. Also $f_i \in W^0$ für alle $i \geq k+1$ wie behauptet.

Nun ist$\{f_{k+1}, \dots f_n\}$ linear unabhängig (Teil einer Basis). Also genügt es zu zeigen, dass span $\{f_{k+1}, \dots, f_n\} = W^0$.
Sei $f \in V^*$. Es gilt $f = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) f_i$ (allgemein). Ist aber $f \in W^0$, dann gilt $f(\alpha_i) = 0$ für alle $i \leq k$. Also gilt $f = \sum_{i=k+1}^n f(\alpha_i) f_i$. □

Korollar 2 Sei $\dim W = k, \dim V = n; W \subseteq V$ ein Unterraum.
Es gilt: W ist der Durchschitt von $(n-k)$ Hyperebenen von V.

Beweis In der Notation des obigen Beweises: $W = \bigcap_{i=k+1}^n \ker(f_i)$. □

Bemerkung Ist W eine Hyperebene. $\dim W = n-1$. Also ist $W = \ker(f_n)$ (wie angekündigt).

Korollar 3 W_1, W_2 sind Unterräume von V. Es gilt: $W_1^0 = W_2^0 \Rightarrow W_1 = W_2$.

Beweis Zum Widerspruch sei $W_1 \neq W_2$, zum Beispiel $\alpha \in W_2, \alpha \notin W_1$. Nach Korollar 1 existiert $f \in V^*$ mit $f(W_1) = \{0\}$ und $f(\alpha) \neq 0$. Also $f \in W_1^0$, aber $f \notin W_2^0$, ein Widerspruch. □