25. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS2011/2012: 31. Januar 2012

(WS 2015/2016: Korrekturen vom 25. Januar 2016)

Ansatz wie in der 24. Vorlesung.

Korollar 1 Sei L ein lineares Funktional auf V^*. Es existiert genau ein $\alpha \in V$ mit $L = L_\alpha$, i.e.
$$L(f) = f(\alpha) \text{ für alle } f \in V^* \qquad (**)$$

Beweis Setze $\alpha := \lambda^{-1}(L)$ □

Korollar 2 Sei $\mathbb{B}$ eine Basis für V^*. Dann existiert eine Basis $\mathcal{B}$ für V mit $\mathcal{B}^* = \mathbb{B}$.

Beweis Setze $\mathbb{B} = \{f_1, \ldots f_n\}$. Satz 1 (aus Vorlesung 22) liefert eine Dual-Basis zu
$$\mathbb{B}; \mathbb{B}^* := \{L_1, \ldots, L_n\} \text{ für} (V^*)^* = V^{**}$$
so dass $L_i(f_j) = \delta_{ij}$.

Korollar 1 liefert: Für alle i existiert genau ein $\alpha_i \in V$ mit $(**)$, i.e.
$$L_i(f) = f(\alpha_i) \text{ für alle } 1 \leq i \leq n; f \in V^*.$$

Insbesondere: $\delta_{ij} = L_i(f_j) = f_j(\alpha_i)$ für alle $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq n$.
Setze nun $\mathcal{B} := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ □

Bemerkung Sei $E \subseteq V^*$, dann ist $E^0 \subseteq V^{**}$.
$$E^0 = \{L \in V^{**} \mid L(f) = 0 \text{ für alle } f \in E\}.$$
Wir berechnen:
$$\lambda^{-1}(E^0) = \begin{cases} \{ \alpha \in V \mid \lambda(\alpha) \in E^0\} = \\ \{ \alpha \in V \mid L_\alpha \in E^0\} = \\ \{ \alpha \in V \mid L_\alpha(f) = 0 \quad \text{für alle} \quad f \in E\} = \\ \{ \alpha \in V \mid f(\alpha) = 0 \quad \text{für alle} \quad f \in E\} \end{cases} \qquad (\dagger)$$

Satz 2 Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum. Es gilt $\lambda^{-1}(W^{00}) = W$.

Beweis $\dim W + \dim W^0 = \dim V = \dim V^* = \dim W^0 + \dim W^{00}$. Dann gilt $\dim W = \dim W^{00} = \dim \lambda^{-1}(W^{00})$.
Es genügt nun zu zeigen, dass
$$W \subseteq \lambda^{-1}(W^{00}) = \{\alpha \in V \mid f(\alpha) = 0 \text{ für alle } f \in W^0\}$$
(siehe (†)). Aber $\alpha \in W$, also $f(\alpha) = 0$ für alle $f \in W^0$ per Definition ! □

Korollar 3 Sei $U \subseteq V^*$ ein Unterraum. Setze $W := \lambda^{-1}(U^0)$. Es gilt: $W^0 = U$.

Beweis $\dim V^* = \dim U + \dim U^0 = \dim V = \dim W + \dim W^0$. Also $\dim U = \dim W^0$ (weil $\dim W = \dim \lambda^{-1}(U^0) = \dim U^0$).
Es genügt zu zeigen, dass $U \subseteq W^0$.
$W = \{\alpha \in V \mid f(\alpha) = 0 \text{ für alle } f \in U\}$ (siehe (†)). Sei $f \in U$, dann gilt $f(\alpha) = 0$ für alle $\alpha \in W$. Also $f \in W^0$ per Definition. □

Kapitel 3: § 7 Die transponierte Abbildung

Ansatz wie immer.
Sei $T : V \longrightarrow W$ eine lineare Tranformation. T induziert eine Abbildung $T^t : W^* \longrightarrow V^*$ definiert durch $V^* \ni f := T^t(g) := g \circ T$ für $g \in W^*$, das heißt $f(\alpha) = (g \circ T)(\alpha) = g(T(\alpha))$ für alle $\alpha \in V$.

Behauptung T^t ist linear: $c \in K; g_1, g_2 \in W^*$. $T^t(cg_1 + g_2) = (cg_1 + g_2) \circ T =$
$c(g_1 \circ T) + (g_2 \circ T) = cT^t(g_1) + T^t(g_2)$.

Wir haben bewiesen:

Satz 3 Sei V, W ein (endlich dim) Vektorraum über K. Für jede lineare Abbildung $T : V \longrightarrow W$ existiert genau ein (auch lineares) $T^t : W^* \longrightarrow V^*$, so dass $T^t(g)(\alpha) = g(T(\alpha))$ für alle $g \in W^*, \alpha \in V$.