10. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS 2011/2012: 22. November 2011

(WS 2015/2016: Korrekturen vom 19. November 2015)

Korollar 1 Seien A, eine $n \times n$-Matrix, invertierbar. Eine Folge von elementaren Zeilenumformungen, die A zur Identitätsmatrix I_n reduzieren, reduziert I_n zu A^{-1}.

Beweis Die elementaren Zeilenumformungen werden durch Multiplikation (links) mit elementaren Matrizen erreicht, d.h. $E_\ell \ldots E_1 A = I_n$. Aber dann gilt: $A^{-1} = E_\ell \ldots E_1 = E_\ell \ldots E_1 I_n$. □

Beispiel 1 $(A \mid I_n) \to (I_n \mid A^{-1})$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(-1)Z_1 + Z_3]{(-2)Z_1 + Z_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2Z_2 + Z_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)Z_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[(-3)Z_3 + Z_1]{3Z_3 + Z_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-2)Z_2 + Z_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Kapitel 2: § 1 Vektorräume

Definition 1 Sei K ein Körper, $V \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge, versehen mit zwei Verknüpfungen

(i) Skalarmultiplikation

$$\bullet \; : K \times V \to V$$
$$(c, v) \mapsto cv \text{ und}$$

(ii) Vektorsumme

$$+ \; : V \times V \to V$$
$$(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$$

Das Triple $(V, \bullet, +)$ ist ein K-*Vektorraum* $(K - VR)$ oder *ein Vektorraum über* K (VR/K), falls die folgenden Axiome erfüllt sind: $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe und

$$\left.\begin{array}{rcl} 1 \cdot \alpha & = & \alpha \\ (c_1 c_2)\alpha & = & c_1(c_2\alpha) \\ c(\alpha_1 + \alpha_2) & = & c\alpha_1 + c\alpha_2 \\ (c_1 + c_2)\alpha & = & c_1\alpha + c_2\alpha \end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall \alpha \in V \\ \forall c_1, c_2 \in K \\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in V \\ \forall c \in K \end{array}$$

Beispiel 1 $V = K^n$ mit koordinatenweisen Verknüpfungen.

Beispiel 2 Allgemeiner: $K^{m \times n} := Mat_{m \times n}(K) :=$ die Menge aller $m \times n$-Matrizen mit Koeffizienten aus K und Matrizensumme und skalarvielfach.

Beispiel 3 Sei S eine Menge.
$V := \{f; f : S \to K; f \text{ Abbildung } \}$
$V := K^S$ mit Funktionensummen und skalarvielfach.

Beispiele 1 und 2 sind Sonderfälle von Beispiel 3.

Beispiel 4 Der VR der Polynomialfunktionen über K
$f(x) = c_0 + c_1 x^1 + \cdots + c_n x^n, c_i \in K.$

Beispiel 5 $K \;/\; k$ eine Körpererweiterung.

Proposition 1 Für $c \in K, \alpha \in V$

(1) $c \cdot 0 = 0$

(2) $0 \cdot \alpha = 0$

(3) $c \cdot \alpha = 0 \Rightarrow c = 0$ oder $\alpha = 0$

(4) $(-1) \cdot \alpha = -\alpha$

Definition 2 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V; \alpha \in V$ ist eine *lineare Kombination* (von $\alpha_1, \dots, \alpha_n$), wenn es $c_1, \dots, c_n \in K$ gibt mit $\alpha = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i$.

Proposition 2 $\sum c_i \alpha_i + \sum d_i \alpha_i = \sum (c_i + d_i) \alpha_i$
$c \sum c_i \alpha_i = \sum (c c_i) \alpha_i$.