18. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS2011/2012: 20. Dezember 2011

(WS 2015/2016: Korrekturen vom 17. Dezember 2015)

Bemerkung V endlich dim; $T : V \to W$ eine lineare Transformation.
Es gilt: $R_T = T(V) \subseteq W$ (Unterraum) ist endlich erzeugt, weil:
Sei $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ eine Basis für V und $\alpha \in V$.
$T(\alpha) = T(\sum c_i\alpha_i) = \sum c_i T(\alpha_i) = \sum c_i\beta_i$.
$\Rightarrow T(\alpha) \in$ span $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$. Also $R_T =$ span $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$. □

Satz 1 V endlich dim; $T : V \to W$.
Es gilt: dim $V =$ dim ker $T+$ rang T.

Beweis Sei $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ eine Basis für $N = \ker T$. Sei $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n \in V$, so dass $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n\}$ eine Basis für V ist.
Behauptung: $\{T(\alpha_{k+1}), \ldots, T(\alpha_n)\}$ bilden eine Basis für R_T.
Beweis: Aus Bemerkung 1 folgt: $\{\underbrace{T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_k)}_{=0}, T(\alpha_{k+1}), \ldots, T(\alpha_n)\}$ erzeugen R_T.

Also $\{T(\alpha_{k+1}), \ldots, T(\alpha_n)\}$ erzeugen R_T. Sei nun $\sum_{i=k+1}^n c_i(T(\alpha_i)) = 0$.

Also $T(\underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} c_i\alpha_i}_{:=\alpha}) = 0$.

Also $\alpha \in N$; es existiert $b_1, \ldots, b_k \in K$ mit $\alpha = \sum_{i=1}^k b_i\alpha_i$.

Also $0 = \alpha - \alpha = \sum_{i=1}^k b_i\alpha_i - \sum_{j=k+1}^k c_j\alpha_j = 0$.

Aber $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n\}$ sind linear unabhängig also $b_1 = \cdots = b_k = c_{k+1} = \cdots = c_n = 0$. □

Beispiel A ist eine $m \times n$-Matrix. $T_A : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}$
$T_A(X) := AX$
$\ker T_A =$ Lösungsraum $AX = 0$.
$R_{T_A} = \{Y \in K^{m\times 1};$ existiert $X : AX = Y\}$ (*)

Seien $A_1, \ldots, A_n$ Spalten von A. Dann ergibt $(*)$: $Y \in R_{T_A}$ genau dann, wenn existiert X, so dass $Y = x_1A_1 + \cdots + x_nA_n$.
Also $R_{T_A} =$ Spaltenraum von A und rang $(T_A) =$ Spaltenrang von A, wobei Spaltenraum := span $\{A_1, \ldots, A_n\}$; Spaltenrang := dim Spaltenraum.

Kapitel 3: § 3 Die Algebra der linearen Transformation

Seien V, W Vektorräume über K. Wir haben gesehen, dass Fkt $(V, W) = \{f \mid f : V \to W \text{ eine Funktion }\}$ versehen mit Funktion Addition und Skalarmultiplikation ein K-Vektorraum ist.

Satz 2 Setze $L(V, W) := \{T \mid T : V \to W \text{lineare Transformation}\} := L$ mit Addition
$(T + U)(\alpha) := T(\alpha) + U(\alpha)$ für alle T und $U \in L$
$(dT)(\alpha) := d(T(\alpha)) \quad d \in K$.
Es gilt: $T + U \in L$ und $dT \in L$.

Beweis $(T + U)(c\alpha + \beta) = c(T + U)(\alpha) + (T + U)(\beta)$ (Übungsaufgabe)
$(dT)(c\alpha + \beta) = dT(c\alpha + \beta) = d(cT(\alpha) + T(\beta)) = cdT(\alpha) + dT(\beta)$
$= c(dT(\alpha)) + (dT)(\beta)$. □

Bemerkung $0 \in L(V, W); L(V, W) \neq \emptyset$. Also $L(V, W) \subseteq$ Fkt (V, W) (Unterraum). Insbesondere ist $L(V, W)$ ein K-Vektorraum.

Satz 3 V n-dim, W m-dim über K. Dann ist dim $L(V, W) = mn$.

Beweis $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ist eine geordnete Basis von V und $\mathcal{B}' = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ ist eine geordnete Basis von W. Für jedes (p, q) mit $1 \leq p \leq m$ und $1 \leq q \leq n$ definieren wir $E^{p,q}$ ist eine lineare Transformation:

$E^{p,q} : V \to W$ definiert für $j = 1, \dots, n$

$$E^{p,q}(\alpha_j) := \begin{cases} 0 & j \neq q \\ \beta_p & j = q \end{cases} = \delta_{jq}\beta_p$$

Behauptung $\{E^{p,q} : 1 \leq p \leq m \text{ und } 1 \leq q \leq m\}$ bilden eine Basis für L.

Beweis Sei $T : V \to W$ und $1 \leq j \leq n$. Schreibe $T(\alpha_j) = \sum_{p=1}^{m} A_{pj}\beta_p$ in $\mathcal{B}'$ für geeignete $A_{pj} \in K$.

Zwischenbehauptung: $T = \underbrace{\sum_p \sum_q A_{pq}E^{p,q}}_{:=U}$,

$$\begin{array}{llll} \text{weil} & U(\alpha_j) & = & (\sum_p \sum_q A_{pq}E^{p,q})(\alpha_j) \\ & & = & \sum_p \sum_q A_{pq}\delta_{jq}\beta_p \\ & & = & \sum_{p=1}^{m} A_{pj}\beta_p \\ & & = & T(\alpha_j) \end{array}.$$

Also $U(\alpha) = T(\alpha)$ für alle $\alpha \in V$. Also $U = T$.

Also $\{E^{p,q} : 1 \leq p \leq m \text{ und } 1 \leq q \leq m\}$ erzeugen L.
Linear unabhängig ?

Sei $U = \sum_p \sum_q A_{pq} E^{p,q} = 0$ für $A_{pq} \in K$. Also gilt für alle $j = 1, \dots, n$: $U(\alpha_j) = 0$ i.e. $\sum_{p=1}^{m} A_{pj}\beta_p = 0$. Nun ist $\{\beta_p : 1 \leq p \leq m\}$ linear unabhängig $\Rightarrow A_{pj} = 0$ für alle p und j. $\square$

Satz 4 Seien V, W, Z Vektorräume über K und T, U lineare Transformationen.

$V \xrightarrow{T} W \quad W \xrightarrow{U} Z$.

Es gilt $V \xrightarrow{U \circ T} Z$ ist wieder linear.

Beweis $(U \circ T)(c\alpha + \beta) = U(T(c\alpha + \beta)) = U(cT(\alpha) + T(\beta)) = cU(T(\alpha)) + U(T(\beta)) = c(U \circ T)(\alpha) + (U \circ T)(\beta)$ $\square$

Sonderfall $V = W = Z$. Also hat $L(V, V)$ eine Vektorenmultiplikation $UT := U \circ T$.

Bezeichnung Schreibe $T^0 := I$ (Identitätsabbildung)

$T^2 := T \circ T$

$T^n := T \circ \cdots \circ T$

Definition Sei K ein Körper. Eine *lineare Algebra* L über K ist ein K-Vektorraum, versehen mit einer Vektorenmultiplikation, so dass

(a) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ für alle $\alpha, \beta, \gamma \in L$

(b) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ und $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$ für alle $\alpha, \beta, \gamma \in L$

(c) $c(\alpha\beta) = (c\alpha)\beta = \alpha(c\beta)$ für alle $c \in K$.

(d) Falls ein $I \in L$ existiert mit $I \cdot \alpha = \alpha \cdot I = \alpha$ für alle $\alpha \in L$, heißt L eine lineare Algebra mit Einheit.

(e) Falls $\alpha\beta = \beta\alpha$ für alle $\alpha, \beta \in L$ heißt L kommutativ.

Lemma $L(V, V)$ ist eine K-lineare Algebra mit Einheit i.e. es gelten

(a) $I \cdot U = U \cdot I = U$

(b) $U(T_1 + T_2) = UT_1 + UT_2$ und $(T_1 + T_2)U = T_1U + T_2U$

(c) $c(UT_1) = (cU)T_1 = U(cT_1)$

Beweis

(a) Ergibt sich.

(b) $U(T_1 + T_2)(\alpha) = U((T_1 + T_2)(\alpha)) = U(T_1(\alpha) + T_2(\alpha))$
$= U(T_1(\alpha)) + U(T_2(\alpha)) = (UT_1)(\alpha) + (UT_2)(\alpha)$.
Auch $((T_1 + T_2)U)(\alpha) = (T_1 + T_2)(U(\alpha)) = T_1(U(\alpha)) + T_2(U(\alpha))$
$= (T_1U + T_2U)(\alpha)$.

(c) Analog. $\square$