16. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Lothar Sebastian Krapp, Gabriel Lehéricy

SS 2016: 9. Juni 2016

Erinnerung (Quotientenraum) und direkte Summen aus Lineare Algebra I:

(1) Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum. $V/W = \{\alpha + W \mid \alpha \in V\}$ mit $c(\alpha + W) = c\alpha + W$ für $c \in K$ und $(c\alpha + W) + (\beta + W) = (c\alpha + \beta) + W$ für $\alpha, \beta \in V$.
Bezeichnung: $\alpha + W := \overline{\alpha}$.

(2) **Kanonischer Homomorphismus**
$\pi : V \twoheadrightarrow V/W$
$\pi(\alpha) := \alpha + W$ ist surjektiv mit $\ker \pi = W$.

(3) **Isomorphiesatz**
Sei $\varphi : V \to U$ ein Homomorphismus von K-Vektorräumen. Es gilt: $V/\ker\varphi \simeq \operatorname{Im}\varphi$.

(4) Seien $W_1, W_2 \subseteq V$ Unterräume. Man schreibt $V = W_1 \oplus W_2$ (direkte Summe), falls $V = W_1 + W_2$ und $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Das heißt für alle $\alpha \in V$ existiert genau ein $(w_1, w_2) \in W_1 \times W_2$, so dass $\alpha = w_1 + w_2$.

Projektion Homomorphismus
$\pi : W_1 \oplus W_2 \twoheadrightarrow W_2; \pi(w_1 + w_2) := w_2$ ist surjektiv mit $\ker \pi = W_1$. Also gilt

$$\frac{W_1 \oplus W_2}{W_1} \simeq W_2.$$

(5) Die Abbildung

$$\overline{T} : V/W \to V/W$$

(für $W \subseteq V$ T-invariant, wobei $T \in \mathcal{L}(V, V)$) wird so definiert:

$$\overline{T}(\overline{\alpha}) = \overline{T}(\alpha + W) := T(\alpha) + W = \overline{T(\alpha)}.$$

Sie ist wohldefiniert, i.e. $\alpha_1 + W = \alpha_2 + W \Rightarrow T(\alpha_1) + W = T(\alpha_2) + W$, weil $\alpha_1 - \alpha_2 \in W \Rightarrow T(\alpha_1 - \alpha_2) \in W \Rightarrow T(\alpha_1) - T(\alpha_2) \in W \Rightarrow T(\alpha_1) + W = T(\alpha_2) + W$. Sie ist auch linear (Übungsaufgabe). Also $\overline{T} \in \mathcal{L}(V/W, V/W)$.

Satz 1 Sei V endl. dim., $W \subseteq V, T \in \mathcal{L}(V, V)$ und W T-invariant. Sei $\mathcal{B}'$ eine Basis für W, ergänze zu einer Basis $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ von V. Es gilt:

$$A := [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

wobei $B = [T_W]_{\mathcal{B}'}$ und $D = [\overline{T}]_{\overline{\mathcal{B}''}}$. ($\overline{\mathcal{B}''} := \{\overline{\alpha}; \alpha \in \mathcal{B}''\}$)

Wir brauchen ein Lemma:

Lemma Sei V endl. dim.

(1) Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum; $\mathcal{B}' \subseteq W$ eine Basis für W, $\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ eine ergänzende Basis für V. Dann ist $\overline{\mathcal{B}''}$ eine Basis für V/W.

(2) Umgekehrt sei $\{\overline{\alpha}_{r+1}, \dots \overline{\alpha}_n\}$ eine Basis für V/W, dann ist $\mathcal{B}' \cup \{\alpha_{r+1}, \dots \alpha_n\}$ eine Basis für V. (Übungsaufgabe, Übungsblatt) □

Beweis vom Satz Setze $r := \dim W$; B ist $r \times r$. Also ist $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n\}$.
Die Aussage über B ist bereits in der 15. Vorlesung bewiesen worden.
Wir analysieren die $(n-r) \times (n-r)$-Matrix D. Die Matrix $A = [T]_{\mathcal{B}}$ ist durch die folgenden Gleichungen definiert:

$$T(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}\alpha_j \text{ für } 1 \le i \le n \qquad (*)$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} B \\ r \times r \\ --- \\ \\ \end{matrix} & [T(\alpha_{r+1})]_{\mathcal{B}} & \cdots & [T(\alpha_n)]_{\mathcal{B}} \end{array} \right)$$

$$\mathcal{B} = \{\underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_r}_{|\ \mathcal{B}'\ | = r}, \underbrace{\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n}_{|\ \mathcal{B}''\ | = (n-r)}\}$$

$$\overline{\mathcal{B}''} = \{\underbrace{\overline{\alpha_{r+1}}, \dots, \overline{\alpha_n}}_{|\ \mathcal{B}''\ | = n-r}\}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} B \\ --- \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix} A_{1r+1} \\ \vdots \\ A_{r(r+1)} \\ A_{(r+1)(r+1)} \\ \vdots \\ A_{n(r+1)} \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} A_{1n} \\ \vdots \\ A_{rn} \\ A_{(r+1)n} \\ \vdots \\ A_{nn} \end{matrix} \end{array} \right)$$

oder für $1 \le i \le n$

$$T(\alpha_i) = \underbrace{\sum_{j=1}^{r} A_{ji}\alpha_j}_{\in W} + \sum_{j=r+1}^{n} A_{ji}\alpha_j \qquad (**)$$

und damit ist:

$$\overline{T(\alpha_i)} = \sum_{j=r+1}^{n} A_{ji}\overline{\alpha_j} = \overline{T}(\overline{\alpha_i}) \text{ für } r+1 \le i \le n$$ □

Korollar 1 Char. Pol. T = (Char. Pol. T_W)(Char. Pol. $\overline{T}$). (Für Min. Pol. T siehe Übungsblatt 9, Aufgabe 9.3.)

Korollar 2 T ist trigonalisierbar genau dann, wenn Char. Pol. (T) im Produkt von linearen Faktoren über K zerfällt.

Bemerkung Wir haben schon diese Tatsache bewiesen. Hier geben wir kurz einen zweiten Beweis (mit T_W und $\overline{T}$).

Beweis "$\Rightarrow$" wie im 1. Beweis

"$\Leftarrow$" **Per Induktion** (nach $\dim V$)
(wir wollen eine Basis $\mathcal{B}$ für V, so dass die Matrixdarstellung von T ein Dreieck ist.)
Anfang: $n = 1$ ist trivial. I. Annahme: gilt für $n-1$.
Sei c_1 ein Eigenwert von T und $\alpha_1 \neq 0$ ein Eigenvektor dazu.
Setze $W := \{c\alpha_1; c \in K\}$. Es ist klar, dass W T-invariant ist.
Betrachte V/W und $\overline{T} \in \mathcal{L}(V/W, V/W)$. Nun ist $\dim V/W = (n-1)$.
Wir haben
Char. Pol. T = (Char. Pol. T_W)(Char. Pol. $\overline{T}$) (†)
$T_W \in \mathcal{L}(W,W)$ und $T_W(\alpha) = c_1\alpha$ für alle $\alpha \in W$ (weil $T(\alpha) = T(c\alpha_1) = cT(\alpha_1) = cc_1\alpha_1 = c_1c\alpha_1$ mit $\alpha = c\alpha_1$).
Also ist $A_W := [T_W]_{\{\alpha_1\}} = [c_1]$ und $\det(xI - A_W) = \det(x.1 - c_1) = (x - c_1)$.
Also bekommen wir mit (†) Char. Pol. $T = (x - c_1)$ Char. Pol. $\overline{T}$. Wir sehen also, dass auch Char. Pol. $\overline{T}$ im Produkt von linearen Faktoren über K zerfällt. Die I. Annahme liefert nun eine Basis $\overline{\beta_2}, \ldots, \overline{\beta_n}$ von V/W, wofür die Matrixdarstellung von $\overline{T}$ eine obere Dreiecksmatrix ist.
Setze $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ □

Nun betrachten wir diese Aussage für Min. Pol. (T).

Korollar 3 Sei V endl. dim., $T \in \mathcal{L}(V,V)$. T ist trigonalisierbar genau dann, wenn Min. Pol. (T) im Produkt von linearen Faktoren über K zerfällt.

Beweis Wir zeigen: Char. Pol. (T) zerfällt im Produkt von linearen Faktoren über K genau dann, wenn Min. Pol. (T) im Produkt von linearen Faktoren über K zerfällt.

"$\Rightarrow$" Min. Pol. (T) teilt Char. Pol. (T). Da lineare Faktoren irreduzibel sind, folgt aus der Eindeutigkeit der Primfaktorisierung in $K[x]$, dass auch Min. Pol (T) ein Produkt von linearen Faktoren ist.

"$\Leftarrow$" Sei Min. Pol. $(T) = \prod_{i=1}^{k}(x - c_i)^{\nu_i}$.
Min. Pol. (T) teilt Char. Pol. (T) und beide Polynome haben dieselben Nullstellen in K (und in jeder Körpererweiterung).

Beweis "⇐" Fortsetzung:

Also Char. Pol. (T) = Min. Pol. (T) $q(x)$ mit $q(x) \in K[x]$; nun ist $q(x)$ reduzibel in einer alg. abg. Körpererweiterung $C \supseteq K$ und zerfällt im Produkt

$$q(x) = \prod_{j=1}^{\ell} (x - d_j) \text{ über } C.$$

Wir behaupten, dass d_j bereits in K liegt und $d_j = c_i$ fur geeignetes i. Dies gilt, weil d_j sonst eine Nullstelle von Min. Pol. (T) mit $d_j \in C \backslash K$ wäre (i.e. $d_j \in C$ aber $d_j \notin K$).
Dies ist aber unmöglich, da Min. Pol. (T) bereits alle seine Nullstellen in K hat. □