13. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Lothar Sebastian Krapp, Gabriel Lehéricy

SS 2016: 2. Juni 2016

§ 10 Annihilator Ideal

Sei V ein K-Vektorraum und $T \in \mathcal{L}(V,V)$ mit $p \in K[x]$.

Proposition 1 Sei $\dim V = n$. Es gelten:

(1) $\mathcal{A}(T) := \{p \in K[x] \mid p(T) = 0\}$ ist ein Ideal.

(2) $\mathcal{A}(T) \neq \{0\}$.

Beweis

(1) $(p+q)(T) = p(T) + q(T)$
$(pq)(T) = p(T)q(T)$

(2) Betrachte die Elemente $I, T, T^2, \ldots, T^{n^2} \in \mathcal{L}(V,V)$.
Da $\dim \mathcal{L}(V,V) = n^2$, sind diese Elemente notwendig linear abhängig. Also existiert $c_0, \ldots, c_{n^2} \in K$ mit $c_0 I + c_1 T + \cdots + c_{n^2} T^{n^2} = 0$ und c_i nicht alle gleich Null. □

Definition 1 Der (eindeutig bestimmte) normierte Erzeuger von $\mathcal{A}(T)$ ist das *minimale Polynom von T* (Min. Pol. (T)).

Bemerkung 1

(i) deg (Min. Pol. (T)) $\leq n^2$.
Wir werden aber eine bessere obere Schranke bekommen.

(ii) $p :=$ Min. Pol. (T) ist das normierte Polynom vom kleinsten Grad in $\mathcal{A}(T)$. Ist also charakterisiert durch:

(a) $p \in K[x]$

(b) $p(T) = 0$

(c) $\deg q < \deg p \Rightarrow q(T) \neq 0$

Definition 2 $A \in Mat_{n\times n}(K)$.
Min. Pol. (A) ist der normierte Erzeuger von $\mathcal{A}(A)$ (analog definiert).

Bemerkung 2

(1) Sei $\mathcal{B}$ eine Basis für V. Für $f \in K[x]$ gilt

$$[f(T)]_{\mathcal{B}} = f([T]_{\mathcal{B}}) \text{ (Übungsblatt).}$$

Also $f(T) = 0 \Leftrightarrow f(A) = 0$ für $A = [T]_{\mathcal{B}}$.

(2) Also haben ähnliche Matrizen das gleiche minimale Polynom.

Satz 1 Sei $\dim V$ endlich, $T \in \mathcal{L}(V,V)$ (oder $A \in Mat_{n\times n}(K)$). Es gilt: Char. Pol. (T) und Min. Pol. (T) haben dieselben Nullstellen (bis auf Vielfachheit).

Beweis Seien $p :=$ Min. Pol. (T) und $c \in K$. Zu zeigen: $p(c) = 0 \Leftrightarrow c$ ist Eigenwert von T.

"$\Rightarrow$" $p(c) = 0 \Rightarrow p = (x-c)q$; $\deg q < \deg p$. So $q(T) \neq 0$.
Wähle $\beta \in V$ mit $\alpha := q(T)(\beta) \neq 0$.
Es gilt $0 = p(T)(\beta) = (T - cI)q(T)(\beta) = (T - cI)(\alpha)$. Also ist $\alpha \neq 0$ Eigenvektor zum Eigenwert c.

"$\Leftarrow$" Umgekehrt sei $T(\alpha) = c\alpha; \alpha \neq 0, \alpha \in V, c \in K$.
Nun gilt $p(T)(\alpha) = p(c)\alpha$ (Übungsblatt).
Da aber $p(T) = 0$ und $\alpha \neq 0$, folgt daraus $p(c) = 0$. □

Proposition 2 Sei T diagonalisierbar. Dann zerfällt Min. Pol. (T) in verschiedene lineare Faktoren. (Wir werden später primäre Zerlegung anwenden, um die Umkehrung dieser Aussage auch zu beweisen.)

Beweis Sei T diagonalisierbar, $c_1, \dots, c_k \in K$ die verschiedenen Eigenwerte, $p :=$ Min. Pol. (T).

Behauptung
$p = (x - c_1)\cdots(x - c_k)$. Dies gilt, weil $(T - c_1 I)\cdots(T - c_k I)(\alpha) = 0$ für jeden Eigenvektor α (weil α Eigenvektor zum Eigenwert c_i ist, für ein geeignetes i). Da es eine Basis von Eigenvektoren gibt, ist $p(T) = 0$. □

Nun berechnen wir das minimale Polynom für die Beispiele (1), (2) und (3) aus der 11. Vorlesung.
Wir bezeichnen p als minimales Polynom.
(3) $p = (x-1)(x-2)$, weil T diagonalisierbar ist (Proposition 2 anwenden).
(2) T ist nicht diagonalisierbar. Also können wir Proposition 2 nicht anwenden, aber Satz 1 können wir anwenden.

Da Char. Pol. $(T) = (x-1)(x-2)^2$ ist, hat p die Nullstellen 1 und 2. Wir probieren Polynome der Form

$$(x-1)^k(x-2)^\ell \text{ mit } k \geq 1 \text{ und } \ell \geq 1$$

("prüfen", ob sie T annihilieren).

$(x-1)(x-2)$:

$$(A - I)(A - 2I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \neq 0$$

Also ist $\deg(p) \geq 3$. Nun probieren wir

$$(x-1)^2(x-2) \text{ oder } (x-1)(x-2)^2$$

$(A - I)(A - 2I)^2 = 0$. Also ist hier Char. Pol. $(T) =$ Min. Pol. (T). □

Der Satz von Cayley Hamilton wird uns helfen, weniger "prüfen" zu müssen.