1. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Lothar Sebastian Krapp, Gabriel Lehéricy

SS 2016: 12. April 2016

§ 1 Algebren

Erinnerung Sei K ein Körper. Eine *K-Algebra* $\mathcal{A}$ ist ein K-Vektorraum mit einer Multiplikation von Vektoren:

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

$$(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha\beta,$$

so dass für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$ und $c \in K$ gilt:

(a) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$

(b) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ und $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$

(c) $c(\alpha\beta) = (c\alpha)\beta = \alpha(c\beta)$

Falls es $1 \in \mathcal{A}$ gibt, so dass $1\alpha = \alpha 1 = \alpha$ für alle $\alpha \in \mathcal{A}$ gilt, dann heißt die Algebra eine *Algebra mit Einheit.*
Falls gilt $\alpha\beta = \beta\alpha$ für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ heißt $\mathcal{A}$ eine *kommutative Algebra.*

Beispiel 1 $\mathcal{A} := M_{n\times n}(K)$ ist eine nicht kommutative Algebra mit Einheit

Beispiel 2 $\mathcal{A} := L(V, V)$ ist eine nicht kommutative Algebra mit Einheit

Beispiel 3 Potenzreihen Algebra
Betrachte $K^{\mathbb{N}_0} := \{f; f : \mathbb{N}_0 \to K, f \text{ Abbildung }\}$
Schreibe $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (f_0, f_1, \ldots)$
Addition punktweise, i.e. $(f + g)_n := f_n + g_n$ $(*)$
Skalarmultiplikation, auch punktweise : $(cf)_n := cf_n$
Produkt: $(fg)_n := \sum_{i=0}^{n} f_i g_{n-i}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ $(**)$

Proposition 1 $\mathcal{A} := K^{\mathbb{N}_0}$ mit den Verknüpfungen (wie in $(*)$ und $(**)$ erklärt) ist eine kommutative Algebra mit Einheit.

Erinnerung In Lineare Algebra I hatten wir die Axiome der K-Vektorräume für $K^{\mathbb{N}_0}$ bewiesen.

Beweis $(gf)_n = \sum_{i=0}^{n} g_i f_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} g_{n-i} f_i = \sum_{i=0}^{n} f_i g_{n-i} = (fg)_n$: kommutatives Produkt.

Beweis, Forts.

$$\begin{aligned}\big[(fg)h\big]_n &= \sum_{i=0}^{n}(fg)_i h_{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{i} f_j g_{i-j}\Big)h_{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} f_j g_{i-j} h_{n-i}\\ &= \sum_{j=0}^{n} f_j \sum_{i=0}^{n-j} g_i h_{n-i-j} = \sum_{j=0}^{n} f_j \sum_{i=0}^{n-j} g_i h_{(n-j)-i} = \sum_{j=0}^{n} f_j (gh)_{n-j}\\ &= \big[f(gh)\big]_n\text{: assoziatives Produkt.}\end{aligned}$$

ÜA, ÜB: Die übrigen Axiome (b) und (c).
Zeigen Sie auch, dass $1 := (1, 0, \dots, 0, \dots)$ eine Einheit ist.

Notation $x := (0, 1, 0, \dots)$ $\quad x^0 := 1 \quad x^n := x \cdots x$ (n-mal)

Proposition 2

(1) $x^k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (1 ist die k-te Stelle) für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

(2) $\{x^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ sind linear unabhängig. Also ist $K^{\mathbb{N}_0}$ unendlich dim.

Beweis Bereits in Linear Algebra I geführt.

Definition und Notation $\mathcal{A} = K^{\mathbb{N}_0}$ heißt die Algebra der Potenzreihen über K.
Sie wird bezeichnet als $\mathcal{A} := K[\![x]\!]$.

Warum Potenzreihen? Formale Schreibweise: $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$.

§ 2 Die Polynom-Algebra

Notation $K[x] := \operatorname{span}\{x^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$

Definition $f \in K[x]$ heißt *Polynom über K*.

Degree, Grad
Sei nun $f \neq 0$, $f \in K[\![x]\!]$. Es gilt: $f \in K[x]$ genau dann, wenn es genau ein $n \in \mathbb{N}_0$ exisitert mit $f_n \neq 0$ und $f_k = 0$ für alle $k > n$.

Notation, Definition
$\deg f := n$ (Grad von f ist n).

NB $\deg f = n \Leftrightarrow f = f_0x^0 + f_1x^1 + \cdots + f_nx^n; f_n \neq 0$.
f_i heißen *Koeffizienten von f*.

Definition Ein Polynom dergestalt $f = f_0x^0$ ist ein *Skalarpolynom* ($\deg f = 0$ oder $f = 0$).
Ein Polynom $f \neq 0$ ist normiert, falls $\deg f = n$ und $f_n = 1$.