Algebraische Zahlentheorie
Algebra B 4 - Sommersemester 2017
Prof'in Dr. Salma Kuhlmann

5.Vorlesung

11. Mai 2017

Notation
$R^n := \{(r_1, \ldots, r_n) \mid r_i \in R\}$ freier R-Modul (mit Komponentenweise Addition und Skalarmultiplikation), Standard Basis: $\{e_i \mid i = 1, \ldots, n\}$.

Lemma 5.1
Sei M ein R-Modul. Es gilt:
M ist endlich erzeugt $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ und $K \leq R^n$ mit $M \cong R^n/K$.

Beweis. „$\Leftarrow$" Lemma 4.2.
„$\Rightarrow$" Sei $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq M$ erzeugend. Betrachte

$$\begin{array}{cccc} \phi & R^n & \to & M \\ & (r_1, \ldots, r_n) & \mapsto & \sum r_i x_i \end{array}$$

ϕ ist ein surjektiver Homomorphismus, $K := \ker(\phi)$. □

Bemerkung 5.1
Sei M wie im Lemma 5.1: $M \neq \{0\}$ endlich erzeugt, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ erzeugend. Dann gilt:
M ist genau dann frei mit Basis $\{x_1, \ldots, x_n\}$, wenn $\ker(\phi) = \{0\}$.
(Inbesondere für $x \in M, x \neq 0$ ist der Hauptmodul Rx genau dann frei mit Basis $\{x\}$, wenn $\{r \in R \mid rx = 0\} = \{0\}$.)

Erinnerung: $M_{\text{tor}} = \{x \in M \mid \exists r \text{ kein Nullteiler }, rx = 0\}$.
M ist torsionsfrei, wenn $M_{\text{tor}} = \{0\}$.
M ist ein Torsionsmodul, wenn $M_{\text{tor}} = M$.

Lemma 5.2 (a) M_{tor} ist ein Torsionsmodul und

(b) M/M_{tor} ist torsionsfrei.

Beweis. (a) ÜA

(b) Sei $\bar{x} \in M/M_{\text{tor}}$, $\bar{x}$ Torsionselement. Es existiert $b \in R$ kein Nullteiler mit $b\bar{x} = 0$, d.h. $bx \in M_{\text{tor}}$, also gibt es $c \in R$ kein Nullteiler mit $cbx = 0 =$, also $x \in M_{\text{tor}}$ und $\bar{x} = 0$. □

Bemerkung 5.2 (i) M frei $\Rightarrow$ M torsionsfrei.

Beweis. Sei $x \in M_{\text{tor}}$ und $\{x_i\}$ eine Basis von M. Schreibe $x = \sum r_i x_i$ und sei $r \in R$ nicht Nullteiler, so dass $rx = 0$. Es ist $\sum (rr_i) x_i = 0$. $\{x_i\}$ linear unabhängig$\Rightarrow rr_i = 0 \forall i \Rightarrow r_i = 0 \forall i \Rightarrow x = 0$ □

(ii) M torsionsfrei und $N \leq M \Rightarrow N$ torsionsfrei.

(iii) R Integritätsbereich$\Rightarrow M_{\text{tor}} = \{x \in M \mid \exists r \in R, r \neq 0, rx = 0\}$

(iv) R Integritätsbereich, $x \notin M_{\text{tor}} \Rightarrow Rx$ ist frei.

§Moduln über Hauptidealbereiche

Sei nun R stets ein Hauptidealbereich.

Satz 5.1
Sei F endlich erzeugt und frei, und $M \leq F$. Dann ist M frei und $\dim_R M \leq \dim_R F$. Insbesondere ist M endlich erzeugt.

Beweis. Sei $\{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Basis für F. Setze $M_m = M \cap \operatorname{Span}_R\{x_1, \ldots x_m\}$ für $m \leq n$. Wir zeigen per Induktion, daß M_m frei ist mit $\dim_R M_m \leq m$ (und damit gilt es auch für $M = M_n$).
$M_1 = M \cap Rx_1$. $x_1 \notin M_{\text{tor}}$, also ist Rx_1 frei.

$$\begin{array}{rccc} \phi: & R & \xrightarrow{\sim} & Rx_1 \\ & r & \longmapsto & rx_1 \end{array}$$

$M_1 \leq Rx_1 \Rightarrow \phi^{-1}(M_1) \lhd R \Rightarrow \phi^{-1}(M_1) =< a_1 >$ für $a_1 \in R$ und $M_1 = \phi(< a_1 >) = R(a_1x_1)$.
Also ist M_1 frei mit $\dim_R M_1 \leq 1$.
Per Induktion nehmen wir nun an: M_m ist frei, $\dim M_m \leq m$. Betrachte $\{a \in R \mid \exists x \in M, \text{ so dass } x = b_1x_1 + \cdots + b_mx_m + ax_{m+1}\}$ ein Ideal in R (ÜA).
Sei $a_{m+1} \in R$ ein Erzeuger davon. Ist $a_{m+1} = 0$, so ist $M_{m+1} = M_m$ und unser Beweis ist fertig. Sonst gilt $a_{m+1} \neq 0$: Setze $w = a_{m+1}x_{m+1} + v \in M_{m+1}$ mit $v \in \operatorname{Span}\{x_1, \ldots, x_m\}$. Sei $x \in M_{m+1}$; es existieren $b_1, \ldots, b_m, a \in R$ mit $x = b_1x_1 + \cdots + b_mx_m + ax_{m+1}$, also

$$\begin{aligned} x &= b_1x_1 + \cdots + b_mx_m + (ca_{m+1})x_{m+1} \\ &= (b_1x_1 + \cdots + b_mx_m) + (cw - cv), \end{aligned}$$

also $x - cw = \sum b_ix_i - cv \in M_{m+1} \cap \operatorname{Span}\{x_1, \ldots, x_m\} = M_m$. Wir haben gezeigt:
$M_{m+1} = M_m + Rw$ mit $w \neq 0$, $w \notin M_{\text{tor}}$, Rw frei mit Basis $\{w\}$. Außerdem ist $M_m \cap Rw = \{0\}$, also $M_{m+1} = M_m \oplus Rw$ und damit direkte Summe von freien Moduln, also ist M_{m+1} frei und $\dim_R M_{m+1} = \dim_R M_m + \dim_R Rw \leq m + 1$.

□

Korollar 5.2
Sei M endlich erzeugt und $N \leq M$. Dann ist N endlich erzeugt.

Beweis. OE gilt $M = R^n/K$ (per Lemma 5.1). Betrachte

$$\begin{array}{rccc} \Pi: & R^n & \rightarrow & R^n/K \\ & y & \mapsto & \bar{y} \end{array}$$

Projektionshomomorphismus.
$N \leq R^n/K \Rightarrow \Pi^{-1}(N) \leq R^n$. Satz 5.1$\Rightarrow \Pi^{-1}(N)$ ist endlich erzeugt.
Lemma 4.2$\Rightarrow N = \Pi^{-1}(N)/K$ ist auch endlich erzeugt.

□

Satz 5.3
Sei M endlich erzeugt und torsionsfrei. Dann ist M frei.

Beweis. Sei $\{y_1 \ldots, y_m\} \subseteq M$ erzeugend und $\{v_1, \ldots, v_n\}$ darunter maximal linear unabhängig. Sei $y \in \{y_1, \ldots, y_m\}$. Nach Maximalität existieren $a, b_1, \ldots, b_n \in R$ nicht alle 0, so dass $ay + b_1v_1 + \cdots + b_nv_n = 0$ und $a \neq 0$ (weil $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig). Wir sehen also:

$\forall j=1,\dots,m, \exists a_j \in R, a_j \neq 0 \wedge a_j y_j \in \operatorname{Span}\{v_1,\dots,v_n\}$, also $(a_1\dots a_m)M \leq \underbrace{\operatorname{Span}\{v_1,\dots,v_n\}}_{\text{frei}}$,

also (Satz 5.1) ist $(a_1 \dots a_m)M$ frei. Nun ist

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\sim} & (a_1\dots a_m)M \\ x & \longmapsto & (a_1\dots a_m)x \end{array}$$

eine Isomorphie, weil $a_1\dots a_m \neq 0$ und M torsionsfrei ist. Also ist M auch frei.

□

Satz 5.4
Ist M endlich erzeugt, so ist $M = M_{\text{tor}} \bigoplus F$, wobei $F \leq M$ ein freier Untermodul ist. Die Dimension $\dim_R F$ ist von der Wahl von F unabhängig.

Definition 5.1
$\dim_R F$ im Satz 5.4 ist der <u>(freier) Rang von M</u>.

Für den Beweis vom Satz 5.4 brauchen wir:

Lemma 5.5
Sei R kommutativ mit Eins, E und E' R-Moduln, E' frei. Sei $f : E \to E'$ ein surjektiver Homomorphismus. Dann existiert ein freier Untermodul $F \leq E$, so daß $f \restriction F : F \to E'$ eine Isomorphie ist und $E = F \bigoplus \ker(f)$.

Beweis. Sei $\{x'_i\}_{i\in I}$ eine Basis für E'. Für alle $i \in I$ wähle $x_i \in E$ mit $f(x_i) = x'_i$ und setze $F := \operatorname{Span}_R\{x_i \mid i \in I\}$. Es ist leicht zu sehen, daß $\{x_i\}_{i\in I}$ linear unabhängig ist (ÜA), also ist F frei. Sei nun $x \in E$ und nimm $a_i \in R$, so daß $f(x) = \sum a_i x'_i$. Es gilt $f(x - \sum a_i x_i) = 0$ und damit $x - \sum a_i x_i \in \ker(f)$. Wir haben gezeigt: $E = F + \ker(f)$. Nun ist es leicht zu sehen, daß $F \cap \ker(f) = \{0\}$ (ÜA). □

6