Algebraische Zahlentheorie
Algebra B 4 - Sommersemester 2017
Prof'in Dr. Salma Kuhlmann

20.Vorlesung

13 Juli 2017

Sei Γ ein Gitter mit f.P. T.

Lemma 20.1
$\forall v \in \mathbb{R}^n, \exists! l \in \Gamma$, so daß $v \in T + l$

Beweis. Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis, schreibe $v = \sum b_i e_i$ und setze $z_i := \lfloor b_i \rfloor \in \mathbb{Z}, b_i \in \mathbb{R}$. Dann ist $a_i := b_i - z_i \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq a_i < 1$. Es ist $v = t + l$, wobei $t := \sum a_i e_i \in T$ und $l := \sum z_i e_i, l \in \Gamma$. □

Wir studieren nun die Faktorgruppe $(\mathbb{R}^n, +)/(\Gamma, +)$. Setze $S := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ (eine multiplikative Untergruppe).

Lemma 20.2
$(\mathbb{R}, +)/(\mathbb{Z}, +) \cong (S, \times)$.

Beweis. Betrachte $\begin{array}{cccc} \phi : & \mathbb{R} & \to & S \\ & a & \mapsto & e^{2ia\pi} \end{array}$

□

Allgemeiner setze $\mathbb{T}^n := \underbrace{S \times S \times \dots S}_{n \text{ mal}}$ (n-dimensionaler Torus).

Satz 20.3
Sei Γ ein vollständiges Gitter in $\mathbb{R}^n$, dann ist $\mathbb{R}^n/\Gamma \cong \mathbb{T}^n$.

Beweis. Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis für Γ und betrachte $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ definiert durch $\phi(\sum a_i e_i) = (e^{2ia_1\pi}, \dots, e^{2ia_n\pi})$. □

Lemma 20.4
$\phi_{|T} : T \to \mathbb{T}^n$ ist injektiv.

Beweis. Aus $\exp(2ia_j\pi) = \exp(2ib_j\pi)$ (für $0 \leq a_j < 1$, $0 \leq b_j < 1$) folgt $a_j = b_j$ □

Allgemeiner gilt

Satz 20.5
Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ m-dimensional (also $m \leq n$), dann ist $\mathbb{R}^n/\Gamma \cong \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$.

Beweis. Setze $V :=$ $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ und $W \subseteq \mathbb{R}^n$, so daß $\mathbb{R}^n = V \bigoplus W$; dann ist
$\mathbb{R}^n = V \bigoplus W \underset{\text{Satz 20.3}}{\cong} \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ □

Definition 20.1 (i) Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-meßbar. Definiere $v(X) = \int_X dx_1, \dots, dx_n$ das Volumen von X (Lebesgue-Maß von X).

(ii) Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ ein vollständiges Gitter (also $\mathbb{T}^n \cong \mathbb{R}^n/\Gamma$) und $X \subseteq \mathbb{T}^n$. Definiere das Volumen von X: $v(X) := v(\phi^{-1}(X))$

(iii) Ist $Y \subseteq T$, so ist $\phi(Y) \subseteq \mathbb{T}^n$ und $v(\phi(Y)) = v(Y)$.

Satz 20.6
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, so daß $v(X)$ existiert (d.h. beschränkt und Lebesgues-meßbar). Aus $v(\phi(X)) \neq v(X)$ folgt, daß $\phi_{|X}$ nicht injektiv ist.

Beweis. Sei $\phi_{|X}$ injektiv. Da X beschränkt ist, existieren $l_1, \dots, l_s \in \Gamma$, so daß $l_i \neq l_j$ für $j \neq i$ und $X_{l_j} := X \cap (T + l_j) \neq \varnothing \quad \forall j = 1, \dots, s$ (also $X = \bigsqcup_{j=1}^{s} Xl_j$).
Für $j = 1, \dots, s$, definiere $Y_{l_j} = X_{l_j} - l_j$, so daß $Y_{l_j} \subseteq T \subseteq \mathbb{R}^n$. Bemerke, daß die Y_{l_j} disjunkt sind (da $\phi_{|X}$ injektiv ist). Außerdem gelten:

(a) $v(Y_{l_j}) = v(X_{l_j})$ (weil das Lebesgue-Maß invariant unter Translation ist).

(b) $\phi(X_{l_j}) = \phi(Y_{l_j})$ (weil $\Gamma = \ker \phi$).

(c) $v(\phi(Y_{l_j})) = v(Y_{l_j})$ (da $Y_{l_j} \subset T$).

Wir berechnen nun $v(\phi(X)) = v(\phi(\bigcup_j X_{l_j})) = v(\bigsqcup_j Y_{l_j}) = \sum_j v(Y_{l_j}) = \sum v(X_{l_j}) = v(X)$ □

Definition 20.2 (i) $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist <u>konvex</u>, wenn $\forall x, y \in X$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt $\lambda x + (1 - \lambda)y \in X$.

(ii) X ist <u>symmetrisch</u>, wenn gilt: $x \in X \Rightarrow -x \in X$.

Satz 20.7 (Minkowski)
Sei Γ ein vollständiges Gitter in $\mathbb{R}^n$ mit f.P. T und sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt symmetrisch konvex (und Lebesgue-meßbar). Wenn $v(X) > 2^n v(T)$, gilt dann: $\exists \gamma \neq 0, \gamma \in \Gamma \cap X$.

Bemerkung
Da Γ diskret ist, gibt es nur endlich viele solche γ.

Beweis. Betrachte, das Gitter 2Γ mit f.P $2T$ und Volumen $v(2T) = 2^n v(T)$. Betrachte das Torus $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / 2\Gamma$.
Berechne $v(\mathbb{T}^n) = v(2T) = 2^n v(T)$. $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$, $\ker \phi = 2\Gamma$, $\phi(X) \subseteq \mathbb{T}^n$ und
$v(\phi(X)) \leq v(\mathbb{T}^n) = 2^n v(T) < v(X)$
Aus Satz 20.6 folgt: $\phi_{|X}$ ist nicht injektiv. Also $\exists x_1, \neq x_2$, $x_1, x_2 \in X$, so daß $\phi(x_1) = \phi(x_2)$ oder $(x_1 - x_2) \in \ker \phi$, d.h. $x_1 - x_2 \in 2\Gamma$. Also $\frac{1}{2}(x_1 - x_2) \in \Gamma$. Nun $x_2 \in X \Rightarrow -x_2 \in X$ und $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}(-x_2) \in X$, d.h. $\frac{1}{2}(x_1 - x_2) \in X$. □

§<u>Geometrische Darstellung von algebraischen Zahlen</u>

<u>Ansatz/Ziel:</u> Sei $L/\mathbb{Q}$ ein Zahlkörper von Grad n. Wir wissen, daß $L = \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_L)$ (Satz 9.4). Wir wollen den gebrochenen Idealen von L Gittern in $\mathbb{R}^n$ zuordnen.
Sei θ ein primitives Element, so daß $L = \mathbb{Q}(\theta)$ (θ algebraische Zahl) und seien $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ die n verschiedenen Einbettungen von L in $\Omega := \mathbb{C}$.
Ist $\sigma_j(L) \subseteq \mathbb{R}$ (also $\sigma_i(\theta) \in \mathbb{R}$), so heißt σ_j reell. Sonst heißt σ_j komplex (also ist auch $\bar{\sigma}_j$ komplex).
Es ist $n = s + 2t$, wobei $s := \sharp$reelle Einbettungen und $2t := \sharp$ komplexe Einbettungen (also $\sigma_1, \dots, \sigma_s, \sigma_{s+1}, \bar{\sigma}_{s+1}, \dots, \sigma_{s+t}, \bar{\sigma}_{s+t}$ sind alle n verschiedene Einbettungen.)
Setze $L_{\mathbb{R}} := \mathbb{R}^S \times \mathbb{C}^t$. Siehe Fortsetzung in der 22. Vorlesung.