

## 2. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Gabriel Lehéricy, Simon Müller

WS 2016/2017: 28. Oktober 2016

### Korollar

Sei  $I \triangleleft R$ . Betrachte die Teilringe  $A$  von  $R$  mit  $I \subseteq A \subseteq R$  einerseits und die Teilringe von  $R/I$  andererseits.

Die Abbildung

$$A \mapsto A/I$$

ist bijektiv und respektiert Inklusion. Ferner gilt für  $I \subseteq A \subseteq R$ , dass  $A \triangleleft R$  genau dann, wenn  $A/I \triangleleft R/I$ .

### Beweis

Siehe Übungsblatt. □

### Notation

$x + I$  wird manchmal auch als  $\bar{x}$  geschrieben.

### Definition

Sei  $A \subseteq R$  eine beliebige Teilmenge. Das *von  $A$  erzeugte Ideal* ist das kleinste Ideal, das  $A$  enthält (und wird mit  $\langle A \rangle$  bezeichnet), e.g.  $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$ .

### Bemerkung (Übungsaufgabe)

$$\langle A \rangle = \bigcap \{A \subseteq J \triangleleft R\}$$

(ist der Durchschnitt aller Ideale, die  $A$  enthalten) und außerdem ist

$$\langle A \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i a_i \mid n \in \mathbb{N}; r_i \in R; a_i \in A \right\}$$

(also die Menge aller endlichen  $R$ -Linearkombinationen aus Elementen von  $A$ ).

Konvention: Wenn  $A = \{a_1, \dots, a_l\}$  endlich ist, so schreiben wir einfach  $\langle a_1, \dots, a_l \rangle$ .

### Definition

Sei  $a \in R$ .  $\langle a \rangle = \{ra; r \in R\}$  heißt *Hauptideal*, das von  $a$  erzeugt ist.

### Beispiel

$\langle 1 \rangle = R$  und  $\langle 0 \rangle = \{0\}$ .

**Proposition**Sei  $I \triangleleft R$ 

- (1)  $I = R$  genau dann, wenn  $I \cap R^\times \neq \emptyset$
- (2)  $R$  ist ein Körper genau dann, wenn die einzigen Ideale  $R$  und  $\{0\}$  sind.

**Beweis**(1) " $\Rightarrow$ " trivial

$$\begin{array}{lcl}
 \text{"}\Leftarrow\text{" } u \in I \text{ Einheit} & \Rightarrow & u^{-1}u \in I \Rightarrow 1 \in I \\
 & & \uparrow \\
 & & \in R \Rightarrow r \cdot 1 \in I \forall r \in R
 \end{array}$$

(2) " $\Rightarrow$ " Sei  $I \neq \{0\}$  und  $u \in I; u \neq 0$ . Dann ist  $u$  eine Einheit und somit  $I = R$ .

" $\Leftarrow$ " Sei  $x \in R, x \neq 0$ . Dann ist  $\langle x \rangle = R$ , d.h.  $1 \in \langle x \rangle$ , also existiert ein  $r \in R$  mit  $rx = 1$ , also  $r = x^{-1}$  □

**Korollar**

Sei  $R$  ein Körper,  $S$  ein Ring und  $\varphi : R \rightarrow S$  ein Ringhomomorphismus. Ist  $\varphi \neq 0$ , dann ist  $\varphi$  injektiv.

**Beweis** $\ker \varphi = \{0\}$ . □**Definition** $M \triangleleft R$  ist *maximal*, wenn

- (i)  $M \neq R$  ( $M$  ist echt).
- (ii) Ist  $I \triangleleft R$  mit  $M \subseteq I \subseteq R$ ,

dann gilt:  $I = M$  oder  $I = R$ . (Also gibt es keine weiteren Ideale strikt zwischen  $M$  und  $R$ .)**Proposition**

Jedes echte Ideal ist in einem Maximalideal enthalten.

Wir brauchen Zorn's Lemma.

**Exkurs Partielle Ordnung**

Sei  $A \neq \emptyset$  eine Menge. Eine *partielle Ordnung* auf  $A$  ist eine Relation  $\leq$  auf  $A$  mit den Eigenschaften:

- (1)  $x \leq x$  für alle  $x \in A$ .
- (2) Aus  $x \leq y$  und  $y \leq x$  folgt  $x = y$  für alle  $x, y \in A$ .
- (3) Aus  $x \leq y$  und  $y \leq z$  folgt  $x \leq z$  für alle  $x, y, z \in A$ .
- (4)  $\leq$  ist *total* falls  $x \leq y$  oder  $y \leq x$  für alle  $x, y \in A$ .

**Definition**

- (i) Sei  $(A, \leq)$  eine partielle Ordnung und  $B \subseteq A$ . Ein Element  $a \in A$  heißt *obere Schranke* für  $B$  in  $A$ , falls  $b \leq a$  für alle  $b \in B$ .
- (ii)  $m \in A$  heißt *maximal*, wenn gilt:  $m \leq x \Rightarrow m = x$  für alle  $x \in A$ .

**Zorn's Lemma**

Sei  $A \neq \emptyset$  eine partielle Ordnung mit der Eigenschaft: Jede total angeordnete Teilmenge  $B \subseteq A$  hat eine obere Schranke in  $A$ . Dann hat  $A$  ein maximales Element.

**Beweis der Proposition**

Sei  $I \triangleleft R$ ,  $I \subsetneq R$ . Betrachte

$S :=$  die Menge aller echten Ideale von  $R$ , die in  $I$  enthalten sind.

$I \in S$ , so  $S \neq \emptyset$ .

$S$  ist partiell geordnet durch Mengeninklusion. Wir behaupten, dass jede total geordnete Teilmenge von  $S$  eine obere Schranke in  $S$  hat. Sei also  $\xi \subseteq S$  eine solche. Setze

$$J := \bigcup_{C \in \xi} C$$

$J$  ist Ideal:  $0 \in J$ . Seien  $a, b \in J$ , existieren  $C_1, C_2 \in \xi$  mit  $a \in C_1$  und  $b \in C_2$ .

Nun gilt  $C_1 \subseteq C_2$  oder  $C_2 \subseteq C_1$  (weil  $\xi$  total geordnet ist).

In jedem Fall ist  $a + b \in J$  (weil  $a + b \in C_1$  oder  $a + b \in C_2$ ).

Analog zeigt man:  $a \in J$  und  $r \in R \Rightarrow ra \in J$ .

Nun zeigen wir:  $J \subsetneq R$ , sonst  $1 \in J$ , also  $1 \in C$  für ein geeignetes  $C \in \xi$  - Widerspruch, weil  $C \in \xi$  echt sein muss.

Anwendung von Zorn's Lemma ergibt:

$S$  hat maximale Elemente. Wenn  $M$  ein solches ist, dann ist klar, dass  $M$  ein maximales Ideal ist, welches  $I$  enthält, wie behauptet.  $\square$