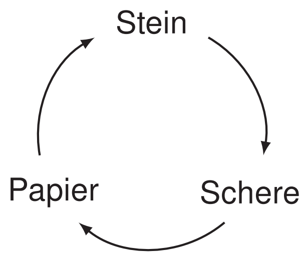
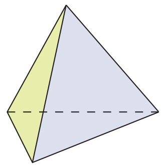
Aufgabe G1



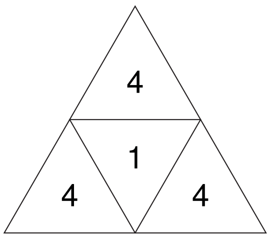
Für reelle Zahlen ist die Relation „*. . . ist kleiner als. . .*“ transitiv, d.h. aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$.

Das Spiel „Stein-Papier-Schere“ ist ein Beispiel für eine nicht transitive Relation. In der Abbildung bedeutet der Pfeil „. . . schlägt . . . “.

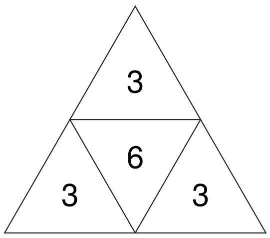


Statt einen 6-seitigen Spielwürfel zu werfen, kann man auch einen 4-seitigen Tetraeder werfen.

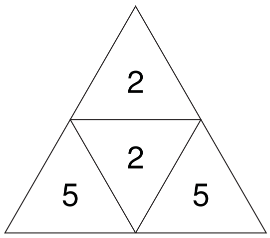
Untersuchen Sie, ob bei den folgenden drei „Tetraeder-Würfeln“ die Relation „. . . schlägt . . . “ bzw. „. . . ist stärker als . . . “ transitiv ist.



A



B

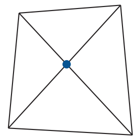


C

a) Wählen Sie jeweils zwei Würfel aus und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p, mit der einer der Würfel gewinnt.

b) Welcher „Tetraeder-Würfel“ ist der stärkste, wenn alle drei gleichzeitig geworfen werden?

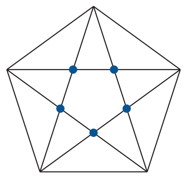
Aufgabe G2

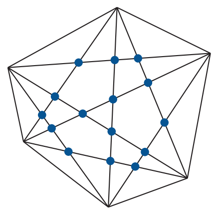


a) Ein Viereck hat 2 Diagonalen, ein Fünfeck 5 und ein Sechseck 9.

Sei $d(n)$ die Anzahl der Diagonalen in einem n-Eck, also $d(4) = 2$, $d(5) = 5$ und $d(6) = 9$.

Für welches n gilt $d(n) = 104$?





b) In einem Viereck gibt es nur einen Diagonalenschnittpunkt, beim Fünfeck sind es 5 und beim Sechseck sind es maximal 15, wenn nicht 3 Diagonalen durch einen Punkt gehen. In diesem Fall müsste dieser Schnittpunkt 3-fach gezählt werden.

Sei $s(n)$ die maximale Anzahl von Diagonalenschnittpunkten in einem konvexen n-Eck, also $s(4) = 1$, $s(5) = 5$ und $s(6) = 15$. Für welches n-Eck gilt $s(n) = 210$?

Aufgabe G3

In einem Koordinatensystem sei S die Menge aller Punkte $(x \mid y)$ für die gilt $|2x-1|+|2x+1|+\frac{4|y|}{\sqrt{3}}=4$.

a) Zeigen Sie, dass S symmetrisch zu den Koordinatenachsen ist.

b) Bestimmen Sie S im 1. Quadranten, und zwar in den Intervallen

(i) $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ (iii) $x > 1$.

Aufgabe G4

Berechnen Sie die Fläche des größten Kreises, der zwischen die beiden Glockenkurven $y = \pm e^{-x^2}$ passt.

Hinweis: Die Ableitung von $y = e^{-ax^2}$ ist $y' = -2ax \cdot e^{-ax^2}$.