2 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Beobachtung
Beziehung zu homogenen Gleichungssystemen

$$\text{Sei} \left\{ \begin{array}{rcl} A_{11}x_1 + \cdots + A_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \\ A_{m1}x_1 + \cdots + A_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \right\} \begin{array}{c} \text{homogenes Gleichungssystem} \\ \text{mit Koeffizienten in Körper } K \end{array} \qquad (*)$$

Definiere für $i = 1, \ldots, m$ ein Funktional auf K^n:

$f_i(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j$.

Es gilt: Lösungsraum von $(*) = \bigcap_{i=1}^{m} \ker(f_i)$ (folgt unmittelbar aus den Definitionen). Wir werden diese einfache Beobachtung ausnutzen, um Annihilatoren zu berechnen.

Beispiel 2.1.
$V = \mathbb{R}^5$; $W =$ span $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, wobei gilt:
$\alpha_1 = (2, -2, 3, 4, -1)$,
$\alpha_2 = (-1, 1, 2, 5, 2)$,
$\alpha_3 = (0, 0, -1, -2, 3)$ und
$\alpha_4 = (1, -1, 2, 3, 0)$ ist.
Finde W^0.

Sei $f \in V^*$. Es gilt allgemein $f(x_1, \ldots, x_5) = \sum_{j=1}^{5} c_j x_j$.

Insbesondere: (homogenes Gleichungssystem in $c_1, \ldots, c_5$)

$$\begin{aligned} f \in W^0 \quad &\Leftrightarrow \quad f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = \cdots = f(\alpha_4) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{5} A_{ij}c_j = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq 4 \end{aligned}$$

wobei A_{ij} die Koeffizienten der Koeffizientenmatrix A des (HGS) i.e.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ (GEV) } \Rightarrow \text{ r. Z. S. F. :}$$

$$\begin{array}{c} R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} \quad c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{array} \end{array}$$

c_1, c_3, c_5 sind Hauptvariablen und c_2 und c_4 sind freie Variablen.

Wie üblich finden wir den Lösungsraum für $\sum_{j=1}^{5} R_{ij}c_j = 0$ für alle $1 \leq i \leq 3$ i.e.

$$\begin{array}{ccccccc} c_1 & - & c_2 & - & c_4 & = & 0 \\ & & c_3 & + & 2c_4 & = & 0 \\ & & & & c_5 & = & 0 \end{array}$$

Setze $c_2 = a$ und $c_4 = b$ beliebig $\in \mathbb{R}$, dann sind

$c_1 = a + b, c_3 = -2b$ und $c_5 = 0$ und

$W^0 = \{f \mid f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (a + b)x_1 + ax_2 - 2bx_3 + bx_4, a, b \in \mathbb{R}\}$.

Es gilt $\dim W^0 = 2$.

Eine Basis für W^0 erhält man z.B. durch einsetzen von

$$\left.\begin{array}{lll} a = 1 & b = 0 & \text{und} \\ a = 0 & b = 1 & \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} f_1(x_1, \ldots, x_5) & = & x_1 + x_2 \\ f_2(x_1, \ldots, x_5) & = & x_1 - 2x_3 + x_4 \end{array}\right\} \text{ ist eine Basis für } W^0$$

$\square$

Kapitel 0: § 2 Bi-Dual

Sei V ein endlich dim Vektorraum über K.

Zwei Fragen haben wir noch nicht beantwortet:

(1) $V \longrightarrow V^*$
$\mathcal{B} \longmapsto \mathcal{B}^*$
Umkehrung? Sei $\mathbb{B}$ eine Basis für V^*. Existiert eine Basis $\mathcal{B}$ für V, so dass $\mathbb{B} = \mathcal{B}^*$?

(2) $V \longrightarrow V^*$
$W \longmapsto W^0$
Umkehrung? Sei U ein Unteraum von V^*. Existiert ein Unterraum W von V, so dass $U = W^0$?

Schlüssel
Wir betrachten $(V^*)^* = V^{**}$.

Bemerkung 2.2.
$\dim(V^{**}) = \dim V = \dim V^*$.

Definition 2.3. und Terminologie
Der Dualraum V^{**} zu V^* heißt der *Bi-Dualraum* zu V.

Proposition 2.4.
Sei $\alpha \in V$, α induziert kanonisch ein Funktional $L_\alpha \in V^{**}$ wie folgt:

$$L_\alpha : V^* \longrightarrow K$$

definiert durch

$$L_\alpha(f) := f(\alpha) \quad \text{für} \quad f \in V^*.$$

Beweis
$L_\alpha(cf + g) = (cf + g)(\alpha) = cf(\alpha) + g(\alpha) = cL_\alpha(f) + L_\alpha(g)$ □

Satz 2.5.
Die Abbildung $\begin{array}{rl} \lambda : & V \longrightarrow V^{**} \\ & \alpha \longmapsto L_\alpha \end{array}$ ist ein Isomorphismus.

Beweis
$\lambda(c\alpha + \beta) = c\lambda(\alpha) + \lambda(\beta)$?
Zu zeigen ist also $[\lambda(c\alpha + \beta)](f) = [c\lambda(\alpha) + \lambda(\beta)](f)$ für alle $f \in V^*$.

Wir berechnen:
$[\lambda(c\alpha+\beta)](f) = L_{c\alpha+\beta}(f) = f(c\alpha+\beta) = cf(\alpha)+f(\beta) = cL_\alpha(f)+L_\beta(f) = c\lambda(\alpha)(f)+\lambda(\beta)(f) = [c\lambda(\alpha) + \lambda(\beta)](f)$.

Also ist λ linear. Wir zeigen, dass λ bijektiv ist. Es genügt wegen $\dim V = \dim V^{**}$ zu beweisen: λ ist injektiv.

Sei $\lambda(\alpha) = 0$, i.e. $L_\alpha = 0$. Zu zeigen $\alpha = 0$.

Zum Widerspruch $\alpha \neq 0$, also ist $\{\alpha\}$ linear unabhängig.

Sei $\mathcal{B} = (\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ eine geord. Basis für V und $\mathcal{B}^* = (f_1, \ldots, f_n)$ die Dualbasis. Es gilt $f_1(\alpha_1) = f_1(\alpha) = 1$. Also $L_\alpha(f_1) \neq 0$. Also $L_\alpha \not\equiv 0$, ein Widerspruch. $\square$