19 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

In diesem Skript werden wir ein weiteres wichtiges Polynom definieren und die Beziehung zwischen minimalen Polynom und Charakteristischen Polynom untersuchen.

§ 10 Annihilator Ideal

Sei V ein endlich dimensionnaler K-Vektorraum und $T \in \mathcal{L}(V,V)$.

Proposition 19.1.
Es gelten:

(1) $\mathcal{A}(T) := \{p \in K[x] \mid p(T) = 0\}$ ist ein Ideal.

(2) $\mathcal{A}(T) \neq \{0\}$.

Beweis:

(1) Es genügt zu bemerken, dass $(p+q)(T) = p(T) + q(T)$ und $(pq)(T) = p(T)q(T)$, für alle $p, q \in K[x]$.

(2) Setze $n := \dim V$. Betrachte die Elemente $I, T, T^2, \dots, T^{n^2} \in \mathcal{L}(V,V)$.
Da $\dim \mathcal{L}(V,V) = n^2$, sind diese Elemente notwendig linear abhängig. Also existieren $c_0, \dots, c_{n^2} \in K$ mit $c_0 I + c_1 T + \dots + c_{n^2} T^{n^2} = 0$ und c_i nicht alle gleich Null.
Also ist z.B. das Polynom $c_0 + c_1 x + \dots + c_{n^2} x^{n^2} \in \mathcal{A}(T)$. □

Definition 19.2.
$\mathcal{A}(T)$ heißt *Annihilator Ideal.* Der (eindeutig bestimmte) normierte Erzeuger von $\mathcal{A}(T)$ ist das *minimale Polynom von T*; bezeichnet als Min. Pol. (T).

Bemerkung 19.3.

1. deg (Min. Pol. (T)) $\leq n^2$.

   In Skript 20 werden wir eine bessere obere Schranke bekommen!

2. $p :=$ Min. Pol. (T) ist das normierte Polynom vom kleinsten Grad in $\mathcal{A}(T)$. Es ist also charakterisiert durch:

   (a) $p \in K[x]$

   (b) $p(T) = 0$

   (c) $\deg q < \deg p \Rightarrow q(T) \neq 0$

Definition 19.4.
Für $A \in M_{n\times n}(K)$. sind $\mathcal{A}(A)$ und Min. Pol. (A) analog definiert.

Bemerkung 19.5.

(1) Sei $\mathcal{B}$ eine Basis für V. Für $f \in K[x]$ gilt $[f(T)]_{\mathcal{B}} = f([T]_{\mathcal{B}})$ (ÜB).
Für $A = [T]_{\mathcal{B}}$ gilt also: $f(T) = 0 \Leftrightarrow f(A) = 0$.

(2) Wir halten fest: ähnliche Matrizen haben das gleiche minimale Polynom.

Satz 19.6.
Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$ (oder $A \in M_{n\times n}(K)$). Es gilt: Char. Pol. (T) und Min. Pol. (T) haben (bis auf Vielfachheit) dieselben Nullstellen.

Beweis:
Seien $p :=$ Min. Pol. (T) und $c \in K$. Zu zeigen: $p(c) = 0 \Leftrightarrow c$ ist Eigenwert von T.

"$\Rightarrow$" $p(c) = 0 \Rightarrow p = (x - c)q$; deg $q <$ deg p. Also ist $q(T) \neq 0$.
Wähle $\beta \in V$ mit $\alpha := q(T)(\beta) \neq 0$.
Es gilt $0 = p(T)(\beta) = (T - cI)q(T)(\beta) = (T - cI)(\alpha)$. Also ist $\alpha \neq 0$ Eigenvektor zum Eigenwert c.

"$\Leftarrow$" Umgekehrt sei $T(\alpha) = c\alpha; \alpha \neq 0, \alpha \in V, c \in K$.
Nun gilt $p(T)(\alpha) = p(c)\alpha$ (ÜB).
Da aber $p(T) = 0$ und $\alpha \neq 0$, folgt daraus $p(c) = 0$. □

Proposition 19.7.
Sei T diagonalisierbar. Dann zerfällt Min. Pol. (T) in verschiedene lineare Faktoren.

Beweis
Sei T diagonalisierbar, $c_1, \dots, c_k \in K$ die verschiedenen Eigenwerte, setze $p :=$ Min. Pol. (T).
Satz 19.6 impliziert, dass $\deg p \geq k$ ist.
Betrachte das Polynom $q(x) := (x - c_1)\cdots(x - c_k)$. Es gilt: $(T - c_1 I)\cdots(T - c_k I)(\alpha) = 0$ für jeden Eigenvektor α (weil α Eigenvektor zum Eigenwert c_i ist, für ein geeignetes i). Da es eine Basis von Eigenvektoren gibt, ist $q(T) = 0$, also ist $q \in \mathcal{A}(T)$ und damit gilt wegen Bemerkung 19.3 num $p = q$. □

Wir werden später (siehe Satz 23.4) die Umkehrung von 19.7 auch beweisen.

Beispiel 19.8.
Nun berechnen wir das minimale Polynom für das Beispiel 11.9 (ii). Wir bezeichnen das minimale Polynom mit p. Da T nicht diagonalisierbar ist, können wir Proposition 19.7 nicht anwenden, aber Satz 19.6 können wir anwenden.
Da Char. Pol. $(T) = (x - 1)(x - 2)^2$ ist, hat p die Nullstellen 1 und 2. Wir probieren Polynome der Form

$$(x-1)^k(x-2)^\ell \text{ mit } k \geq 1 \text{ und } \ell \geq 1$$

("prüfen", ob sie T annihilieren).

$(x - 1)(x - 2)$:

$$(A - I)(A - 2I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \neq 0$$

Also ist deg $(p) \geq 3$. Nun probieren wir

$$(x-1)^2(x-2) \text{ oder } (x-1)(x-2)^2$$

$(A - I)(A - 2I)^2 = 0$. Also ist hier Char. Pol. $(T) =$ Min. Pol. (T).

Der Satz von Cayley Hamilton, den wir in Skript 20 beweisen, wird uns helfen weniger "prüfen" zu müssen...