# 12 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra II

**Prof. Dr. Salma Kuhlmann**

*In diesem Skript werden wir die Parität einer Permutation einführen und beweisen, dass der Begriff wohldefiniert ist. Für $n > 1$ werden wir dann eine wichtige Untergruppe von $S_n$ kennenlernen und damit Abschnitt 6 beenden. Diese Vorarbeit ist für die spätere formale Behandlung der Determinante notwendig.*

## § 6 Die symmetrischen Gruppen $S_n$ (Fortsetzung)

**Beispiel:** Die Darstellung als Produkt von paarweise disjunkten Zyklen der Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (134)(25)$$

**Satz 12.1.** Jede Permutation $\sigma \in S_n$ ist ein Produkt von Transpositionen.

**Beweis:**
Das neutrale Element (1) ist (12)(21).
Wegen Satz 11.8 genügt es zu zeigen, dass ein Zyklus ein Produkt von Transpositionen (2-Zyklen) ist. Sei $(i_1 \dots i_r) \in S_n$ ein $r$-Zyklus mit $r > 2$. Wir behaupten, dass

$$(i_1 i_2 \dots i_r) = (i_1 i_r)(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_3)(i_1 i_2).$$

Für $i_r$ gilt:

$$(i_1 i_r)(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_3)(i_1 i_2) i_r = (i_1 i_r) i_r = i_1$$

Für $i_s$ mit $1 \leq s < r$ gilt:

$$\begin{aligned}(i_1 i_r)(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_3)(i_1 i_2) i_s &= (i_1 i_r)(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_{s+1})(i_1 i_s) i_s \\ &= (i_1 i_r)(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_{s+2})(i_1 i_{s+1}) i_1 \\ &= (i_1 i_r)(i_1 i_{r-1}) \dots (i_1 i_{s+2}) i_{s+1} = i_{s+1}\end{aligned}$$

□

**Beispiel 12.2.** Die Permutation $(123) \in S_4$ hat zwei Darstellungen:

$$(123) = (13)(12) = (13)(42)(12)(14)$$

Die Darstellung ist also i.A. nicht eindeutig, sogar ist die Anzahl der Permutationen in einer Darstellung nicht eindeutig. Was ist denn eindeutig? Die **Parität** ist eindeutig, wie wir jetzt erklären.

Erinnerung: $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$

**Definition 12.3.** Seien $\sigma \in S_n$ und $f\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ eine Abbildung. Wir definieren $\sigma f$ als Abbildung $\sigma f\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ wie folgt:

$$(\sigma f)(x_1, \dots, x_n) := f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

**Beispiel 12.4.** Sei $f: \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}$ definiert durch $f(x_1, x_2, x_3) := x_1x_2 + x_3$ und $\sigma := (123) \in S_3$. Dann ist $(\sigma f)(x_1, x_2, x_3) = f(x_2, x_3, x_1) = x_2x_3 + x_1$.

**Lemma 12.5.** Seien $\sigma, \tau \in S_n$ und $f, g: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$. Dann ist

(i) $\sigma(\tau f) = (\sigma\tau)f$,

(ii) $\sigma(fg) = (\sigma f)(\sigma g)$.

**Beweis:** Siehe ÜB.

**Satz 12.6.** Es existiert eine wohldefinierte Abbildung $\operatorname{sign}: S_n \to \{-1, 1\}$ so dass:

(a) Für jede Transposition $\tau \in S_n$ ist $\operatorname{sign}(\tau) = -1$.

(b) Für alle $\sigma, \tau \in S_n$ gilt
$$\operatorname{sign}(\sigma\tau) = \operatorname{sign}(\sigma)\operatorname{sign}(\tau).$$

Diese Abbildung ist eindeutig mit diesen Eigenschaften.

**Beweis:** Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\Delta: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ die Abbildung
$$\Delta(x_1, \ldots, x_n) := \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

**Behauptung:** Für eine Transposition $\tau \in S_n$ gilt $\tau\Delta = -\Delta$. In der Tat, sei $\tau = (rs)$ mit $r < s$. Aus Lemma 12.5 (ii) folgt
$$\tau\Delta(x_1, \ldots, x_n) := \prod_{1 \le i < j \le n} \tau(x_j - x_i).$$

Offensichtlich, wenn $i, j \notin \{r, s\}$, dann $\tau(x_j - x_i) = (x_j - x_i)$.
Für den Faktor $(x_s - x_r)$ gilt $\tau(x_s - x_r) = (x_r - x_s) = -(x_s - x_r)$. Die anderen Faktoren können wir wie folgt paaren:
$$\begin{aligned}
&(x_k - x_s)(x_k - x_r), \text{wenn } k > s;\\
&(x_s - x_k)(x_k - x_r), \text{wenn } r < k < s;\\
&(x_s - x_k)(x_r - x_k), \text{wenn } k < r.
\end{aligned}$$

Jedes Produkt ist von $\tau$ unberührt.
Also $\tau\Delta = -\Delta$. Wir haben die Behauptung bewiesen. □Beh.
Sei nun $\sigma \in S_n$. Wegen Satz 12.1 schreiben wir $\sigma = \tau_1 \ldots \tau_m$, wobei $\tau_1, \ldots \tau_m$ Transpositionen sind.
Aus Lemma 12.5(i) folgt:
$$\sigma\Delta = \tau_1(\tau_2(\ldots(\tau_m\Delta)\ldots))$$
und die Behauptung impliziert
$$\tau_1(\tau_2(\ldots(\tau_m\Delta)\ldots)) = (-1)^m\Delta.$$

Also **entweder** $\sigma\Delta = (-1)^m\Delta = \Delta$ wenn $m$ gerade, **oder** $\sigma\Delta = (-1)^m\Delta = -\Delta$ wenn $m$ ungerade.
Wir merken, dass beide Fälle nicht gleichzeitig auftreten können, da $\Delta \neq 0$ ist.
Für $\sigma \in S_n$ setze entweder $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$ wenn $\sigma\Delta = \Delta$, oder $\operatorname{sign}(\sigma) = -1$ wenn $\sigma\Delta = -\Delta$.
Seien $\sigma, \tau \in S_n$. Aus Lemma 12.5 (ii) folgt: $(\sigma\tau)\Delta = \sigma(\tau\Delta)$, also $\operatorname{sign}(\sigma\tau) = \operatorname{sign}(\sigma)\operatorname{sign}(\tau)$. □

**Definition 12.7.** Für $\sigma \in S_n$ nennen wir $\operatorname{sign}(\sigma)$ die *Signatur von* $\sigma$. Wir nennen $\sigma$ *gerade* wenn $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$ und *ungerade* wenn $\operatorname{sign}(\sigma) = -1$.

**Bemerkung 12.8.** Die Permutation

- $\sigma$ ist gerade genau dann, wenn $\sigma$ ein Produkt von $m$ Transpositionen mit $m$ gerade ist, und
- $\sigma$ ist ungerade genau dann, wenn $\sigma$ ein Produkt von $m$ Transpositionen mit $m$ ungerade ist.

Betrachte nun die folgende Untermenge von $S_n$:

$$A_n := \{\sigma \mid \sigma \text{ ist gerade}\}$$

**Korollar 12.9.** $A_n$ ist eine Untergruppe von $S_n$ und $|A_n| = \dfrac{n!}{2}$.

**Beweis:**
Das neutrale Element (1) ist gerade, also $(1) \in A_n$.
Wenn $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$ und $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_k$ (wobei $\tau_i, \gamma_j$ Transpositionen und $k, n$ gerade sind), dann ist $\sigma\gamma = \tau_1 \cdots \tau_m \gamma_1 \cdots \gamma_k$. Also ist $A_n$ abgeschlossen unter Produkten.
Da $\sigma^{-1} = \tau_m^{-1} \cdots \tau_1^{-1}$, ist $A_n$ auch unter Inversen abgeschlossen. Siehe ÜB.

Betrachte nun $U := \{\delta \in S_n \mid \delta \text{ ist ungerade } \}$. Offensichtlich ist $S_n = A_n \uplus U$.
Außerdem ist $A_n \longrightarrow U; \sigma \longmapsto (12)\sigma$ eine bijektive Abbildung.
Da $|S_n| = n!$ (siehe ÜB), folgt unsere letzte Behauptung. $\square$

**Definition 12.10.** Wir nennen $A_n$ die *alternierende Gruppe*.