

9 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Korollar 9.1.

Seien A und B $m \times n$ -Matrizen über K . Es gilt: B ist zu A zeilenäquivalent gdw $B = PA$, wobei P das Produkt von $m \times m$ -elementaren Matrizen ist.

Beweis

“ \Leftarrow ” Sei $P = E_\ell \dots E_2 E_1$, wobei E_t eine elementare $m \times m$ -Matrix ist.

Also ist $E_1 A$ zeilenäquivalent zu A

und $E_2(E_1 A)$ ist zeilenäquivalent zu $E_1 A$.

Also ist $E_2 E_1 A$ zeilenäquivalent zu A .

So weiter fortsetzen:

$E_\ell \dots E_1 A$ ist zeilenäquivalent zu A

i.e. B ist zeilenäquivalent zu A .

“ \Rightarrow ” Sei B zeilenäquivalent zu A und seien e_1, \dots, e_ℓ die elementaren Zeilenumformungen mit $A \xrightarrow{e_1} \dots \xrightarrow{e_\ell} B$.

Also $E_\ell \dots E_2 E_1 A = B$,

wobei E_t die elementare Matrix $e_t(I_m)$ für $t = 1, \dots, \ell$ ist.

Setze $P := E_\ell \dots E_2 E_1$. □

Definition 9.2.

Eine $n \times n$ -Matrix A ist invertierbar, falls es eine $n \times n$ -Matrix B gibt, so dass

$$AB = I_n \text{ und } BA = I_n.$$

In diesem Fall heißt B eine Inverse von A .

Proposition 9.3.

Sei A invertierbar. Dann gibt es eine eindeutige Inverse.

Beweis

Seien B_1, B_2 beide Inverse von A . Es gilt:

$$AB_1 = I_n = AB_2$$

$$\text{also } B_2(AB_1) = B_2(AB_2) \quad (\text{Multiplikation})$$

$$\text{also } (B_2 A)B_1 = (B_2 A)B_2$$

$$\text{also } I_n B_1 = I_n B_2, \quad \text{i.e. } B_1 = B_2 \quad \square$$

Notation

Wir bezeichnen mit A^{-1} die eindeutige Inverse der invertierbaren Matrix A .

Proposition 9.4.

Seien A, B $n \times n$ -Matrizen über K . Es gilt

- (i) Wenn A invertierbar, so auch A^{-1} und $(A^{-1})^{-1} = A$.
- (ii) Wenn A und B beide invertierbar, so auch AB und $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Beweis

- (i) Wir berechnen $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Also ist A die Inverse von A^{-1} .
- (ii) Wir berechnen $B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B \equiv I_n$.
Analog $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n$. □

Korollar 9.5.

Seien A_1, \dots, A_ℓ $n \times n$ -invertierbare Matrizen, dann ist das Produkt $A_1 \cdots A_\ell$ auch invertierbar und es gilt $(A_1 \cdots A_\ell)^{-1} = A_\ell^{-1} \cdots A_1^{-1}$ (*)

Beweis

Induktion nach ℓ . Für $\ell = 1$ ist es klar.

Induktionsannahme: (*) gilt für ℓ .

Induktionsschritt: (*) gilt für $\ell + 1$:

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } (A_1 \cdots A_\ell A_{\ell+1})^{-1} &= \\ ((A_1 \cdots A_\ell) A_{\ell+1})^{-1} &= \leftarrow \text{ Proposition 9.4 (ii)} \\ A_{\ell+1}^{-1} (A_1 \cdots A_\ell)^{-1} &= \leftarrow \text{ Induktionsannahme} \\ A_{\ell+1}^{-1} (A_\ell^{-1} \cdots A_1^{-1}) &= \leftarrow \text{ Assoziativität} \\ A_{\ell+1}^{-1} A_\ell^{-1} \cdots A_1^{-1} & \quad \square \end{aligned}$$

Proposition 9.6.

Elementare Matrizen sind invertierbar.

Beweis

Sei $E = e(I_n)$ eine elementare Matrix. Sei e^* die umgekehrte Zeilenumformung (auf die Zeilen von I_n ; siehe Bemerkungen 5.3 (I), 5.4 (i) und 5.5 (i)) und $E^* := e^*(I_n)$. Wir berechnen

$$E^*E = e^*(I_n)e(I_n) = I_n \quad \text{und} \quad E^*E = EE^* = I_n$$

D.h. $E^* = E^{-1}$. □

Beispiel 9.7.

2×2 -elementare Matrizen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix} \\ c \neq 0 \\ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} c^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Satz 9.8.

Sei A eine $n \times n$ -Matrix. Sind äquivalent:

- (i) A ist invertierbar.
- (ii) $AX = b$ ist konsistent für jede $n \times 1$ -Spaltenmatrix b .
- (iii) $AX = 0$ hat nur die triviale Lösung.
- (iv) A ist zeilenäquivalent zu I_n .
- (v) A ist Produkt von elementaren Matrizen.

[(ii) und (iii): Beziehung zwischen homogener und allgemeiner (quadratischer) Systeme.]

Beweis

(i) \Rightarrow (ii)

Setze $X := A^{-1}b$. Es gilt $AX = A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = I_n b = b$.

(iii) \Leftrightarrow (iv) schon bewiesen (Korollar 7.4).

(ii) \Rightarrow (iii)

Wenn $AX = 0$ nicht triviale Lösungen hätte, dann ist die r.Z.S.F. R von A nicht I_n , also muss eine Nullzeile haben (siehe Bemerkung 7.3 und Korollar 7.4). Also ist zum Beispiel das System

$$(S) \quad RX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ inkonsistent.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \dots & \dots & \dots & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Nun $\boxed{R = PA}$ wobei P das Produkt von elementaren Matrizen ist (Korollar 9.1). Also ist P invertierbar (Korollar 9.5 und Proposition 9.6).

Also multipliziere (S) durch P^{-1} :

$$(S) \quad (PA)X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist inkonsistent.}$$

$$\text{Also } P^{-1}(PA)X = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist inkonsistent.}$$

$$\text{Also } AX = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ inkonsistent.}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} n \times n & n \times 1 \\ & n \times 1 \end{matrix}}$$

$$\text{Setze } b = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ wir bekommen } AX = b \text{ inkonsistent. Widerspruch.}$$

(iv) \Rightarrow (v)

$A = P'I_n = P'$, wobei P' das Produkt von elementaren Matrizen ist (Korollar 9.1).

(v) \Rightarrow (i)

Folgt aus Korollar 9.5 und Proposition 9.6. □

Korollar 9.9.

Seien A und B $m \times n$ -Matrizen. B ist zeilenäquivalent zu A genau dann, wenn $B = PA$, wobei P eine invertierbare $m \times m$ -Matrix ist.