

7 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Korollar 7.1.

Sei R eine $m \times n$ -Matrix in r.Z.S.F und setze $r :=$ die Anzahl der $\neq 0$ -Zeilen von R . Falls $r < n$, dann hat das homogene System

$$RX = 0 \quad (*)$$

nicht triviale Lösungen.

Beweis

$r =$ Anzahl der $\neq 0$ -Zeilen in r.Z.S. F.
 $=$ Anzahl der Haupteins
 $=$ Anzahl der Hauptvariablen.

Also $n - r =$ Anzahl der freien Variablen und $r < n \Rightarrow n - r \neq 0 \Rightarrow$ es existiert mindestens eine freie Variable x_j . Wir erhalten eine nicht triviale Lösung für $(*)$, indem wir z.B. $x_j = 1$ setzen. \square

Korollar 7.2.

Sei A eine (beliebige) $m \times n$ -Matrix mit $m < n$. Dann hat das homogene System

$$(S) \quad AX = 0$$

nicht triviale Lösungen.

Beweis

Sei R in r.Z.S.F zeilenäquivalent zu A . (R ist immer noch eine $m \times n$ -Matrix.) Setze $r :=$ Anzahl der $\neq 0$ -Zeilen von R .

Also $r \leq m < n$. Also hat

$$RX = 0 \quad (*)$$

nach Korollar 7.1 nicht triviale Lösungen und damit auch (S) . \square

Bemerkung 7.3.

Sei R eine $n \times n$ -Matrix in r.Z.S.F und *ohne Nullzeilen* (also jede Zeile hat eine Haupteins). Dann ist $R = I_n$.

Beweis

r.Z.S.F $\Rightarrow 1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n \leq n$, wobei k_j die Spalte ist, in der die Haupteins der Zeile Z_j erscheint.

Also $k_j = j$, für alle $j = 1, \dots, n$.

Also $a_{jj} = 1$, für alle $j = 1, \dots, n$.

Sei $i \neq j$, dann ist a_{ij} in der k_j -Spalte

r.Z.S.F $a_{ij} = 0$ (weil $a_{ij} \neq a_{jj}$). \square

Korollar 7.4.

Sei A eine $n \times n$ -Matrix. Es gilt:

A zeilenäquivalent zu $I_n \Leftrightarrow AX = 0$ hat nur die triviale Lösung.

Beweis

“ \Rightarrow ” klar, weil $I_n X = 0$ nur die triviale Lösung hat.

“ \Leftarrow ” Sei R eine $n \times n$ -Matrix in r.Z.S.F und zeilenäquivalent zu A . Sei $r :=$ Anzahl der $\neq 0$ -Zeilen von R . Korollar 7.2 $\Rightarrow r \geq n$. Andererseits $r \leq n$. Also $r = n$. Also hat R keine Nullzeilen $\Rightarrow R = I_n$. \square

Kapitel 1: § 5 Matrix-Multiplikation

Definition 7.5.

Seien A eine $m \times n$ - und B eine $n \times p$ -Matrix über K .

Wir definieren eine neue Matrix $C := AB$; das Produkt als die folgende $m \times p$ -Matrix:

$$C_{ij} := \sum_{r=1}^n A_{ir} B_{rj}.$$

Also Zeilen mal Spalten!

Beispiel 7.6.

$$(1) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n \\ a_{21} x_1 + \cdots + a_{2n} x_n \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n \end{pmatrix}$$

$m \times n \quad n \times 1 \quad m \times 1$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + 0 + 0 & a_{12} + 0 + 0 & a_{13} + 0 + 0 \\ 0 + a_{21} + 0 & 0 + a_{22} + 0 & 0 + a_{23} + 0 \\ 0 + 0 + a_{31} & 0 + 0 + a_{32} & 0 + 0 + a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(3) **Allgemeiner:** Sei A eine $n \times n$ -Matrix. Es gilt $C = AI_n = I_n A = A$.

Beweis: Wir zeigen $AI_n = A$. ($I_n A$ wird analog behandelt.)

$$(AI_n)_{ij} = \sum_{r=1}^n A_{ir} (I_n)_{rj} \quad (*)$$

Fall 1 $r \neq j$ $(I_n)_{rj} = 0$
 Fall 2 $r = j$ $(I_n)_{rj} = 1$ } in (*) eingesetzt ergibt die Summe

$$\sum_{r=1}^n A_{ir} (I_n)_{rj} = A_{ij} (I_n)_{jj} = A_{ij}$$

□

(4) Über \mathbb{F}_7 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 \bullet_7 5) + (2 \bullet_7 0) & (1 \bullet_7 6) + (2 \bullet_7 1) \\ (3 \bullet_7 5) + (4 \bullet_7 0) & (3 \bullet_7 6) + (4 \bullet_7 1) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$2 \times 2 \quad 2 \times 2 \quad 2 \times 2$

(5) Die j -te Spalte von AB (als $m \times 1$ -Matrix) = $\underbrace{A}_{m \times n}$ [j -te Spalte von B] (als $n \times 1$ -Matrix).

und:

Die i -te Zeile von AB (als $1 \times p$ -Matrix) = (als $1 \times n$ -Matrix) [i -te Zeile von A] $\underbrace{B}_{n \times p}$.

Satz 7.7.

Seien A, B, C Matrizen über K , so dass die Produkte BC und $A(BC)$ definiert sind, dann sind auch die Produkte AB und $(AB)C$ definiert und es gilt:

$$A(BC) = (AB)C.$$

Beweis

Sei B eine $n \times p$ -Matrix. Also hat C p Zeilen und BC n Zeilen. Also (weil $A(BC)$ definiert ist) ist A eine $m \times n$ -Matrix. Also ist AB eine wohldefinierte $m \times p$ -Matrix und $(AB)C$ ist damit auch wohldefiniert.

Wir wollen nun zeigen, dass die zwei Matrizen $A(BC)$ und $(AB)C$ gleich sind. Dafür müssen wir zeigen, dass alle ihre Koeffizienten gleich sind.

Wir berechnen also:

$$\begin{aligned} [A(BC)]_{ij} &= \sum_r A_{ir} (BC)_{rj} \\ &= \sum_r A_{ir} (\sum_s B_{rs} C_{sj}) \\ &= \sum_r \sum_s A_{ir} B_{rs} C_{sj} \text{ (Distributivität und Assoziativität in } K) \\ &= \sum_s \sum_r A_{ir} B_{rs} C_{sj} \text{ (Kommutativität und Assoziativität in } K) \\ &= \sum_s (\sum_r A_{ir} B_{rs}) C_{sj} \\ &= \sum_s (AB)_{is} C_{sj} \\ &= [(AB)C]_{ij}. \end{aligned}$$

□

Bezeichnung 7.8.

Seien A eine $n \times n$ -Matrix und $k \in \mathbb{N}$.

$A^k := \underbrace{A \cdots A}_{k\text{-mal}}$ (wohldefiniert).