

6 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Beispiel 6.1.

(i) Die Identitätsmatrix oder *Einheitsmatrix* (quadratische Matrix) I_n wird so definiert:

$$(I)_{ij} = \underbrace{\delta_{ij}}_{\text{Kronecker Delta}} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

I_n ist in r.Z.F.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

sind **nicht** in r.Z.F.

(iii) Die $0^{m \times n}$ -Matrix ($0_{ij} = 0$ für alle $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$) ist in r.Z.F.

Definition 6.2.

Eine $m \times n$ -Matrix A ist in einer (*reduzierten*) *Zeilenstufenform* (r.Z.S.F.), falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (a) Axiom (a) für r.Z.F.
- (b) Axiom (b) für r.Z.F.
- (c) jede Nullzeile erscheint (falls vorhanden) nach jeder ungleich Nullzeile.
- (d) Seien Z_1, \dots, Z_r die ungleich Nullzeilen ($r \leq m$) und k_i der Spaltenindex, in der die Haupteins der i -ten Zeile erscheint ($i = 1, \dots, r$), dann gilt $k_1 < k_2 < \dots < k_r$.

Satz 6.3.

Jede $m \times n$ -Matrix A ist zeilenäquivalent zu einer Matrix B in r.Z.S.F.

Beweis siehe unten

Zweck: Aus der r.Z.S.F. kann man $L(S)$ sofort ablesen.

Beispiel 6.4.

Über \mathbb{Q} : Erweiterte Koeff-M:

$$(i) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = 7 \\ x_3 = -1 \end{array}$$

$$(ii) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \leftarrow \text{inkonsistent.}$$

$$(iii) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

x_1, x_2, x_3 Hauptvariablen; x_4 freie Variable.

$$\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} + \begin{array}{l} 4x_4 \\ 2x_4 \\ 3x_4 \end{array} = \begin{array}{l} -1 \\ 6 \\ 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -1 - 4x_4 \\ x_2 = 6 - 2x_4 \\ x_3 = 2 - 3x_4 \end{array}$$

$$x_4 = q \in \mathbb{Q} \text{ also } L(S) = \{(-1 - 4q, 6 - 2q, 2 - 3q, q) \in \mathbb{Q}^4 \mid q \in \mathbb{Q}\}$$

Beweis von Satz 6.3:

Falls $A = 0^{m \times n}$, dann ist A bereits in r.Z.S.F. Ansonsten:

- Typ 1** Bei wiederholter Anwendung von Typ 1 können wir \mathbb{E} annehmen, dass die Zeilen Z_1, Z_2, \dots, Z_r nicht Null sind ($r \leq m$)
- und** Z_{r+1}, \dots, Z_m Null sind (wobei $r = m$ vorkommen kann!).

Wir betrachten Z_1 :

Sei $0 \neq a_{1k_1}$ der Hauptkoeffizient von Z_1 ($1 \leq k_1 \leq n$).

Typ 2 Multipliziere Z_1 , durch $a_{1k_1}^{-1}$ und dann für jede $2 \leq i \leq r$:

Typ 3 Addiere $(-a_{ik_1})$ -fach von (der neu erhaltenen Zeile) Z_1 zur i -ten Zeile.

$$\begin{array}{l} Z_1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ Z_r \end{array} \left(\begin{array}{cccccccc} & & & \text{Spalte } k_1 & & & & \\ & & & \downarrow & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & \cdots & * \\ & & & 0 & & & & \\ & & & \vdots & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & \vdots & & & & \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & & \cdots & \cdots & 0 \end{array} \right) := A_1$$

Nun betrachte Z_2 der Matrix A_1 . Wieder

Typ 1 $\mathbb{C} Z_2 \neq 0$.

Sei $a_{2k_2} \neq 0$ Hauptkoeffizient von Z_2 . Bemerke: $k_2 \neq k_1$. Also haben wir

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2k_2} & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ & & & & & & \vdots & & & \\ & & & & & & \vdots & & & \\ & & & & & & 0 & & & \end{pmatrix} = A_1 \text{ (Fall 1) } (k_2 < k_1)$$

oder

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & a_{2k_2} & \cdots & * \\ & & & & & 0 & & & \\ & & & & & \vdots & & & \\ & & & & & 0 & & & \end{pmatrix} = A_1 \text{ (Fall 2) } (k_1 < k_2)$$

Typ 2 Wiederhole: Multipliziere Z_2 durch $a_{2k_2}^{-1}$, dann

Typ 3 Im Fall 1 ($k_2 < k_1$): Addiere $(-a_{ik_2})$ -fach von Z_2 zur i -ten Zeile für $3 \leq i \leq m$.

Typ 3 Im Fall 2 ($k_1 < k_2$): Addiere $(-a_{ik_2})$ -fach von Z_2 zur i -ten Zeile für $i = 1$ und $3 \leq i \leq m$.

Achtung

Wichtig ist es zu bemerken, dass wir die Koeffizienten

$$a_{1j} = 0 \quad j = 1, \dots, k_1 - 1 \text{ und}$$

$$a_{1k_1} = 1 \text{ und}$$

$$a_{ik_1} = 0 \quad i = 2, \dots, m \text{ von } A_1 \text{ in beiden Fällen } k_2 < k_1 \text{ oder } k_1 < k_2 \text{ nicht geändert haben !}$$

Per Induktion wiederholen wir diese Prozedur für $i = 3, \dots, r$. Wir erhalten eine Matrix A_r , die nun (a), (b), (c) genügt. Schließlich erhalten wir bei wiederholter Anwendung von Typ 1 eine Matrix B , die auch (d) genügt, also B ist in r.z.S.F. \square

Kapitel 1: § 4 Homogene Systeme

Beispiel 6.5.

Sei R folgende Matrix (über \mathbb{Q})

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix}$$

finde $L(S)$, wobei (S) das homogene System $RX = 0$ ist.

Lösung

R ist in r.Z.S.F. Beobachte: $r :=$ Anzahl der $\neq 0$ -Zeilen $= 2 =$ Anzahl Hauptvariable.

$$(S) \quad \begin{array}{rcl} x_2 - 3x_3 & + \frac{1}{2}x_5 & = 0 \\ & x_4 + 2x_5 & = 0 \end{array}$$

$$\text{Also } \begin{array}{l} x_2 = 3x_3 - \frac{1}{2}x_5 \\ x_4 = -2x_5 \\ x_1, x_3, x_5 \text{ freie Variable. Setze } x_1 = a, x_3 = b, x_5 = c. \end{array}$$

$$\text{Also } L(S) = \{(a, 3b - \frac{1}{2}c, b, -2c, c) \in \mathbb{Q}^5 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}.$$

Bemerke

x_1 freie Variable. Setze $a = 1, b = c = 0$. dann ist $(1, 0, 0, 0, 0)$ eine nicht-triviale Lösung.