

11 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Kapitel 2: § 2 Unterräume

Definition 11.1.

Sei V ein K -Vektorraum und $W \subseteq V$ eine Teilmenge. W ist ein *Teilraum*, falls $(W, +, \bullet)$ ein K -Vektorraum ist (mit der Einschränkung der Verknüpfung von V auf W i.e. es sollen gelten $+ : W \times W \rightarrow W$ und $\bullet : K \times W \rightarrow W$ und auch die Vektorraumaxiome).

Dazu sind nachzurechnen:

$$\begin{aligned} 0_V \in W; \quad \alpha, \beta \in W &\Rightarrow \alpha + \beta \in W \\ c \in K, \alpha \in W &\Rightarrow c\alpha \in W \\ (\text{insbesondere } \alpha \in W &\Rightarrow -\alpha \in W) \end{aligned} .$$

Also gibt es ein einfaches Kriterium.

Satz 11.2.

Sei V ein K -Vektorraum, $\emptyset \neq W \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann ist W ein Unterraum von V genau dann, wenn für alle $\alpha, \beta \in W, c \in K : \alpha + c\beta \in W$.

Beispiel 11.3.

- (1) Ist V ein K -Vektorraum, so sind V und $\{0_V\}$ Unterräume von V .
- (2) $V = K^n$
 $W := \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n ; x_1 = 0\}$ ist Unterraum, aber $X := \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n ; x_1 = 1 + x_2\}$ nicht!
 (E.g. $(0, \dots, 0) \notin X$).
- (3) Die Symmetrischen $n \times n$ -Matrizen über K ($A_{ij} = A_{ji}$ für $1 \leq i, j \leq n$)
 Seiten $A, B \in \text{Sym}_{n \times n}(K); c \in K$, dann ist
 $(A + cB)_{ij} = A_{ij} + (cB)_{ij} = A_{ij} + cB_{ij} = A_{ji} + cB_{ji} = A_{ji} + (cB)_{ji} = (A + cB)_{ji}$.
 Also $A + cB \in \text{Sym}_{n \times n}(K)$ wie gewünscht.
- (4) Ein sehr wichtiges Beispiel!
 Der Lösungsraum eines homogenen LGS: A sei eine $m \times n$ -Matrix über K . Dann ist

$$\{X \in \text{Mat}_{n \times 1}(K) ; AX = 0\}$$

ein Unterraum von $\text{Mat}_{n \times 1}(K)$.

Beweis:

Ist $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K), B, C \in \text{Mat}_{n \times p}(K), d \in K$, so ist
 $A(B + dC) = AB + dAC$.

(4) Denn

$$\begin{aligned} [A(B + dC)]_{ij} &= \sum_{k=1}^n A_{ik}(B + dC)_{kj} = \sum A_{ik}(B_{kj} + (dC)_{kj}) \\ &= \sum A_{ik}B_{kj} + \sum A_{ik}(dC)_{kj} = \sum A_{ik}B_{kj} + \sum dA_{ik}C_{kj} \\ &= (AB)_{ij} + d \sum A_{ik}C_{kj} = (AB)_{ij} + d(AC)_{ij}. \end{aligned}$$

Insbesondere:

$$\text{Ist } AX_1 = AX_2 = 0, \text{ so auch } A(X_1 + dX_2) = 0. \quad \square$$

Definition 11.4.

Sei V ein K -Vektorraum und $X \subseteq V$. Eine lineare Kombination von Elementen aus X ist eine (endliche) Summe $\sum_{v \in X} c_v v$ mit $c_v \in K$, wobei $c_v = 0$ für alle bis auf endliche viele v .

Damit können wir nun definieren

Definition 11.5.

Sei V ein K -Vektorraum und $X \subseteq V$. Dann ist $\text{span}(X)$, der von X aufgespannte oder erzeugte Unterraum, definiert als

$$\text{span}(X) := \left\{ \sum_{v \in X} c_v v ; c_v \in K \text{ und } c_v = 0 \text{ für alle bis auf endliche viele } v \in X \right\}.$$

Konvention: $\text{span}(\emptyset) = \{0\}$.

Proposition 11.6.

Für jede $X \subseteq V$ ist $\text{span}(X)$ ein Unterraum.

Beweis

$\text{span}(\emptyset) = \{0\}$. Sonst $X \neq \emptyset$. Seien $\alpha = \sum_{v \in X} c_v v$, $\beta = \sum_{v \in X} d_v v \in \text{span}(X)$. Sei $c \in K$. Also $\alpha + c\beta = \sum_{v \in X} (c_v + cd_v)v \in \text{span}(X)$. □

Es ist sogar der "kleinste" Unterraum der X enthält. Das ist unser nächstes Ziel.

Satz 11.7.

Sei V ein K -VR, und χ eine Menge von Unterräumen. Dann ist $\bigcap \chi$ ein Unterraum von V .

Beweis

$$\bigcap \chi := \bigcap_{W \in \chi} W.$$

$0_V \in W$ für alle $W \in \chi$ also $0_V \in \bigcap \chi \neq \emptyset$.

Sind $\alpha, \beta \in \bigcap \chi$, $c \in K$, so sind für jedes $W \in \chi$ auch $\alpha, \beta \in W$, also $\alpha + c\beta \in W$. Daraus folgt $\alpha + c\beta \in \bigcap \chi$. □

Es sei nun für $X \subseteq V$ $S(X)$ definiert als

$$S(X) := \bigcap \{W \subseteq V; W \text{ ist ein Unterraum und } X \subseteq W\}.$$

Satz 11.8.

Für $X \subseteq V$ ist $S(X) = \text{span}(X)$.

Beweis

$X = \emptyset$: $S(X) := \bigcap \{W \subseteq V; W \text{ Unterraum}\} = \{0\} = \text{span}(\emptyset)$.

$X \neq \emptyset$:

(1) $S(X) \subseteq \text{span}(X)$:

$\text{span}(X) \subseteq V$ ist ein Unterraum und $X \subseteq \text{span}(X)$. Also $\text{span}(X) \in \{W \subseteq V; W \text{ ein Unterraum und } X \subseteq W\}$.

Also $v \in S(X) \Rightarrow v \in \bigcap \{W; W \text{ ein Unterraum und } X \subseteq W\} \Rightarrow v \in \text{span}(X)$.

(2) $\text{span}(X) \subseteq S(X)$:

Sei $v \in \text{span}(X)$, $W \subseteq V$ ein Unterraum und $X \subseteq W$.

Da $v \in \text{span}(X)$, existiert $(c_x; x \in X)$ ($c_x \in K$ für alle $x \in X$) mit $v = \sum_{x \in X} c_x x$, wobei $c_x = 0$ für alle bis auf endlich viele x . Da W ein Unterraum ist und $X \subseteq W$, ist $\sum_{x \in X} c_x x = v \in W$.

Da W beliebig war, ist v Element von jedem Unterraum mit diesen Eigenschaften, also auch des Durchschnitts. \square

Wir können auch mehrere Unterräume zusammenfassen:

Definition 11.9.

Seien $S_1, \dots, S_k \subseteq V$, V ein $K - VR$.

Dann ist $S_1 + \dots + S_k := \{x_1 + \dots + x_k; x_i \in S_i; 1 \leq i \leq k\}$

kurz auch $\sum_{i=1}^k S_i := \{\sum_{i=1}^k x_i; x_i \in S_i; 1 \leq i \leq k\}$.

Korollar 11.10.

Seien W_1, \dots, W_k Unterräume von V . Dann ist $W := \sum_{i=1}^k W_i$ ein Unterraum von V und $W_i \subseteq W$ für $1 \leq i \leq k$.

Beweis

Übungsaufgabe \square

Korollar 11.11.

Sind W_1, \dots, W_k Unterräume von V , so ist $\sum_{i=1}^k W_i = \text{span}(\bigcup_{i=1}^k W_i)$.

Beweis

" \subseteq ": Sei $v \in \sum W_i$. Also existiert $w_i, i \in \{1, \dots, k\}$ mit $w_i \in W_i$ und $v = \sum w_i$. Dann ist $w_i \in \bigcup_{j=1}^k W_j$ für jedes $1 \leq i \leq k$.

Also $v = \sum w_i \in \text{span}(\bigcup_{j=1}^k W_j)$.

" \supseteq ": Sei $v \in \text{span}(\bigcup W_i)$. Dann existiert $(c_i; i \leq k)$ und $(w_i | i \leq k)$ mit $c_i \in K; w_i \in W_i$, so dass $v = \sum c_i w_i$.

(Bemerkung: Aus jedem W_i können mehrere Elemente stammen. Die müssen wir dann erst zusammenfassen!)

Da W_i Unterräume sind, ist mit $w_i \in W_i$ auch $c_i w_i \in W_i$. Also existiert $(w'_i; i \leq k)$ mit $w'_i \in W_i$ und $v = \sum w'_i$ (nämlich $w'_i := c_i w_i$).

also $v \in \sum W_i$. \square

Beispiel 11.12.

Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ ein Teilkörper, ferner

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &:= (1, 2, 0, 3, 0) \\ \alpha_2 &:= (0, 0, 1, 4, 0) \\ \alpha_3 &:= (0, 0, 0, 0, 1) \end{aligned} \right\} \in K^5$$

$\alpha \in \text{span}(\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\})$ genau dann, wenn $c_1, c_2, c_3 \in K$ existiert mit $\alpha = \sum_{i=1}^3 c_i \alpha_i$, also hat α damit die Form $(c_1, 2c_1, c_2, 3c_1 + 4c_2, c_3)$ und
 $\text{span}(\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in K^5; x_2 = 2x_1, x_4 = 3x_1 + 4x_2\}$.