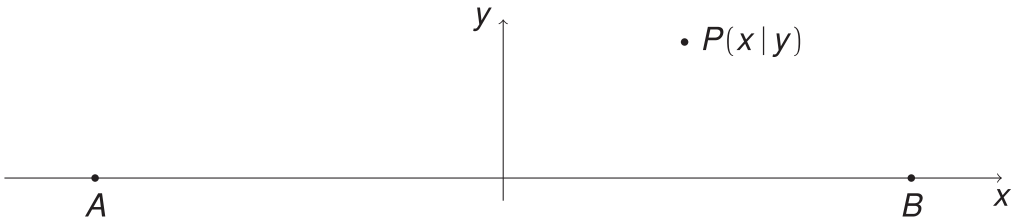
Aufgabe G1

Im Koordinatensystem sind $A(-9\,|\,0)$ und $B(9\,|\,0)$ gegeben.



Gesucht ist die Ortskurve von $P(x\,|\,y)$ wenn $AP^2 - BP^2 = 144$ gilt.

Lösung

Es gilt

$$y^2 + (x+9)^2 - (y^2 + (9-x)^2) = 144.$$

Hieraus folgt $36x = 144$. Die Ortskurve ist die Gerade $x = 4$.

Aufgabe G2

Für welche x und y gilt

$$\frac{9^x}{3^{x+y}} = 27 \quad \text{und} \quad \frac{4^{x+y}}{2^{5y}} = 32?$$

Lösung

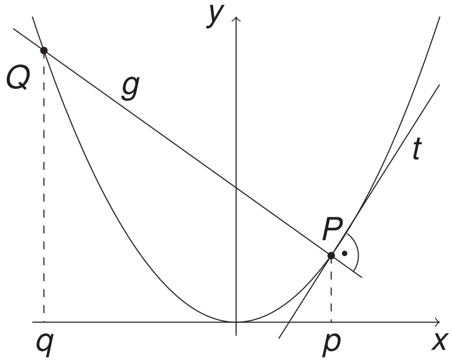
Aus $\frac{9^x}{3^{x+y}} = 27$ folgt $\frac{3^{2x}}{3^{x+y}} = 3^3$, also $x - y = 3$.

Aus $\frac{4^{x+y}}{2^{5y}} = 32$ folgt $\frac{2^{2x+2y}}{2^{5y}} = 2^5$, also $2x - 3y = 5$.

Aus $x - y = 3$ und $2x - 3y = 5$ folgt $x = 4$ und $y = 1$.

Aufgabe G3

Gegeben sei die Parabel $y = x^2$, ein Parabelpunkt $P(p\,|\,p^2)$, $p > 0$, und die Tangente t in P.



a) Berechnen Sie die Gleichung der Geraden g durch P, die senkrecht auf der Tangente steht (in Abhängigkeit von p).

b) Berechnen Sie die Koordinaten des zweiten Schnittpunkts $Q(q\,|\,q^2)$ von g mit der Parabel (in Abhängigkeit von p).

c) Wie muss P gewählt werden, damit die Summe s der Ordinaten von P und Q minimal wird, d.h. damit $s := p^2 + q^2$ möglichst klein wird?

Lösung

a) Die Gerade g hat die Gleichung $y = -\frac{1}{2p}x + p^2 + \frac{1}{2}$ bzw. $y - p^2 = -\frac{1}{2p}(x-p)$.

b) Aus $q^2 - p^2 = -\frac{1}{2p}(q-p)$ folgt $q = -p - \frac{1}{2p}$ (wegen $q^2 - p^2 = (q-p)(q+p)$).

c) Es gilt $s = p^2 + q^2 = 2p^2 + \frac{1}{4p^2} + 1$.

1. Lösung: Aus $s = 2p^2 + \frac{1}{4p^2} + 1 = 1 + \sqrt{2} + (\sqrt{2}p - \frac{1}{2p})^2$ folgt, dass s minimal ist für $\sqrt{2}p = \frac{1}{2p}$, das heißt für $p = 2^{-\frac{3}{4}}$

2. Lösung: Aus $s' = 4p - \frac{1}{2p^3} = 0$ folgt $p = 2^{-\frac{3}{4}}$. Dies ist ein Minimum, da $s'' = 4 + \frac{3}{4p^4} > 0$.

Zentrum für Mathematik · Kinzigstraße 32 · 64625 Bensheim · 06251-7079941
Internet: www.z-f-m.de · Email: marius.nuechter@z-f-m.de

Aufgabe G4

a) Untersuchen Sie die folgenden Gleichungen und setzten diese für 5^3 und 6^3 fort:

$$\begin{aligned}1^3 &= 1^2 - 0^2\\ 2^3 &= 3^2 - 1^2\\ 3^3 &= 6^2 - 3^2\\ 4^3 &= 10^2 - 6^2\\ 5^3 &=\\ 6^3 &=\end{aligned}$$

b) Für welche a und b gilt $50^3 = a^2 - b^2$?

c) Berechnen Sie die Summe $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 50^3$.

Lösung

a) Es gilt

$$3^3 = 6^2 - 3^2 = (6+3)(6-3) = 3^2 \cdot 3$$

und

$$4^3 = 10^2 - 6^2 = (10+6)(10-6) = 4^2 \cdot 4$$

also

$$5^3 = 5^2 \cdot 5 = (15+10)(15-10) = 15^2 - 10^2$$

und

$$6^3 = 6^2 \cdot 6 = (21+15)(21-15) = 21^2 - 15^2.$$

b) *1. Lösung:* Aus $50^3 = 50^2 \cdot 50 = (a+b)(a-b)$ folgt $a+b = 50^2$ und $a-b = 50$.

Also ist $a = 1275$ und $b = 1225$ und somit $50^3 = 1275^2 - 1225^2$.

2. Lösung: Wegen $3 = 1+2$, $6 = 1+2+3$, $10 = 1+2+3+4$, ... gilt

$$\begin{aligned}50^3 &= (1+2+3+\cdots+50)^2 - (1+2+3+\cdots+49)^2\\ &= \left(\frac{50 \cdot 51}{2}\right)^2 - \left(\frac{49 \cdot 50}{2}\right)^2\\ &= 1275^2 - 1225^2.\end{aligned}$$

c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots 50^3 = 1275^2$.

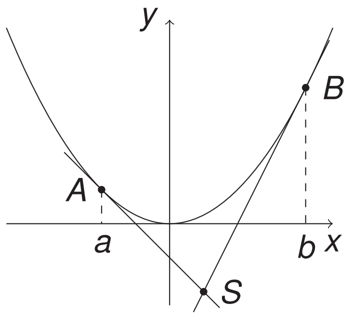
Aufgabe E1

Gegeben ist die Parabel $y = x^2$ und zwei Parabelpunkte $A(a\,|\,a^2)$ und $B(b\,|\,b^2)$.
Die Tangenten an die Parabel in A und B schneiden sich in S.

Berechnen Sie die Koordinaten von S (in Abhängigkeit von a und b).

Lösung

Gleichung der Tangenten in

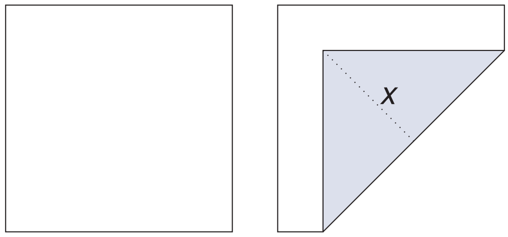


$$\begin{aligned} A: &\quad y = 2ax - a^2 \\ B: &\quad y = 2bx - b^2 \end{aligned}$$

Aus $2ax - a^2 = 2bx - b^2$ folgt $x = \frac{1}{2}(a + b)$ und $y = ab$.

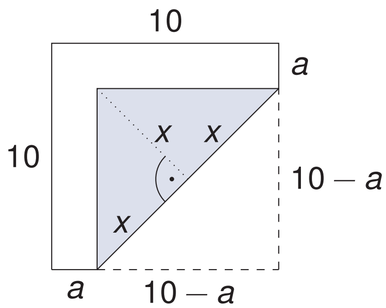
Also $S(\frac{a+b}{2}\,|\,ab)$.

Aufgabe E2



Ein quadratisches Blatt Papier mit dem Flächeninhalt 100 cm^2 ist auf der einen Seite weiß, auf der anderen Seite blau. Nun wird eine Ecke entlang der Diagonalen in Richtung der gegenüberliegenden Ecke gefaltet. Wie weit ist die umgefaltete Ecke von der Faltkante entfernt, wenn die sichtbaren weißen und blauen Flächen gleich groß sind?

Lösung



Es gilt

$$2x = (10 - a)\sqrt{2}$$

und

$$x^2 = 100 - (10 - a)^2.$$

Hieraus folgt $x = \frac{10}{\sqrt{3}} \approx 5.8$ [cm].

Aufgabe E3

Für die positiven ganzen Zahlen a und b gilt

$$a^3 - b^3 = 61.$$

Berechnen Sie $a^3 + b^3$.

Hinweis: Es gilt $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Lösung

Aus

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = 1 \cdot 61$$

folgt

$$a - b = 1 \quad \text{und} \quad a^2 + ab + b^2 = 61$$

und somit

$$(b+1)^2 + (b+1)b + b^2 = 61.$$

Also

$$0 = b^2 + b - 20 = (b-4)(b+5).$$

Da b positiv ist, folgt

$$b = 4 \quad \text{und} \quad a = 5,$$

also

$$a^3 + b^3 = 125 + 64 = 189.$$

Aufgabe E4

Wir schreiben alle natürlichen Zahlen hintereinander:

$$0123456789101112131415\ldots$$

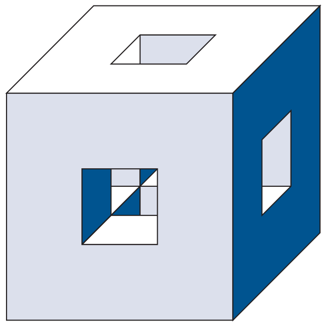
Wie heißt die 100 000-ste Ziffer?

Lösung

Zahlbereich	Anzahl der Zahlen	Anzahl der Ziffern	Summe
$0\ldots 9$	10	10	10
$10\ldots 99$	90	$2\cdot 90 = 180$	190
$100\ldots 999$	900	$3\cdot 900 = 2\,700$	2 890
$1\,000\ldots 9\,999$	9 000	$4\cdot 9\,000 = 36\,000$	38 890
$10\,000\ldots$	?	$5\cdot ? = ?$	100 000

Die gesuchte Ziffer liegt im Bereich der 5-stelligen Zahlen. In diesem Bereich ist sie die $100\,000 - 38\,890 = 61\,110$-ste Ziffer und damit ein Teil der $61\,100 : 5 = 12\,222$-sten Zahl, nämlich der $9999 + 12\,222 = 22\,221$. Deren letzte Ziffer ist also die 100 000-ste Ziffer, eine 1.

Aufgabe H1



Die Abbildung zeigt einen Würfel (Kantenlänge 3 m) mit quadratischen Löchern (Seitenlänge 1 m), die durch gegenüberliegende Flächen gehen.

Wie groß ist die gesamte Oberfläche des gelochten Würfels, das heißt einschließlich der Innenflächen.

Lösung

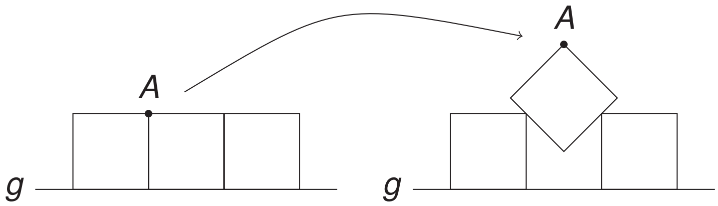
Die sechs Außenflächen haben jeweils 8 m^2.

Jedes der sechs Löcher hat die Fläche 4 m^2.

Also ist die gesamte Oberfläche

$$6 \cdot (8 + 4) = 72 \; [m^2].$$

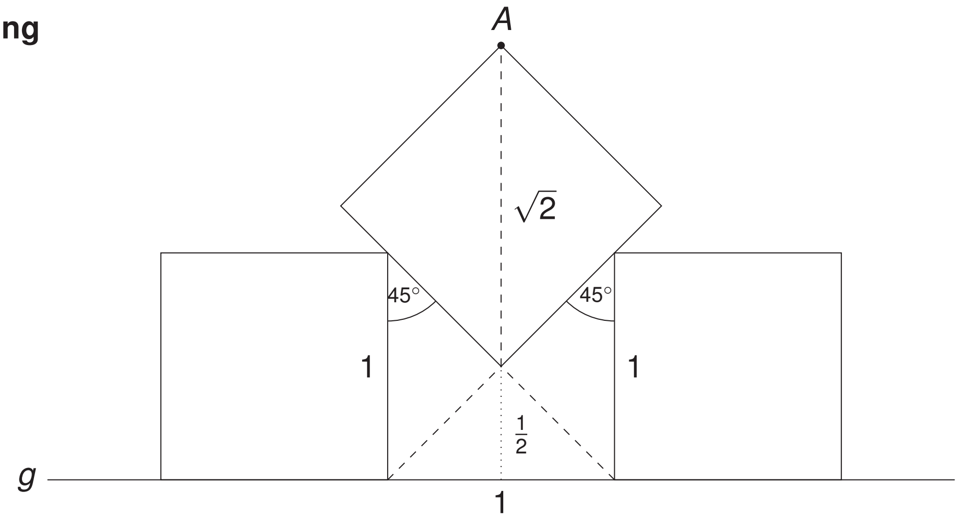
Aufgabe H2



Von drei Einheitsquadraten auf einer Gerade g (vgl. Abbildung) wird das mittlere Quadrat um 45° gedreht und in die Lücke gestzt.

Welchen Abstand hat A von g?

Lösung



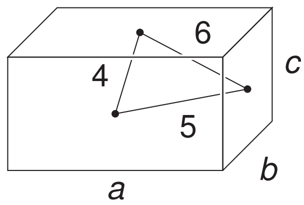
Der Abstand ist $\sqrt{2} + \frac{1}{2}$.

Zentrum für Mathematik · Kinzigstraße 32 · 64625 Bensheim · 06251-7079941
Internet: www.z-f-m.de · Email: marius.nuechter@z-f-m.de

Aufgabe H3

Die drei Mittelpunkte der benachbarten Seitenflächen eines Quaders haben die Abstände 4, 5 und 6 (vgl. Abbildung).

Berechnen Sie das Volumen $a \cdot b \cdot c$ des Quaders.



Lösung

Es gilt

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = 4^2,$$
$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 5^2,$$
$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = 6^2.$$

Hieraus folgt

$$b^2 + c^2 = 64,$$
$$a^2 + b^2 = 100,$$
$$a^2 + c^2 = 144$$

und somit

$$a^2 = 90, \quad b^2 = 10 \quad \text{und} \quad c^2 = 54.$$

Also ist

$$a \cdot b \cdot c = 90\sqrt{6}.$$

Zentrum für Mathematik · Kinzigstraße 32 · 64625 Bensheim · 06251-7079941
Internet: www.z-f-m.de · Email: marius.nuechter@z-f-m.de

Aufgabe H4

Für welche reellen Zahlen x gilt

$$81^x + 3 = 3^x + 3 \cdot 27^x \ ?$$

Lösung

Aus

$$81^x + 3 = 3^x + 3 \cdot 27^x$$

folgt

$$27^x \cdot 3^x + 3 = 3^x + 3 \cdot 27^x$$

und

$$27^x \cdot (3^x - 3) = 3^x - 3$$

beziehungsweise

$$(27^x - 1)(3^x - 3) = 0.$$

Hieraus folgt $x = 0$ oder $x = 1$.

Aufgabe H5

Treppenhausen ist ein seltsames Dorf. In jeder Straße ist eine Seite unbebaut und auf der anderen Seite stehen genau 10 Häuser nebeneinander. Die Häuser haben 1, 2 oder 3 Stockwerke. Benachbarte Häuser unterscheiden sich um genau ein Stockwerk.

Wie viele Straßen gibt es in Treppenhausen höchstens, wenn die Anordnung der Häuser in jeder Straße verschieden ist?

Lösung

Die 10 Häuser in einer Straße können verschieden angeordnet werden.

Die folgenden Zahlen sind die Stockwerke. Dabei bedeutet 1/3, das hier ein Haus entweder mit einem oder mit drei Stockwerken steht.

Straßen	Anzahl
1 – 2 – 1/3 – 2 – 1/3 – 2 – 1/3 – 2 – 1/3 – 2	$1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 16$
2 – 1/3 – 2 – 1/3 – 2 – 1/3 – 2 – 1/3 – 2 – 1/3	$1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 32$
3 – 2 – 1/3 – 2 – 1/3 – 2 – 1/3 – 2 – 1/3 – 2	$1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 16$

Treppenhausen hat also höchstens $16 + 32 + 16 = 64$ Straßen.

Aufgabe H6

Wenn ein Gummiball aus h Meter Höhe fallen gelassen wird, springt er nach dem Bodenkontakt $\frac{3}{4}h$ Meter hoch.

Ein Ball wird aus 8 m Höhe fallen gelassen.

Welchen Weg hat der Ball zurückgelegt, wenn er den Boden das vierte Mal berührt?

Lösung

$$8 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3\right) = 8 + 12 + 9 + \frac{27}{4} = 35\frac{3}{4}\ [\mathrm{m}]$$

Aufgabe H7

Wie viele dreistelligen Zahlen gibt es, bei denen die mittlere Ziffer der Mittelwert der ersten und letzten Ziffer ist?

Zum Beispiel sind 531 und 420 solche Zahlen.

Lösung

Gilt für die dreistellige Zahl *abc*, dass $b = \frac{a+c}{2}$, so müssen a und c entweder beide gerade oder beide ungerade sein.

Im ersten Fall gibt es $5 \cdot 4 = 20$ und im zweiten Fall $5 \cdot 5 = 25$ Zahlen, also insgesamt $20 + 25 = 45$ Zahlen.

Aufgabe H8

Die Pyramide auf dem Marktplatz von Karlsruhe ist das Grabmal des Stadtgründers Karl Wilhelm von Baden-Durlach.

Die Pyramide aus rotem Sandstein hat eine quadratischen Grundfläche mit einer Seitenlänge von 8 m. Die vier Kanten sind 10 m lang.

Berechnen Sie das Volumen V der Pyramide.

Lösung

Für die Höhe h der Pyramide gilt

$$h^2 = 10^2 - \left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2 = 68.$$

Also ist das Volumen

$$V = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot \sqrt{68} = \frac{128}{3} \cdot \sqrt{17} \approx 188 \; [\mathrm{m}^3].$$