Tag der Mathematik

Zentrum für Mathematik

Tag der Mathematik 2011

Gruppenwettbewerb

Einzelwettbewerb

Mathematische Hürden

Lösungen

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden.

Taschenrechner sind nicht zugelassen.

Aufgaben bitte nur auf den Aufgabenblättern bearbeiten und abgeben!

Zentrum für Mathematik · Werrastr. 26 · 64625 Bensheim · 06251/580306
Internet: www.z-f-m.de · E-Mail: rolf.nothnagel@z-f-m.de

Aufgabe G1 (8 Punkte)

Es sei $F(x) := \dfrac{9^x}{9^x+3}$.

a) Zeigen Sie $F(x) + F(1-x) = 1$.

b) Berechnen Sie

$$F\left(\frac{1}{2011}\right) + F\left(\frac{2}{2011}\right) + \ldots + F\left(\frac{2009}{2011}\right) + F\left(\frac{2010}{2011}\right) .$$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} F(x) + F(1-x) &= \frac{9^x}{9^x+3} + \frac{9^{1-x}}{9^{1-x}+3} = \frac{9^x}{9^x+3} + \frac{9}{9+3\cdot 9^x} \\ &= \frac{9^x}{9^x+3} + \frac{3}{3+9^x} = 1 . \end{aligned}$$

b) Für $n = 1, 2, \ldots, 2010$ gilt

$$F\left(\frac{n}{2011}\right) + F\left(\frac{2011-n}{2011}\right) = F\left(\frac{n}{2011}\right) + F\left(1 - \frac{n}{2011}\right) = 1 .$$

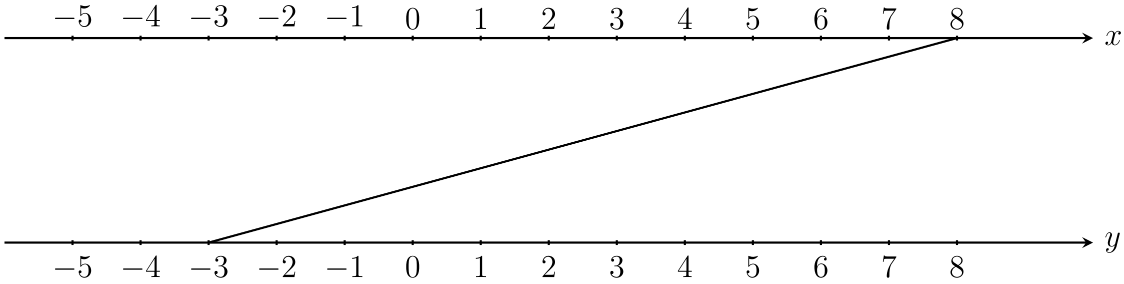
Paarweise Zusammenfassung ergibt

$$\begin{aligned} &F\left(\frac{1}{2011}\right) + \ldots + F\left(\frac{1005}{2011}\right) + F\left(\frac{1006}{2011}\right) + \ldots + F\left(\frac{2010}{2011}\right) \\ &= \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{1005 \text{ Einsen}} = 1005 . \end{aligned}$$

Aufgabe G2 (8 Punkte)

Eine Lösung der Gleichung $3x + 4y = 12$ ist $x = 8$ und $y = -3$.

Man kann diese Lösung auf zwei parallelen Achsen eintragen und durch eine sogenannte Lösungsstrecke miteinander verbinden:

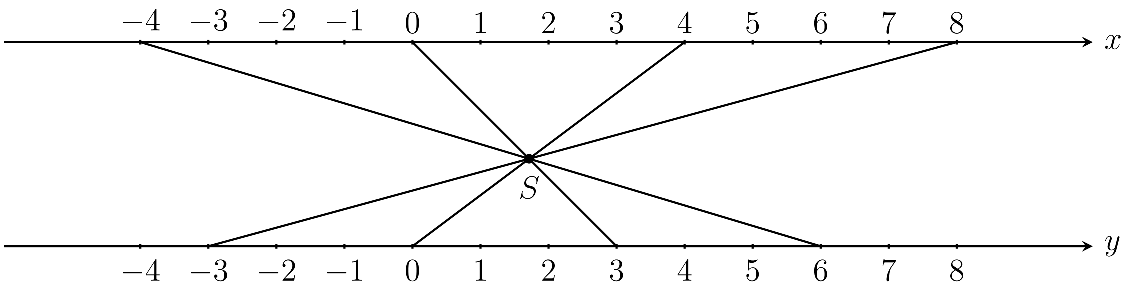


Bestimmen Sie weitere Lösungen der Gleichung $3x + 4y = 12$, tragen diese auf den parallelen x- und y- Achsen ein und verbinden diese Lösungspunkte mit einer Strecke.

Welche Eigenschaft haben diese Lösungsstrecken?

Begründen Sie diese Eigenschaft.

Lösung:

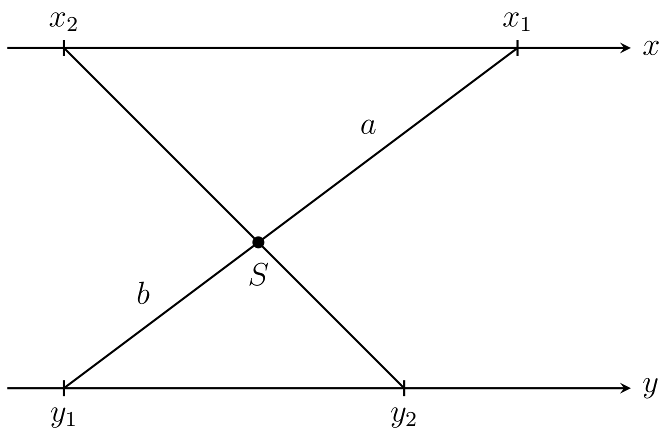


Die eingezeichneten Lösungsstrecken gehen alle durch einen Punkt S.
Jede weitere Strecke durch S scheint eine Lösungsstrecke zu sein.

(i) Zur Begründung, dass S jede der eingezeichneten Lösungsstrecken im Verhältnis $4 : 3$ teilt, wähle man zwei beliebige Lösungsstrecken (x_1, y_1) und (x_2, y_2) durch S. Dann gilt $3x_1 + 4y_1 = 12$ und $3x_2 + 4y_2 = 12$.

Hieraus folgt
(Strahlensatz)

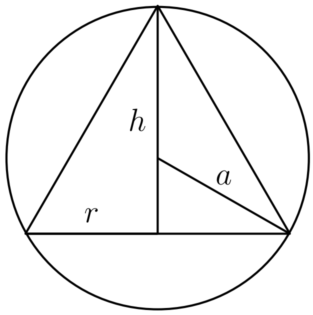
$$\frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} = \frac{4}{3} = \frac{a}{b}\ .$$



(ii) Zum Nachweis, dass jede Strecke durch S eine Lösungsstrecke ist, wähle man eine beliebige Strecke (x_0, y_0) durch S. Dann gilt $\frac{x_1 - x_0}{4} = \frac{y_0 - y_1}{3}$.
Hieraus folgt $3x_0 + 4y_0 = 3x_1 + 4x_1 = 12$.

(iii) Zur Begründung, dass jede Lösungsstrecke durch S gehen muss,
werde angenommen, dass (x_3, y_3) eine Lösungsstrecke sei, die nicht durch S geht.
Zeichne von x_3 aus eine Strecke durch S; diese treffe die y-Achse in y_4.
Nach (ii) ist $3x_3 + 4y_4 = 12$, also kann $3x_3 + 4y_3$ nicht 12 sein;
dies widerlegt die Annahme, dass (x_3, y_3) eine Lösungsstrecke sei.

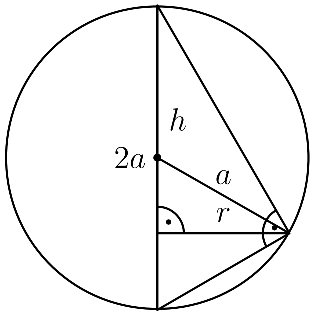
Aufgabe G3 (8 Punkte)



Einer Kugel mit Radius a ist der Kegel mit dem größten Volumen V einzubeschreiben.

Berechnen Sie die Höhe h und den Grundkreisradius r des Kegels in Abhängigkeit von a.

Lösung:



Mit $r^2 = a^2 - (h-a)^2$ (Pythagoras)
oder $r^2 + h^2 = 2ah$ (Kathetensatz)
oder $r^2 = h\,(2a-h)$ (Höhensatz)
folgt für das Volumen

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}\left(2ah^2 - h^3\right) \ .$$

1. Möglichkeit

$$V = \frac{\pi}{3}\left(2ah^2 - h^3\right) = \frac{\pi}{3}\left(4\left(\frac{2a}{3}\right)^3 - \left(h - \frac{4a}{3}\right)^2\left(h + \frac{2a}{3}\right)\right) \ .$$

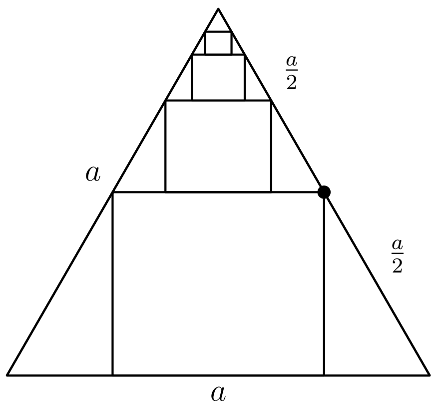
V ist maximal für $h = \frac{4}{3}a$.

2. Möglichkeit

$$\text{Aus } V'(h) = \frac{\pi}{3}\left(4ah - 3h^2\right) = 0 \text{ folgt } h = \frac{4}{3}a \ .$$
$$\text{Wegen } V''(h) = \frac{\pi}{3}(4a - 6h) < 0 \text{ für } h = \frac{4a}{3} \text{ ist } V \text{ maximal.}$$

Für den Radius gilt $r = \frac{2a}{3}\sqrt{2}$.

Aufgabe G4 (8 Punkte)



In ein gleichseitiges Dreieck (Seitenlänge $a = 8\,\text{cm}$) wird ein Rechteck so einbeschrieben, dass eine Seite des Rechtecks auf einer Dreiecksseite liegt und die weiteren Eckpunkte des Rechtecks die Seitenmitten der anderen Dreiecksseiten sind (vgl. Abbildung).
Eine der Restflächen im Dreieck ist wieder ein gleichseitiges Dreieck, in das in gleicher Weise ein Rechteck einbeschrieben wird.
Dieser Vorgang wird mehrmals wiederholt.

a) Bestimmen Sie die Fläche des ersten Rechtecks.

b) Welche Fläche hat das dritte Rechteck?
Welche Fläche hat das n-te Rechteck?

c) Das wie vielte Rechteck hat erstmals eine Fläche, die kleiner als $\frac{1}{10}\,\text{mm}^2$ ist?

Lösung:

	Grundseite	Höhe	Fläche [cm^2]
a) 1. Rechteck	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{4}\sqrt{3}$	$\frac{a^2}{8}\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$
b) 3. Rechteck	$\frac{a}{8}$	$\frac{a}{16}\sqrt{3}$	$\frac{a^2}{128}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
n-tes Rechteck	$\frac{a}{2^n}$	$\frac{a}{2^{n+1}}\sqrt{3}$	$\frac{a^2}{2^{2n+1}}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2^{2n-5}}$

c) Mit $a = 8\,\text{cm} = 80\,\text{mm}$ folgt für n die Ungleichung $\frac{64 \cdot 100\sqrt{3}}{2^{2n+1}} < \frac{1}{10}$,
also $1000 < \frac{2^{2n-5}}{\sqrt{3}} < 2^{2n-5}$, da $\sqrt{3} > 1$.

Wegen $2^{10} > 1000$, muss $2n - 5 > 10$ sein, also $n = 8$.

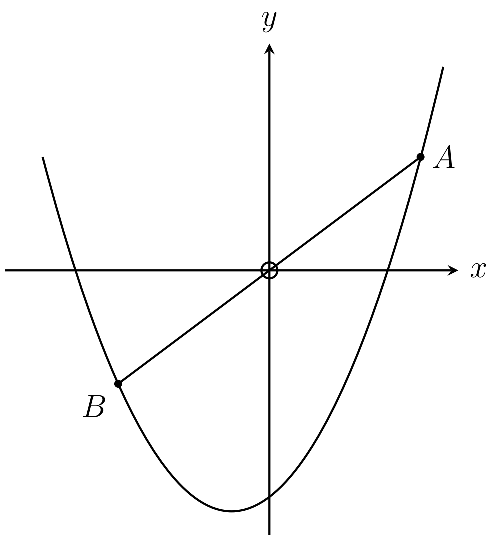
Für $n = 7$ ist die Fläche $\frac{25\sqrt{3}}{128} \approx 0,3\,[\text{mm}^2]$.

Aufgabe E1 (8 Punkte)

Die Punkte A und B liegen auf der Parabel $y = 4x^2 + 7x - 1$.

Der Koordinatenursprung O ist Mittelpunkt der Strecke AB.

Berechnen Sie die Länge von AB.



Lösung:

Für $A\,(p \mid q)$ und $B\,(-p \mid -q)$

$$\begin{array}{ll} \text{gilt} & q = 4p^2 + 7p - 1 \\ \text{und} & -q = 4p^2 - 7p - 1 \ . \end{array}$$

Hieraus folgt $p = \frac{1}{2}$ und $q = \frac{7}{2}$ und somit

$$AB = \sqrt{(2p)^2 + (2q)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \ .$$

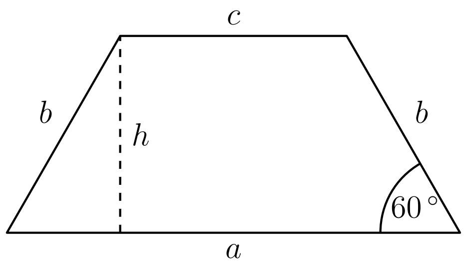
Zentrum für Mathematik · Werrastr. 26 · 64625 Bensheim · 06251/580306
Internet: www.z-f-m.de · E-Mail: rolf.nothnagel@z-f-m.de

Aufgabe E2 (8 Punkte)

Beim Bau eines unterirdischen Stollens sind folgende Bedingungen einzuhalten:

(i) Der Querschnitt muss ein gleichschenkliges Trapez mit Flächeninhalt $6\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2$ sein.

(ii) Der Neigungswinkel der Seitenwände gegenüber der Bodenfläche muss 60 Grad betragen.



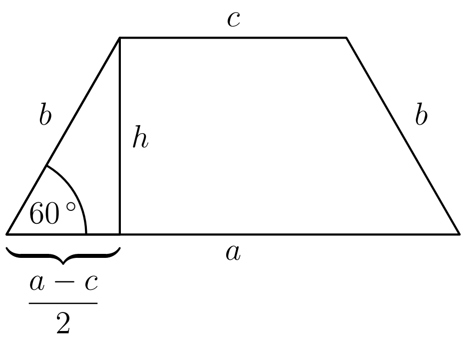
Wie hoch wird der Stollen (Trapezhöhe h), wenn das Querschnittstrapez minimalen Umfang U haben soll?

Lösung:

Es gilt

(i) $6\sqrt{3} = \frac{a+c}{2}h$, also $a+c = \frac{12\sqrt{3}}{h}$

(ii) $h = \frac{a-c}{2}\sqrt{3}$, also $a-c = \frac{2h}{\sqrt{3}}$



Somit ist der Umfang

$$U = a+c+2b = a+c+2\,(a-c) = \frac{12\sqrt{3}}{h} + \frac{4h}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}\left(h+\frac{9}{h}\right) \ .$$

1. Möglichkeit

$$U = \frac{4}{\sqrt{3}}\left(h+\frac{9}{h}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}}\left(6+\left(\sqrt{h}-\frac{3}{\sqrt{h}}\right)^2\right) \text{ wird minimal für } \sqrt{h}-\frac{3}{\sqrt{h}} = 0 \ ,$$

also $h = 3$.

2. Möglichkeit

$$\text{Aus } U'(h) = \frac{4}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{9}{h^2}\right) = 0 \text{ folgt } h = 3 \ .$$

$$\text{Wegen } U''(h) = \frac{24\sqrt{3}}{h^3} > 0 \text{ für } h = 3 \text{ liegt ein Minimum vor.}$$

Aufgabe E3 (8 Punkte)

Die fünfstellige Zahl $a679b$ ist durch 72 teilbar.

Bestimmen Sie die Ziffern a und b.

Lösung:

Wegen $72 = 8 \cdot 9$ muss die Zahl durch 8 und 9 teilbar sein. Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn die Zahl aus den letzten drei Ziffern durch 8 teilbar ist. Aus $8 \mid 79b$ folgt $b = 2$.

Die Quersumme muss durch 9 teilbar sein.
Aus $a + 6 + 7 + 9 + 2 = a + 24$ folgt $a = 3$.
Es gilt $36792 = 72 \cdot 511$.

Aufgabe H1 (3 Punkte)

Für welches x gilt $(10^{2009}+25)^2-(10^{2009}-25)^2=10^x$?

Lösung:

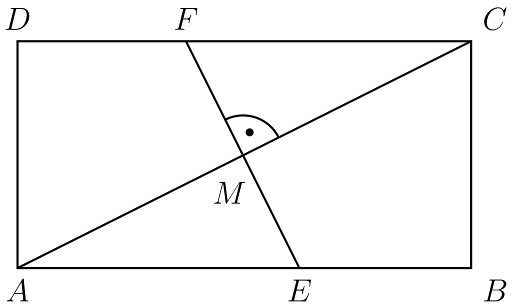
Mit $a:=2009$ gilt

$$\begin{aligned}
&(10^a+25)^2-(10^a-25)^2\\
&=10^{2a}+50\cdot 10^a+25^2-10^{2a}+50\cdot 10^a-25^2\\
&=100\cdot 10^a=10^{a+2}
\end{aligned}$$

und somit $x=a+2=2011$.

Aufgabe H2 (3 Punkte)

In einem Rechteck $ABCD$ mit $AB > BC$ werden E auf AB und F auf CD so gewählt, dass Viereck $AECF$ eine Raute ist (Mittelpunkt M).



Berechnen Sie EF, wenn

(i) $AB = 8$ und $BC = 6$,

(ii) $AB = a$ und $BC = b$.

Lösung:

Die Dreiecke ABC und CMF sind ähnlich.

Also gilt

$$\frac{\frac{1}{2}EF}{\frac{1}{2}AC} = \frac{BC}{AB} = \frac{b}{a}$$

und somit

$$EF = \frac{b}{a}\sqrt{a^2+b^2} = \frac{6}{8}\sqrt{8^2+6^2} = \frac{15}{2}$$

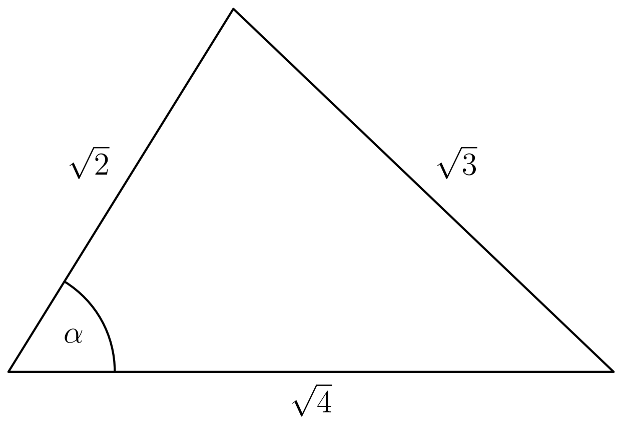
Aufgabe H3 (3 Punkte)

Gegeben ist ein Dreieck mit
den Seitenlängen $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{4}$.

Berechnen Sie

a) $\cos\alpha$,

b) die Fläche des Dreiecks.



Lösung:

1. Möglichkeit

   a) Nach dem Kosinussatz gilt $\cos\alpha = \dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{4}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{4}} = \dfrac{3}{4\sqrt{2}}$

   b) $\dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{4} \sin\alpha = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{4}\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \dfrac{\sqrt{23}}{4}$

2. Möglichkeit

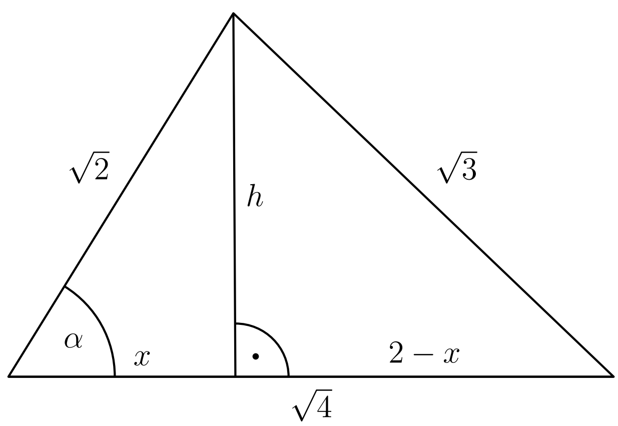
   Aus $x^2 + h^2 = 2$

   und $(2 - x)^2 + h^2 = 3$

   folgt $x = \dfrac{3}{4}$ und $h^2 = \dfrac{23}{16}$.

   a) $\cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{4\sqrt{2}}$

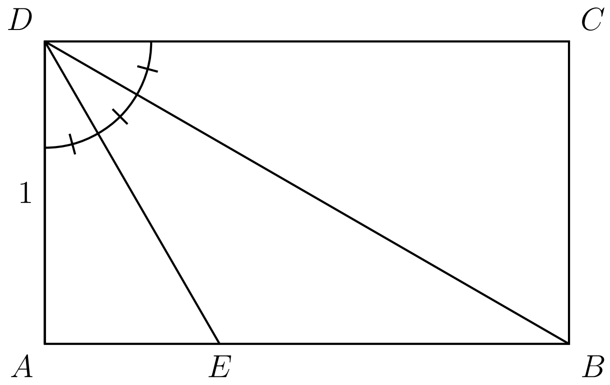
   b) $\dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot h = \dfrac{\sqrt{23}}{4}$



Aufgabe H4 (3 Punkte)

Im Rechteck $ABCD$ mit $AD = 1$ wird der Winkel bei D durch DE und die Diagonale BD gedrittelt.

Berechnen Sie den Umfang des Dreieck BDE.



Lösung:

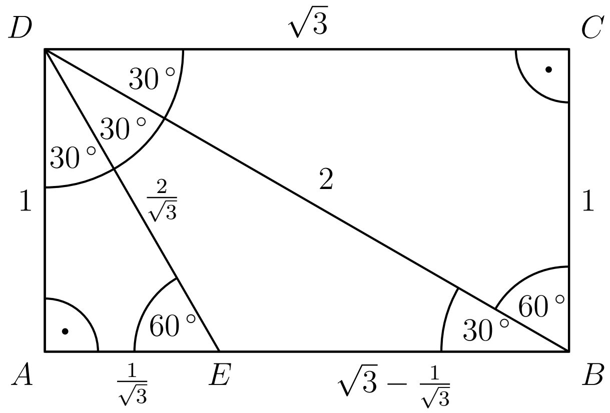
Aus der Zeichnung folgt

$$BD = 2\ ,$$

$$BE = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\ ,$$

$$DE = \frac{2}{\sqrt{3}}\ .$$

Umfang: $2 + \frac{4}{3}\sqrt{3}$.



Aufgabe H5 (3 Punkte)

Es sei $a > 0$, $b > 0$, $a^b = b^a$ und $b = 9a$.

Berechnen Sie a.

Lösung:

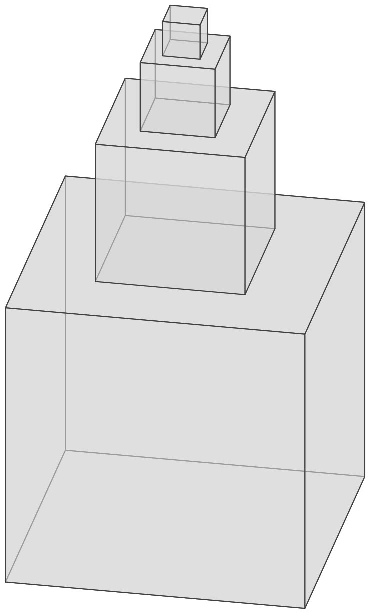
Aus $a = b^{\frac{a}{b}} = (9a)^{\frac{1}{9}}$ folgt $a^9 = 9a$.

Also $a^8 = 9$ und somit $a = \sqrt[4]{3}$.

Aufgabe H6 (3 Punkte)

Auf einem Würfel mit Kantenlänge 1 sitzt ein Würfel mit Kantenlänge $\frac{1}{2}$.
Auf diesem wiederum steht ein Würfel mit Kantenlänge $\frac{1}{4}$, usw., d.h. jeder Würfel trägt einen Würfel mit halber Kantenlänge.

Wenn dieses Aufeinandertürmen der Würfel nach vier Würfeln beendet wird,
welche Oberfläche hat dann dieser vierstöckige Würfelturm?



Lösung:

Betrachtet man den Würfelturm von unten und oben, so sieht man jeweils ein Einheitsquadrat.

Die senkrechten Quadratseiten haben zusammen die Fläche

$$4 \cdot \left(1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2\right) .$$

Die gesamte Oberfläche ist daher $2 + 4 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}\right) = 7 + \frac{5}{16}$.

Aufgabe H7 (3 Punkte)

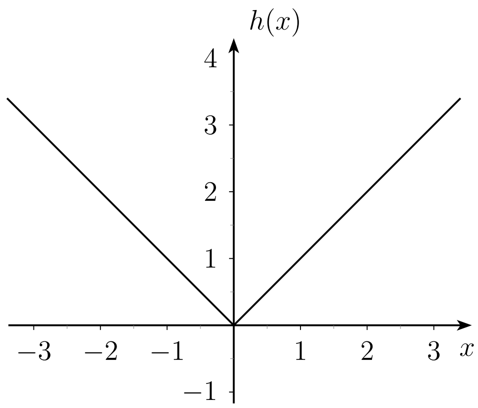
Gegeben sind die Funktionen

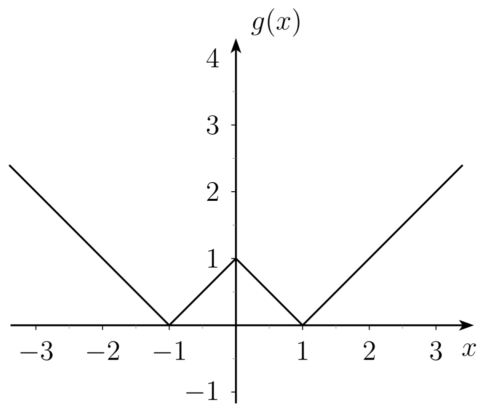
$h(x) = |x|, \quad g(x) = |h(x) - 1| \quad$ und $\quad f(x) = |g(x) - 2|$.

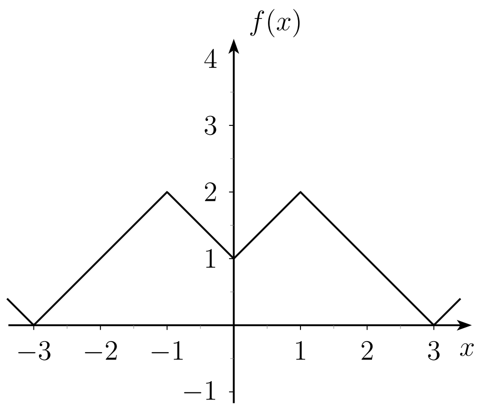
Zeichnen Sie die drei Funktionen in verschiedene Koordinatensysteme.

Berechnen Sie die Fläche, die von f und der x-Achse eingeschlossen wird.

Lösung:







Fläche $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 7$.

Aufgabe H8 (3 Punkte)

Zwischen reellen Zahlen a und b werden zwei Rechenarten definiert:

$$a \otimes b := 2 \cdot a \cdot b, \text{ dabei ist "}\cdot\text{" die normale Multiplikation,}$$
$$a \# b := 2 \cdot a - b, \text{ dabei ist "-" die normale Subtraktion.}$$

a) Welche der Zahlen $(12 \otimes 26) \# 8$ oder $12 \otimes (26 \# 8)$ ist größer?

b) Bestimmen Sie alle a, für die $a \otimes a = a \# a$ gilt.

Lösung:

a) $(12 \otimes 26) \# 8 = (2 \cdot 12 \cdot 26) \# 8 = 624 \# 8 = 2 \cdot 624 - 8 = 1240$
$12 \otimes (26 \# 8) = 12 \otimes (2 \cdot 26 - 8) = 12 \otimes 44 = 2 \cdot 12 \cdot 44 = 1056$

b) Aus $a \otimes a = a \# a$ folgt $2a^2 = 2a - a$
und somit $a \cdot (2a - 1) = 0$. Also $a = 0$ oder $a = \frac{1}{2}$.