Skript zur Vorlesung

Pseudodifferentialoperatoren

Wintersemester 2007/08

Robert Denk, Jörg Seiler

Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 26. 1. 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung 5

a) Motivation 5

b) Fouriertransformation und Distributionen 6

2 Symbole und Pseudodifferentialoperatoren 10

3 Oszillator-Integrale 16

4 Doppelsymbole, Algebraeigenschaft und Elliptizität 23

5 Stetigkeit in Sobolevräumen 30

6 Pseudodifferentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten 37

a) Mannigfaltigkeiten: Eine schnelle Einführung 37

b) Pseudodifferentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten 42

7 Fredholm-Theorie für elliptische Pseudodifferentialoperatoren 45

a) Fredholm-Operatoren 45

b) Der Hauptsatz für elliptische Pseudodifferentialoperatoren 50

c) Randwertprobleme: Ein kurzer Ausblick 53

1. Einführung

1.1 Worum geht's? Hier wird kurz die Idee der Pseudodifferentialoperatoren erläutert. Hierbei spielt die Fourier-Transformation eine entscheidende Rolle; diese führt auf den Begriff des Symbols. Einige Resultate über den Schwartz-Raum der schnell fallenden Funktionen bzw. seinen Dualraum, den Raum der temperierten Distributionen, werden kurz wiederholt.

a) Motivation

Die meisten Gleichungen der mathematischen Physik sind partielle Differentialgleichungen. Hier hat man es (im linearen Fall) mit einem Differentialoperator der Form

$$A(x, D) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

zu tun, wobei $a_\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ die Koeffizienten sind, und die übliche Multiindex-Schreibweise

$$D^\alpha := (-i)^{|\alpha|}\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$$

verwendet wird.

„Echte“ Gleichungen sind allerdings wesentlich komplizierter, etwa nichtlinear und nicht im ganzen Raum $\mathbb{R}^n$ gegeben. Die Idee der Pseudodifferentialoperatoren lässt sich jedoch an obigem einfachem Beispiel am besten erläutern. Ein möglicher Zugang zu partiellen Differentialgleichungen verwendet die Fourier-Transformation

$$\mathscr{F} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n),$$

denn diese verwandelt partielle Ableitungen in punktweise Multiplikation mit der entsprechenden Kovariablen. Falls die Koeffizienten a_α nicht von x abhängen, so gilt

$$A(x, D)u = \mathscr{F}^{-1} a \mathscr{F} u$$

mit $a\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $a(\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \xi^\alpha$. Die Funktion a, welche durch Ersetzen des Differentialoperators D^α durch die Multiplikation mit ξ^α entsteht, heißt das Symbol von $A(x, D)$.

Auch bei nichtkonstanten Koeffizienten ist das Symbol des Operators $A(x, D)$ gegeben durch

$$a(x, \xi) := \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\xi^\alpha.$$

Unter Verwendung der Inversionsformel für die Fourier-Transformation kann man (für hinreichend glatte Funktionen u) den Operator A schreiben in der Form

$$A(x, D)u = \int_{\mathbb{R}^n} a(x, \xi)(\mathscr{F}u)(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

(Details siehe unten). Anschaulich ist das eine Beschreibung von $A(x,D)u$ als Überlagerung von Schwingungen $e^{ix\xi}$ im Frequenzbereich, wobei die Funktion bei der Frequenz ξ mit dem Faktor $a(x,\xi)$ verstärkt wird.

Falls $A = A(D)$ konstante Koeffizienten besitzt, so kann man den inversen Operator direkt angeben: Für das Symbol $p(\xi) := \frac{1}{a(\xi)}$ gilt offensichtlich $A(D)\mathscr{F}^{-1}p(\xi)\mathscr{F}u = u$, d.h. der zum Symbol p gehörige Operator $P = \operatorname{op}(p)$ ist die Inverse zu A. Für eine Präzisierung dieser Aussage muss noch der zum formalen Differentialoperator gehörige Operator A definiert werden. Der Operator P, gegeben durch

$$Pf := \int_{\mathbb{R}^n} p(\xi)(\mathscr{F}f)(\xi)e^{ix\xi}d\xi,$$

ist *kein* Differentialoperator mehr. Er gehört zur Klasse der Pseudodifferentialoperatoren (ψdo's).

Allgemein ist der zu einem Symbol $p(x,\xi)$ gehörige ψdo $P = P(x,D)$ gegeben durch

$$P = \mathscr{F}^{-1}p(x,\xi)\mathscr{F}, \text{ d.h. } Pf := \int_{\mathbb{R}^n} p(x,\xi)e^{ix\xi}(\mathscr{F}f)(\xi)d\xi.$$

Als Ziele der Theorie der ψdo's wären unter anderem zu nennen:

- Untersuchung der Invertierbarkeit von Differentialoperatoren anhand ihres Symbols,
- Beschreibung der inversen Operatoren bzw. approximativer Inverser,
- Bestimmung des Abbildungsverhaltens eines ψdos in Skalen von Funktionenräumen (etwa Sobolevräumen oder Hölderräumen),
- Aufbau eines Kalküls von Pseudodifferentialoperatoren, in welchem etwa die Komposition, der inverse Operator, der adjungierte Operator dargestellt werden kann.

Es ist klar, dass man hierzu zunächst die Symbolklassen definieren muss. Hier gibt es in der Literatur eine ganze Reihe von Klassen, wir werden uns in dieser Vorlesung auf die vielleicht bekannteste und wichtigste beschränken. Der Aufbau eines Kalküls ist technisch relativ aufwändig, aber zur Beschreibung des Lösungsoperators etwa einer partiellen Differentialgleichung unerlässlich.

b) Fouriertransformation und Distributionen

1.2 Bemerkung. Im folgenden sei $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ der Schwarz-Raum der schnell fallenden Funktionen, d.h. aller Funktionen $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, für welche

$$\|u\|_k := \sup\Big\{|x^\alpha\partial_x^\beta u(x)| \mid x \in \mathbb{R}^n,\ |\alpha|+|\beta| \le k\Big\} < \infty \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}_0. \tag{1.1}$$

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

Mit den (Halb)normen aus (1.1) ist $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ein Frèchetraum.

Der topologische Dualraum $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ der temperierten Distributionen besteht aus allen linearen stetigen Abbildungen $T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$. Man beachte, dass eine lineare Abbildung $T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ genau dann stetig ist, falls eine Konstante $C \geq 0$ existiert mit

$$|T(u)| \leq C\|u\|_k \qquad \forall\, u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Statt $T(u)$ schreibt man auch oft $\langle T, u\rangle$. Der Raum $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ wird mit der durch die Halbnormen

$$\|T\|_u = |\langle T, u\rangle| \qquad u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

gegebene lokalkonvexe Topologie versehen (schwach-*-Topologie).

Ableitungen temperierter Distributionen werden wie üblich durch

$$\langle \partial^\alpha T, u\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha u\rangle \qquad \forall\, u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

definiert. Ist $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ von temperiertem Wachstum, d.h.

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n \quad \exists\, C \geq 0,\, N \in \mathbb{N} : \qquad |\partial^\alpha a(x)| \leq C(1+|x|)^N \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

so ist $aT \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$\langle aT, u\rangle := \langle T, au\rangle \qquad \forall\, u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

$T \mapsto \partial^\alpha T$ und $T \mapsto aT$ sind stetige Abbildungen $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

1.3 Beispiel. a) Reguläre Distributionen: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ meßbar mit $(1+|x|)^{-N} f(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\langle T_f, u\rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)u(x)\,dx \qquad \forall\, u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Die sogenannte Dichte f von T_f ist durch T_f eindeutig bestimmt.[1] Die Abbildung

$$f \mapsto T_f : L_p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \qquad (1 \leq p \leq \infty)$$

ist also injektiv; in diesem Sinne gilt $L_p(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

b) δ-Distribution(en): Für festes $y \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\langle \delta_y, u\rangle := u(y) \qquad \forall\, u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

[1] d.h. $T_f = 0$ impliziert $f = 0$ fast überall

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

c) Der Cauchysche Hauptwert:[2]

$$\Big\langle \mathrm{p.v.}\frac{1}{x}, u\Big\rangle := \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{|x|\ge\varepsilon}\frac{u(x)}{x}\,dx \qquad \forall\, u\in\mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

Wegen $\displaystyle\int_{\varepsilon\le|x|\le 1}\frac{1}{x}\,dx = 0$ gilt

$$\Big\langle \mathrm{p.v.}\frac{1}{x}, u\Big\rangle = \int_{|x|\le 1}\frac{u(x)-u(0)}{x}\,dx + \int_{|x|\ge 1}\frac{u(x)}{x}\,dx.$$

1.4 Bemerkung. Die Fouriertransformation

$$\mathscr{F}:\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathscr{S}(\mathbb{R}^n),\ u\mapsto \widehat{u}(\xi) = (\mathscr{F}u)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}u(x)\,dx \qquad \forall\,\xi\in\mathbb{R}^n$$

ist linear und stetig: Für alle $k\in\mathbb{N}_0$ gibt es ein $C\ge 0$ so, dass

$$\|\widehat{u}\|_k \le C\|u\|_{k+n+1} \qquad \forall\, u\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n). \tag{1.2}$$

Die Fourier-Transformierte $\mathscr{F}:\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist bijektiv mit Inverser

$$\check{u}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}u(\xi)\,d\xi, \qquad d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}d\xi.$$

Für $T\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ definiert man $\mathscr{F}T := \widehat{T}$ mit

$$\langle\widehat{T}, u\rangle = \langle T, \widehat{u}\rangle \qquad \forall\, u\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Dann ist $\mathscr{F}:\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)\to\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ stetig, linear und bijektiv mit Inverser $\mathscr{F}^{-1}T = \check{T}$, definiert durch

$$\langle\check{T}, u\rangle := \langle T, \check{u}\rangle \qquad \forall\, T\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \forall\, u\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

.

Die Fourier-Transformation ist in der Theorie partieller Differentialgleichungen von entscheidender Bedeutung, denn sie verwandelt partielle Ableitungen in punktweise Multiplikationen, siehe Teil a) des folgenden Satzes.

1.5 Satz. *a) Es gilt* $\widehat{\partial^\alpha T} = i^{|\alpha|}\xi^\alpha\widehat{T}$ *und* $\partial^\alpha\widehat{T} = (-i)^{|\alpha|}\widehat{x^\alpha T}$ *für alle* $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$.

b) Ist $C_0(\mathbb{R}^n) = \{f\in C(\mathbb{R}^n)\mid \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0\}$ *mit der Supremum-Norm versehen,*[3] *so ist* $\mathscr{F}: L_1(\mathbb{R}^n)\to C_0(\mathbb{R}^n)$ *stetig.*[4]

[2] englisch: pricipal value
[3] dann ist $C_0(\mathbb{R}^n)$ ein Banachraum
[4] Lemma von Riemann-Lebesgue

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

d) Ist $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy$ *die Faltung von* $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, *so ist*

$$\mathscr{F}(f * g) = \widehat{f}\,\widehat{g}.$$

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

2. Symbole und Pseudodifferentialoperatoren

2.1 Worum geht's? In diesem Abschnitt wird die Klasse der Symbole definiert, welche wir in dieser Vorlesung betrachten werden. Symbole sind glatte Funktionen, für welche gewisse Abschätzungen für die Funktion selbst und alle Ableitungen gelten. Das Produkt von Symbolen ist wieder ein Symbol. Ein wichtiger Begriff ist die asymptotische Summe von Symbolen, und man kann zeigen, dass es zu einer asymptotischen Summe immer auch ein Symbol gibt, welches diese Asymptotik besitzt. Dies wird später von Bedeutung sein, wenn Inverse von Pseudodifferentialoperatoren betrachtet werden.

Die Symbole von Differentialoperatoren sind in der Symbolklasse enthalten, genauer handelt es sich hier um klassische Symbole. Dies sind Symbole, welche eine asymptotische Summe mit homogenen Symbolen besitzen.

Im folgenden schreiben wir

$$\langle y\rangle := \sqrt{1+|y|^2} \quad (y \in \mathbb{R}^n).$$

Offensichtlich ist $y \mapsto \langle y\rangle \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, und es gilt

$$\langle y\rangle \le (1+|y|) \le \sqrt{2}\,\langle y\rangle \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}^m.$$

2.2 Definition. *Es sei $\mu \in \mathbb{R}$. Mit $S^\mu(\mathbb{R}^n)$ bezeichnen wir denjenigen Unterraum von $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$*[5]*, dessen Elemente folgende Eigenschaft haben: Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist*

$$\|p\|_k^{(\mu)} := \sup_{\substack{x,\xi\in\mathbb{R},\\ |\alpha|+|\beta|\le k}} \left|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha p(x,\xi)\right| \langle\xi\rangle^{|\alpha|-\mu} < \infty. \tag{2.1}$$

Wir nennen solche p ein <u>(Links-)Symbol</u> der <u>Ordnung</u> μ. Setze

$$S^{-\infty}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{\mu\in\mathbb{R}} S^\mu(\mathbb{R}^n).$$

Die Symbolklasse $S^\mu(\mathbb{R}^n)$ ist ein Spezialfall einer allgemeineren Definition und ist in der Literatur oft als $S^\mu_{1,0}(\mathbb{R}^n)$ zu finden. Da wir jedoch Klassen der Form $S^\mu_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^n)$ nicht betrachten werden, verzichten wir auf den unteren Index.

2.3 Beispiel. Es sei $\mu \in \mathbb{N}_0$ und

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le\mu} a_\alpha(x)\xi^\alpha, \qquad a_\alpha \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{2.2}$$

Dann ist $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ ein Linkssymbol der Ordnung μ.

[5] dies ist der Raum aller glatten Funktionen $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

2.4 Beispiel. Für $\mu \in \mathbb{R}$ ist $\langle\xi\rangle^\mu \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ ein von x unabhängiges Symbol. Denn per Induktion zeigt man: $\partial_\xi^\alpha \langle\xi\rangle^\mu$ ist eine endliche Linearkombination von Termen der Form $p_k(\xi)\langle\xi\rangle^{\mu-2l}$ mit Polynomen p_k vom Grad $\leq k$ und $2l-k \geq |\alpha|$. Also

$$|\partial_\xi^\alpha \langle\xi\rangle^\mu| \leq C\langle\xi\rangle^{\mu-(2l-k)} \leq C\langle\xi\rangle^{\mu-|\alpha|}.$$

2.5 Beispiel. Es sei $\mu \in \mathbb{R}$ und $p \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ erfülle

$$p(x,t\xi) = t^\mu p(x,\xi) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \quad \forall\, |\xi| \geq 1 \quad \forall\, t \geq 1$$

(man sagt p ist <u>positiv homogen vom Grad μ</u> für große ξ) und

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n,\,|\xi|\leq 1} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x,\xi)| < \infty \qquad \forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n.$$

Dann ist $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ ein Linkssymbol der Ordnung μ.

2.6 Lemma (Einfache Eigenschaften)**.** *Im folgenden seien $\mu, \widetilde{\mu} \in \mathbb{R}$.*

a) *$S^\mu(\mathbb{R}^n)$ ist ein Frèchetraum mit den (Halb-)Normen aus (2.1).*

b) *$p \mapsto \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p : S^\mu(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S^{\mu-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ ist linear und stetig.*

c) *$(p,\widetilde{p}) \mapsto p\widetilde{p} : S^\mu(\mathbb{R}^n) \times S^{\widetilde{\mu}}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S^{\mu+\widetilde{\mu}}(\mathbb{R}^n)$ ist bilinear und stetig.*

d) *$S^{\widetilde{\mu}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S^\mu(\mathbb{R}^n)$,*[6] *falls $\widetilde{\mu} \leq \mu$.*

2.7 Beispiel. Es sei $p(x,\xi)$ wie in (2.3) und $P : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ der Differentialoperator gegeben durch

$$(Pu)(x) = \sum_{|\alpha|\leq\mu} a_\alpha(x) D_x^\alpha u(x).$$

Wegen Satz 1.5.a) ist

$$\begin{aligned} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) &= a_\alpha(x)\, \mathscr{F}^{-1}\big(\xi^\alpha \widehat{u}(\xi)\big)(x) = a_\alpha(x) \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \xi^\alpha \widehat{u}(\xi)\, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} a_\alpha(x) \xi^\alpha \widehat{u}(\xi)\, d\xi. \end{aligned}$$

Also erhält man

$$(Pu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} p(x,\xi) \widehat{u}(\xi)\, d\xi \qquad \forall\, u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n). \tag{2.3}$$

[6] $X \hookrightarrow Y$ meint hier, dass $X \subseteq Y$ und dass $x \mapsto x : X \to Y$ stetig ist, also dass die Topologie von X stärker ist als die Spurtopologie von X bzgl. Y.

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

2.8 Definition. *Für ein Linkssymbol $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ und $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ definiere*

$$[p(x,D)u](x) = [\mathrm{op}(p)u](x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} p(x,\xi)\widehat{u}(\xi)\,d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

$p(x,D) = \mathrm{op}(p)$ heißt der Pseudodifferentialoperator (kurz: ψdo) mit Symbol $p(x,\xi)$.

2.9 Beispiel. Jeder Differentialoperator mit Koeffizienten aus $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist ein ψdo, vgl. Beispiel 2.7. Insbesondere gilt für den Laplace-Operatoren:

$$\Delta = \partial_{x_1}^2 + \ldots + \partial_{x_n}^2 = -D_{x_1}^2 - \ldots - D_{x_n}^2 = p(D), \qquad p(\xi) = -\xi_1^2 - \ldots - \xi_n^2 = -|\xi|^2.$$

2.10 Satz. *Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ ein Linkssymbol. Dann ist*

$$p(x,D) : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

stetig und linear. Genauer: Zu jedem $k \in \mathbb{N}_0$ gibt es ein $C \geq 0$ derart, dass

$$\|p(x,D)u\|_k \leq C\|p\|_k^{(\mu)}\|u\|_{k+2n+2+[\mu]} \qquad \forall\, u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \quad \forall\, p \in S^\mu(\mathbb{R}^n),$$

wobei $[\mu]$ die kleinste natürliche Zahl mit $\max(\mu,0) \leq [\mu]$ bezeichnet.

Beweis. Der Einfachheit halber sei $\mu \in \mathbb{N}_0$. Zunächst haben wir für beliebiges $q \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ und $v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, dass

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |[\mathrm{op}(q)v](x)| &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{-n-1}|\langle\xi\rangle^{-\mu}q(x,\xi)|\,|\langle\xi\rangle^{\mu+n+1}\widehat{v}(\xi)|\,d\xi \\
&\leq \|q\|_0^{(\mu)}\|\langle\xi\rangle^{\mu+n+1}\widehat{v}\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n}\langle\xi\rangle^{-n-1}\,d\xi \\
&\leq C\,\|q\|_0^{(\mu)}\|\widehat{v}\|_{\mu+n+1} \overset{1.4}{\leq} C\,\|q\|_0^{(\mu)}\|v\|_{\mu+2n+2}.
\end{aligned}$$

Für $\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n$ und $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt nun

$$x^\alpha\partial_x^\beta[\mathrm{op}(p)u](x) = \sum_{\beta_1+\beta_2=\beta} C_{\beta_1,\beta_2}x^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}(\partial_x^{\beta_2}p)(x,\xi)\xi^{\beta_1}\widehat{u}(\xi)\,d\xi.$$

Verwendet man nun Satz 1.5.a), dass $x^\alpha e^{ix\xi} = D_\xi^\alpha e^{ix\xi}$ und partielle Integration, so folgt

$$\begin{aligned}
x^\alpha\partial_x^\beta[\mathrm{op}(p)u](x) &= \sum_{\substack{\beta_1+\beta_2=\beta\\ \alpha_1+\alpha_2=\alpha}} C_{\beta_1,\beta_2,\alpha_1,\alpha_2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}(\partial_x^{\beta_2}\partial_\xi^{\alpha_2}p)(x,\xi)\mathscr{F}\big(x_1^\alpha\partial_x^{\beta_1}u\big)(\xi)\,d\xi \\
&= \sum_{\substack{\beta_1+\beta_2=\beta\\ \alpha_1+\alpha_2=\alpha}} C_{\beta_1,\beta_2,\alpha_1,\alpha_2}\big[\mathrm{op}\big(\partial_x^{\beta_2}\partial_\xi^{\alpha_2}p\big)(x_1^\alpha\partial_x^{\beta_1}u)\big](x).
\end{aligned}$$

Anwenden obiger Abschätzung liefert

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha\partial_x^\beta[\mathrm{op}(p)u](x)| &\le \sum_{\substack{\beta_1+\beta_2=\beta\\ \alpha_1+\alpha_2=\alpha}} C_{\beta_1,\beta_2,\alpha_1,\alpha_2}\|\partial_x^{\beta_2}\partial_\xi^{\alpha_2}p\|_0^{(\mu-|\alpha_2|)}\|x_1^\alpha\partial_x^{\beta_1}u\|_{\mu+2n+2}\\ &\le C_{\alpha,\beta}\|p\|_{|\alpha|+|\beta|}^{(\mu)}\|u\|_{\mu+2n+2+|\alpha|+|\beta|}.\end{aligned}$$

Summation über alle $|\alpha|+|\beta|\le k$ ergibt die Behauptung. □

2.11 Definition. *Es sei $\mu\in\mathbb{R}$ und $p_j\in S^{\mu_j}(\mathbb{R}^n)$ für $j\in\mathbb{N}_0$, wobei*

$$\mu=\mu_0\ge\mu_1\ge\mu_2\ge\ldots\xrightarrow{j\to\infty}-\infty.$$

Wir sagen, dass $p\in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ die asymptotische Summe der p_j ist und schreiben $p\sim\sum\limits_{j=0}^{\infty}p_j$, falls

$$p-\sum_{j=0}^{N-1}p_j\ \in\ S^{\mu_N}(\mathbb{R}^n)\qquad\forall\,N\in\mathbb{N}.$$

Notation: $\chi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ heißt eine 0-Ausschneidefunktion, falls $\chi(\xi)=\begin{cases}0 & :|\xi|\le 1\\ 1 & :|\xi|\ge 2\end{cases}$.[7]

2.12 Satz. *Es sei $\mu_0\in\mathbb{R}$ und $p_j\in S^{\mu_j}(\mathbb{R}^n)$, $j\in\mathbb{N}_0$, mit $\mu_j\searrow-\infty$. Dann gibt es ein $p\in S^{\mu_0}(\mathbb{R}^n)$ derart, dass $p\sim\sum\limits_{j=0}^{\infty}p_j$. Dieses p ist modulo $S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. **Existenz:** Sei χ eine 0-Ausschneidefunktion und $0<\varepsilon\le 1$. Dann ist für $|\alpha|\ge 1$

$$|\partial_\xi^\alpha\chi(\varepsilon\xi)|\le\begin{cases}C_\alpha\varepsilon^{|\alpha|} & :\xi\in\mathbb{R}^n\\ 0 & :|\xi|\le\varepsilon^{-1}\text{ oder }2\varepsilon^{-1}\le|\xi|\end{cases}.$$

Da $\varepsilon\le 2|\xi|^{-1}\le 4\langle\xi\rangle^{-1}$ für $\varepsilon^{-1}\le|\xi|\le 2\varepsilon^{-1}$,[8] folgt

$$|\partial_\xi^\alpha\chi(\varepsilon\xi)|\le C_\alpha\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}\qquad\forall\,0<\varepsilon\le 1\quad\forall\,\xi\in\mathbb{R}^n$$

für alle $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$.[9] Es folgt

$$\left|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta[\chi(\varepsilon\xi)p_j(x,\xi)]\right|\le C_{j,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{\mu_j-|\alpha|}=(C_{j,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{-1})\langle\xi\rangle^{\mu_j+1-|\alpha|}\tag{2.4}$$

[7] Statt 1 bzw. 2 kann man auch beliebige Konstanten $0<c_1<c_2$ verwenden.
[8] Für $|\xi|\ge 1$ ist $\langle\xi\rangle^2=1+|\xi|^2\le|\xi|^2$, also $|\xi|^{-1}\le\sqrt{2}\langle\xi\rangle^{-1}$.
[9] d.h. $\{\chi(\varepsilon\xi)\mid 0<\varepsilon\le 1\}$ ist eine beschränkte Teilmenge in $S^0(\mathbb{R}^n)$.

Jetzt wähle eine Folge $1 \geq \varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \ldots > \varepsilon_j \xrightarrow{j\to\infty} 0$ mit

$$C_{j,\alpha,\beta}\varepsilon_j \leq 2^{-j} \qquad \forall\, |\alpha| + |\beta| \leq j.$$

Da $\langle\xi\rangle^{-1} \leq |\xi|^{-1}$ und $\chi(\varepsilon_j\xi) = 0$ für alle ξ mit $|\xi|^{-1} \geq \varepsilon_j$,[10] folgt aus (2.4), dass

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta [\chi(\varepsilon_j\xi)p_j(x,\xi)]\right| \leq 2^{-j}\langle\xi\rangle^{\mu_j+1-|\alpha|} \qquad \forall\,(x,\xi) \quad \forall\, |\alpha|+|\beta| \leq j. \tag{2.5}$$

Jetzt definiere

$$p(x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \chi(\varepsilon_j\xi)p_j(x,\xi).$$

Dies ist eine lokal endliche Summe, insbesondere $p \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Für beliebig gegebenes $N \in \mathbb{N}$ ist

$$p - \sum_{j=0}^{N-1} p_j = \underbrace{\sum_{j=0}^{N-1}(\chi(\varepsilon_j\xi)-1)p_j}_{\in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n),\ \text{da} \equiv 0 \text{ für } |\xi| \geq 2\varepsilon_{N-1}^{-1}} + \underbrace{\sum_{j=N}^{\infty}\chi(\varepsilon_j\xi)p_j}_{=:q_N(x,\xi)}.$$

Wir müssen zeigen, dass $q_N \in S^{\mu_N}(\mathbb{R}^n)$ ist. Seien dazu $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ beliebig vorgegeben. Wähle $j_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$j_0 \geq \max(N, |\alpha|+|\beta|) \text{ und } \mu_{j_0} + 1 \leq \mu_N.$$

Dann ist

$$q_N(x,\xi) = \underbrace{\sum_{j=N}^{j_0-1}\chi(\varepsilon_j\xi)p_j}_{\in S^{\mu_N}(\mathbb{R}^n)} + q_{j_0}(x,\xi).$$

Nach Wahl von j_0 und wegen (2.5) gilt

$$|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta q_{j_0}(x,\xi)| \leq \Big(\sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{-j}\Big)\langle\xi\rangle^{\mu_N-|\alpha|} \leq \langle\xi\rangle^{\mu_N-|\alpha|}.$$

Daher ist

$$|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta q_N(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{\mu_N-|\alpha|}.$$

Eindeutigkeit: Seien $p^{(1)}, p^{(2)} \in S^{\mu_0}(\mathbb{R}^n)$ und $p^{(k)} \sim \sum p_j$. Dann ist

$$p^{(1)} - p^{(2)} = \Big(p^{(1)} - \sum_{j=0}^{N-1} p_j\Big) + \Big(p^{(2)} - \sum_{j=0}^{N-1} p_j\Big) \in S^{\mu_N}(\mathbb{R}^n).$$

Also $p^{(1)} - p^{(2)} \in \bigcap_{N\in\mathbb{N}} S^{\mu_N}(\mathbb{R}^n) = S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$. □

[10] also auch für alle ξ mit $\langle\xi\rangle^{-1} \geq \varepsilon_j^{-1}$

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

2.13 Definition. *Das Symbol $p \in S^{\mu}(\mathbb{R}^n)$, $\mu \in \mathbb{R}$, heißt ein klassisches oder polyhomogenes Symbol, falls es $p_j \in S^{\mu-j}(\mathbb{R}^n)$, $j \in \mathbb{N}_0$, gibt mit*

$$p_j(x, t\xi) = t^{\mu-j} p_j(x,\xi) \qquad \forall\, x \quad \forall\, |\xi| \geq 1 \quad \forall\, t \geq 1$$

und $p \sim \sum_j p_j$. Den Raum aller solcher Symbole nennen wir $S^{\mu}_{\mathrm{cl}}(\mathbb{R}^n)$

2.14 Beispiel. a) $p(x,\xi) = \sum\limits_{|\alpha|\leq\mu} a_\alpha(x)\xi^\alpha = \sum\limits_{j=0}^{\mu} p_j(x,\xi)$ mit $p_j(x,\xi) = \sum\limits_{|\alpha|=\mu-j} a_\alpha(x)\xi^\alpha$.

b) Es sei $p(\xi) = \langle\xi\rangle^{-2} = \frac{1}{1+|\xi|^2}$. Dann ist $p \in S^{-2}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\frac{1}{1+|\xi|^2} - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(-1)^j}{|\xi|^{2(j+1)}} = (-1)^N \frac{1}{|\xi|^{2N}} \frac{1}{1+|\xi|^2} \qquad \forall\, \xi \neq 0.$$[11]

Sei χ eine 0-Ausschneidefunktion. Nach Beispiel 2.5 ist dann

$$p_j(\xi) = \chi(2\xi)\frac{(-1)^j}{|\xi|^{2(j+1)}} \;\in\; S^{-2(1+j)}(\mathbb{R}^n).$$

Dann ist $p \sim \sum\limits_{j=0}^{\infty} p_j$, da wegen oben und Lemma 2.6.c)

$$p(\xi) - \sum_{j=0}^{N-1} p_j(\xi) = \frac{\chi(2\xi)}{|\xi|^{2N}} \frac{(-1)^N}{(1+|\xi|^2)} + \underbrace{(1-\chi)(2\xi)p(\xi)}_{\in C^\infty_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n) \subset S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)} \;\in\; S^{-2(N+1)}(\mathbb{R}^n).$$

[11] Induktion!

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

3. Oszillator-Integrale

3.1 Worum geht's? Die Methode der Pseudodifferentialoperatoren ist vor allem deswegen erfolgreich, weil die Eigenschaften eines Kalküls gelten: So ist die Komposition zweier ψdo's wieder ein ψdo, und man kann das zugehörige Symbol auch (als asymptotische Summe) angeben. Dies erlaubt es in Anwendungen, z.B. die Inverse relativ gut zu bestimmen. Technisch ist beim Beweis dieser Aussagen zu beachten, dass mehrfachen Integrale mit komplexen Exponentialfaktoren auftauchen, was immer Konvergenzschwierigkeiten zur Folge hat. Eine Möglichkeit, diese Schwierigkeiten zu umgehen, liegt darin, einen etwas allgemeineren Integralbegriff zu verwenden, den der Oszillator-Integrale.

3.2 Bemerkung. Seien $p_j \in S^{\mu_j}(\mathbb{R}^n)$ und $u, v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann

$$[\mathrm{op}(p_j)v](x) = \int \Big(\int e^{i(x-x')\xi} p_j(x,\xi) v(x')\, dx' \Big) d\xi.$$

Wir führen jetzt eine <u>formale</u> (und tatsächlich falsche) Rechnung zur Komposition zweier ψdo durch.

$$\begin{aligned} \big[\mathrm{op}(p_1)\big(\mathrm{op}(p_2)u\big)\big](x) &= \iint e^{i(x-x')\xi'} p_1(x,\xi') \Big(\iint e^{i(x'-z)\xi} p_2(x',\xi) u(z)\, dz d\xi \Big)\, dx' d\xi' \\ &= \iiiint e^{i(x-z)\xi} e^{-i(x-x')(\xi-\xi')} p_1(x,\xi') p_2(x',\xi) u(z)\, dx' d\xi' dz d\xi. \end{aligned}$$

Nach Variablensubstitution $y = x' - x$ und $\eta = \xi' - \xi$ folgt

$$\begin{aligned} &= \iint e^{i(x-z)\xi} \underbrace{\Big(\iint e^{-iy\eta} p_1(x,\xi+\eta) p_2(x+y,\xi)\, dy d\eta \Big)}_{=:p(x,\xi)} u(z)\, dz d\xi \\ &= [\mathrm{op}(p)u](x) \end{aligned}$$

Problem: Der Integrand in der Definition von p ist im allgemeinen nicht integrierbar.

Lösung: Verallgemeinerter Integralbegriff!

3.3 Definition (und Lemma)**.** *$A^{m,\tau}(\mathbb{R}^n)$ $(m, \tau \in \mathbb{R})$ sei der Raum aller glatter Funktionen $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mit*

$$\|a\|_k^{m,\tau} := \sup_{\substack{|\alpha|+|\beta|\le k \\ y,\eta\in\mathbb{R}^n}} \big\{ |\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a(y,\eta)| \langle y\rangle^{-\tau} \langle \eta\rangle^{-m} \big\} < \infty.$$

Die Elemente von $A^{m,\tau}(\mathbb{R}^n)$ heißen <u>Amplitudenfunktionen</u>. Dann ist $A^{m,\tau}(\mathbb{R}^n)$ ein Frèchetraum und $S^m(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow A^{m,0}(\mathbb{R}^n)$.

3.4 Satz. *Es sei $a \in A^{m,\tau}(\mathbb{R}^n)$ und $\chi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ mit $\chi(0) = 1$. Dann existiert der Grenzwert*

$$\mathrm{Os}[a] = \mathrm{Os} - \iint e^{-iy\eta} a(y,\eta)\, dy d\eta := \lim_{\varepsilon \to 0} \iint e^{-iy\eta} \chi(\varepsilon y, \varepsilon\eta) a(y,\eta)\, dy d\eta. \tag{3.1}$$

Für beliebige $l, l' \in \mathbb{N}_0$ mit $2l > n + m$ und $2l' > n + \tau$ ist

$$\mathrm{Os}[a] = \iint e^{-iy\eta} \langle y \rangle^{-2l'} (1 - \Delta_\eta)^{l'} \left[\langle \eta \rangle^{-2l} (1 - \Delta_y)^l a(y,\eta) \right] dy d\eta. \tag{3.2}$$

Beweis. <u>1. Schritt:</u> Setze $\chi_\varepsilon(y,\eta) = \chi(\varepsilon y, \varepsilon \eta)$. Dann gilt

i) $\chi_\varepsilon \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ für alle $\varepsilon > 0$,

ii) $\sup\left\{ |\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta \chi_\varepsilon(y,\eta)| \mid 0 < \varepsilon \le 1,\ (y,\eta) \in \mathbb{R}^{2n} \right\} < \infty$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$,

iii) $\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta \chi_\varepsilon(y,\eta) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \begin{cases} 1 & : |\alpha| + |\beta| = 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$ punktweise auf $\mathbb{R}^{2n}$.

<u>2. Schritt:</u> Es gilt

$$\langle y \rangle^{-2l'} (1 - \Delta_\eta)^{l'} e^{-iy\eta} = e^{-iy\eta} = \langle \eta \rangle^{-2l} (1 - \Delta_y)^l e^{-iy\eta}.$$

Bezeichnet I_ε die rechte Seite von (3.1), so folgt durch partielle Integration

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \iint e^{-iy\eta} \langle \eta \rangle^{-2l} (1 - \Delta_y)^l (\chi_\varepsilon(y,\eta) a(y,\eta))\, dy d\eta \\ &= \iint e^{-iy\eta} \underbrace{\langle y \rangle^{-2l'} (1 - \Delta_\eta)^{l'} \left[\langle \eta \rangle^{-2l} (1 - \Delta_y)^l (\chi_\varepsilon(y,\eta) a(y,\eta)) \right]}_{g_\varepsilon(y,\eta)} dy d\eta. \end{aligned}$$

Wegen $\langle \cdot \rangle^r \in S^r(\mathbb{R}^n)$, ii) und Produktregel gilt

$$|g_\varepsilon(y,\eta)| \le C_{l,l'} \|a\|_{2l+2l'}^{m,\tau} \langle y \rangle^{\tau - 2l'} \langle \eta \rangle^{m - 2l}. \tag{3.3}$$

Also hat g_ε eine gleichmäßige L_1-Majorante. Wegen iii) ist

$$g_\varepsilon(y,\eta) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \langle y \rangle^{-2l'} (1 - \Delta_\eta)^{l'} \left[\langle \eta \rangle^{-2l} (1 - \Delta_y)^l a(y,\eta) \right].$$

Die Behauptung folgt aus dem Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz. □

3.5 Korollar. *Der Wert in (3.1) hängt nicht von der Wahl von $\chi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ ab. Die Abbildung*

$$a \mapsto \mathrm{Os}[a] : A^{m,\tau}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

ist stetig (beachte (3.3)). Ist $a \in L_1(\mathbb{R}^{2n})$, so ist

$$\mathrm{Os}[a] = \iint e^{-iy\eta} a(y,\eta)\, dy d\eta.$$

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

3.6 Lemma. *Es sei $a \in A^{m,\tau}(\mathbb{R}^n)$. Dann gelten:*

a) *Partielle Integration:* $\mathrm{Os}[y^\alpha a] = \mathrm{Os}[D_\eta^\alpha a]$, $\quad \mathrm{Os}[\eta^\beta a] = \mathrm{Os}[D_y^\beta a]$.

b) *Translationsinvarianz:* $\mathrm{Os}[a] = \mathrm{Os}[e^{-i(y\eta_0 + y_0\eta + y_0\eta_0)} a(y + y_0, \eta + \eta_0)]$.

c) *Ist* $a(y, \eta) = a(y)$, *so ist* $\mathrm{Os}[e^{ix\eta} a] = a(x)$.

Beweis. a) Es genügt, die erste Gleichheit zu beweisen. Wegen

$$y^\alpha e^{-iy\eta} = (-D_\eta)^\alpha e^{-iy\eta}$$

und partieller Integration ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Os}[y^\alpha a] &= \lim_{\varepsilon \to 0} \iint e^{-iy\eta} D_\eta^\alpha \big(\chi(\varepsilon y, \varepsilon\eta) a(y, \eta)\big)\, dy d\eta \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{Os}[D_\eta^\alpha \big(\chi(\varepsilon y, \varepsilon\eta) a(y, \eta)\big)]. \end{aligned}$$

Schreibe

$$\begin{aligned} D_\eta^\alpha (\chi_\varepsilon(y, \eta) a(y, \eta)) &= \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D_\eta^\beta \chi_\varepsilon)(y, \eta)(D_\eta^{\alpha-\beta} a)(y, \eta) \\ &= \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \varepsilon^{|\beta|} (D_\eta^\beta \chi)(\varepsilon y, \varepsilon\eta)(D_\eta^{\alpha-\beta} a)(y, \eta). \end{aligned}$$

Wegen

$$|(D_\eta^\beta \chi)(\varepsilon y, \varepsilon\eta)| \le C_1(\alpha) \quad (y, \eta \in \mathbb{R}^n,\ \varepsilon \in (0, 1],\ |\beta| \le |\alpha|)$$

und

$$|(D_\eta^{\alpha-\beta} a)(y, \eta)| \le C_2(\alpha) \langle y\rangle^\tau \langle \eta\rangle^m \quad (y, \eta \in \mathbb{R}^n,\ \beta \le \alpha)$$

folgt $D_\eta^\alpha(\chi_\varepsilon a) \to D_\eta^\alpha a$ gleichmäßig auf Kompakta und auch

$$\|D_\eta^\alpha(\chi_\varepsilon a) - D_\eta^\alpha a\|_0^{m,\tau} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0).$$

Mit der gleichen Überlegung sieht man $D_\eta^\gamma D_y^\beta D_\eta^\alpha(\chi_\varepsilon a) \to D_\eta^\gamma D_y^\beta D_\eta^\alpha a$ gleichmäßig auf Kompakta und $\|D_\eta^\alpha(\chi_\varepsilon a) - D_\eta^\alpha a\|_k^{m,\tau} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$. Somit gilt $D_\eta^\alpha(\chi_\varepsilon a) \to D_\eta^\alpha a$ in der Topologie von $A^{m,\tau}(\mathbb{R}^n)$, und nach Korollar 3.5 folgt a).

b) Wir substituieren

$$\begin{aligned} \mathrm{Os}[a] &= \lim_{\varepsilon \to 0} \iint e^{-iy'\eta'} \chi(\varepsilon y', \varepsilon\eta') a(y', \eta') dy' d\eta' \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \iint e^{-iy\eta} \chi(\varepsilon(y + y_0), \varepsilon(\eta + \eta_0)) e^{-i(\eta y_0 + \eta_0 y + \eta_0 y_0)} a(y + y_0, \eta + \eta_0) dy d\eta. \end{aligned}$$

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

Genauso wie im Teil a) zeigt man, dass

$$\chi(\varepsilon(y+y_0),\varepsilon(\eta+\eta_0))e^{-i(\eta y_0+\eta_0 y+\eta_0 y_0)}a(y+y_0,\eta+\eta_0) \to e^{-i(\eta y_0+\eta_0 y+\eta_0 y_0)}a(y+y_0,\eta+\eta_0)$$

in der Topologie von $A^{m,\tau}(\mathbb{R}^n)$ gilt.

c) Wähle $\chi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi(0) = 1$. Dann

$$\begin{aligned}
\mathrm{Os}[e^{ix\eta}a] &= \mathrm{Os}-\iint e^{i(x-y)\eta}a(y)\,dyd\eta = \lim_{\varepsilon\to 0}\int \chi(\varepsilon y)a(y)\Big(\int e^{i(x-y)\eta}\chi(\varepsilon\eta)\,d\eta\Big)dy \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-n}\int \chi(\varepsilon y)a(y)(\mathscr{F}^{-1}\chi)\big(\tfrac{x-y}{\varepsilon}\big)\,dy \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int \chi(\varepsilon(x-\varepsilon z))a(x-\varepsilon z)(\mathscr{F}^{-1}\chi)(z)\,dz \\
&= a(x)\int (\mathscr{F}^{-1}\chi)(z)\,dz = a(x)\chi(0) = a(x).
\end{aligned}$$

□

3.7 Lemma. *Es sei $0 \le f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $a \in A^{m,\tau}(\mathbb{R}^n)$ und $\chi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi(0) = 1$.*

a) *Ist $|a(y,\eta)| \le Cf(y)\,\langle\eta\rangle^m$, so gilt* $\mathrm{Os}[a] = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint e^{-iy\eta}\chi(\varepsilon\eta)a(y,\eta)\,dyd\eta.$

b) *Ist $|a(y,\eta)| \le C\langle y\rangle^\tau f(\eta)$, so gilt* $\mathrm{Os}[a] = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint e^{-iy\eta}\chi(\varepsilon y)a(y,\eta)\,dyd\eta.$

c) *Gilt in a) zusätzlich, dass $\int e^{-iy\eta}a(y,\eta)\,dy \in L_1(\mathbb{R}^n_\eta)$, so ist*
$$\mathrm{Os}[a] = \int\Big(\int e^{-iy\eta}a(y,\eta)\,dy\Big)d\eta.$$

d) *Gilt in b) zusätzlich, dass $\int e^{-iy\eta}a(y,\eta)\,d\eta \in L_1(\mathbb{R}^n_y)$, so ist*
$$\mathrm{Os}[a] = \int\Big(\int e^{-iy\eta}a(y,\eta)\,d\eta\Big)dy.$$

Beweis. Dies folgt jeweils mit majorisierter Konvergenz, da die jeweiligen Integrale existieren. □

3.8 Lemma (Ungleichung von Peetre)**.** *Es sei $s \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\langle\xi+\eta\rangle^s \le 2^{|s|}\langle\xi\rangle^s\langle\eta\rangle^{|s|} \quad \textit{bzw.} \quad \langle\xi\rangle^s \le 2^{|s|}\langle\xi-\eta\rangle^s\langle\eta\rangle^{|s|} \qquad \forall\,\xi,\eta\in\mathbb{R}^n.$$

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

Beweis. Zunächst gilt

$$\langle y\rangle \le (1+|y|) \le \sqrt{2}\langle y\rangle \qquad \forall\, y\in\mathbb{R}^n.$$ [12]

Sei nun $s\ge 0$. Dann

$$1+|\xi+\eta| \le 1+|\xi|+|\eta| \le (1+|\xi|)(1+|\eta|) \implies \langle \xi+\eta\rangle^s \le (1+|\xi|)^s(1+|\eta|)^s \le 2^s\langle\xi\rangle^s\langle\eta\rangle^s.$$

Für $s\le 0$ gilt analog

$$\langle\xi\rangle^{-s} \le 2^{-s}\langle\xi+\eta\rangle^{-s}\langle-\eta\rangle^{-s} \iff \langle\xi+\eta\rangle^s \le 2^{-s}\langle\xi\rangle^s\langle\eta\rangle^{-s}. \qquad \square$$

3.9 Satz (Fubini). *Es sei $a=a(y,y',\eta,\eta')\in A^{m,\tau}(\mathbb{R}^{n+k})$. Dann ist*

$$b(y,\eta) = \mathrm{Os}-\iint e^{-iy'\eta'}a(y,y',\eta,\eta')\,dy'd\eta' \;\in\; A^{m,\tau}(\mathbb{R}^n)$$

und

$$\partial_\eta^\alpha\partial_y^\beta b(y,\eta) = \mathrm{Os}-\iint e^{-iy'\eta'}\partial_\eta^\alpha\partial_y^\beta a(y,y',\eta,\eta')\,dy'd\eta'.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Os}-\iint & e^{-i(y,y')(\eta,\eta')}a(y,y',\eta,\eta')\,d(y,y')d(\eta,\eta')\\ &= \mathrm{Os}-\iint e^{-iy\eta}\Big(\mathrm{Os}-\iint e^{-iy'\eta'}a(y,y',\eta,\eta')dy'd\eta'\Big)\,dyd\eta.\end{aligned}$$

Beweis. OBdA $\tau,m\ge 0$. Wegen der Ungleichung von Peetre ist

$$\langle (y,y')\rangle^\tau\langle(\eta,\eta')\rangle^m \le 2^{m+\tau}\langle y\rangle^\tau\langle y'\rangle^\tau\langle\eta\rangle^m\langle\eta'\rangle^m.$$ [13]

Daher ist $\partial_\eta^\alpha\partial_y^\beta a(y,\cdot,\eta,\cdot)\in A^{m,\tau}(\mathbb{R}^k)$ mit

$$\|\partial_\eta^\alpha\partial_y^\beta a(y,\cdot,\eta,\cdot)\|_k^{m,\tau} \le C_{k,m}\|a\|_{k+|\alpha|+|\beta|}^{m,\tau}\langle y\rangle^\tau\langle\eta\rangle^m$$

für alle $k\in\mathbb{N}_0$. Aus Korollar 3.5 (und (3.3)) folgt

$$\big|\mathrm{Os}[\partial_\eta^\alpha\partial_y^\beta a(y,\cdot,\eta,\cdot)]\big| \le C\|a\|_{2(l+l')+|\alpha|+|\beta|}^{m,\tau}\langle y\rangle^\tau\langle\eta\rangle^m,$$

wobei $2l>n+k+m$ und $2l'>n+k+\tau$. Wegen der zweiten Darstellung des Oszillator-Integrals in Satz 3.4 und des Satzes von Lebesgue über Differenzierbarkeit von Parameterintegralen gilt

$$\mathrm{Os}[\partial_\eta^\alpha\partial_y^\beta a(y,\cdot,\eta,\cdot)] = \partial_\eta^\alpha\partial_y^\beta\,\mathrm{Os}[a(y,\cdot,\eta,\cdot)]$$

[12] Sieht man leicht durch Quadrieren.
[13] Schreibe $(y,y')=(y,0)+(0,y')$.

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

und damit $b \in A^{m,\tau}(\mathbb{R}^n)$. Weiterhin folgt, dass

$$\begin{aligned}
\mathrm{Os}-\iint e^{-iy\eta} b(y,\eta)\,dyd\eta
&\overset{3.4}{=} \int e^{-i(y,y')(\eta,\eta')}(\langle y\rangle\langle y'\rangle)^{-2l'}((1-\Delta_\eta)(1-\Delta_{\eta'}))^{l'} \\
&\qquad \big[(\langle \eta\rangle\langle \eta'\rangle)^{-2l}((1-\Delta_y)(1-\Delta_{y'}))^{l} a(y,y',\eta,\eta')\big]\frac{d(y,y',\eta,\eta')}{(2\pi)^{n+k}} \\
&= \mathrm{Os}-\iint e^{-i(y,y')(\eta,\eta')}(\langle \eta\rangle\langle \eta'\rangle)^{-2l}((1-\Delta_y)(1-\Delta_{y'}))^{l} a(y,y',\eta,\eta')\,d(y,y')d(\eta,\eta') \\
&= \mathrm{Os}-\iint e^{-i(y,y')(\eta,\eta')} a(y,y',\eta,\eta')\,d(y,y')d(\eta,\eta'),
\end{aligned}$$

wobei die letzten beiden Gleichungen wegen Lemma 3.6.a) gelten. □

3.10 Satz. *Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$. Dann definiert*

$$[Pu](x) := \mathrm{Os}-\iint e^{-iy\eta} p(x,\eta)u(x+y)\,dyd\eta, \qquad u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n),$$

eine stetige Abbildung $P : C_b^\infty(\mathbb{R}^n) \to C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$Pu = \mathrm{op}(p)u \qquad \forall\, u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Schreibe daher wieder $\mathrm{op}(p) := P$.

Beweis. Für festes x und $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist

$$a(y,\eta) := p(x,\eta)u(x+y) \in A^{\mu,0}(\mathbb{R}^n).$$

Also ist P wohldefiniert. Die Abbildungseigenschaft folgt dann mit der Darstellung aus Satz 3.4 ähnlich wie in Satz 2.10. Für $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\begin{aligned}
[\mathrm{op}(p)u](x) &= \int \Big(\int e^{i(x-y)\eta} p(x,\eta)u(y)\,dy\Big)d\eta = \int \Big(\underbrace{\int e^{-iy\eta} p(x,\eta)u(x+y)\,dy}_{\in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n_\eta)}\Big)d\eta \\
&\overset{3.7.c)}{=} \mathrm{Os}[p(x,\eta)u(x+y)]
\end{aligned}$$

□

3.11 Folgerung. *Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$p(x,\xi) = e^{-ix\xi}[\mathrm{op}(p)e^{i\xi\cdot}](x) \qquad \forall\, x,\xi \in \mathbb{R}^n.$$

Insbesondere hat jeder ψdo ein eindeutig bestimmtes Linkssymbol.

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

Beweis. Es ist $e^{i\xi\cdot} \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wegen Satz 3.10 gilt also

$$\begin{aligned}
e^{-ix\xi}[\mathrm{op}(p)e^{i\xi\cdot}](x) &= \mathrm{Os}-\iint e^{-iy\eta}e^{iy\xi}p(x,\eta)\,dyd\eta \\
&\overset{3.6.b)}{=} \mathrm{Os}-\iint e^{-iy\eta}p(x,\xi+\eta)\,dyd\eta \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\Big(\int e^{-iy\eta}\chi(\varepsilon y)\,dy\Big)\chi(\varepsilon\eta)p(x,\xi+\eta)\,d\eta \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int \varepsilon^{-n}\widehat{\chi}(\eta/\varepsilon)\chi(\varepsilon\eta)p(x,\xi+\eta)\,d\eta \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int \widehat{\chi}(\eta)\chi(\varepsilon^2\eta)p(x,\xi+\varepsilon\eta)\,d\eta \\
&= p(x,\xi)\int\widehat{\chi}(\eta)\,d\eta = p(x,\xi)\chi(0) = p(x,\xi),
\end{aligned}$$

wobei $\chi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi(0) = 1$. □

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

4. Doppelsymbole, Algebraeigenschaft und Elliptizität

4.1 Worum geht's? Die Theorie der Oszillatorintegrale erlaubt es, die formale Rechnung zur Komposition zweier Pseudodifferentialoperatoren zu gerechtfertigen. Damit kann einer der Hauptsätze dieser Vorlesung bewiesen werden: Die Komposition zweier Pseudodifferentialoperatoren ist wieder ein Pseudodifferentialoperator, und man kennt das Symbol in Form einer asymptotischen Entwicklung. Als Anwendung kann die Parametrix für elliptische Operatoren bestimmt werden.

4.2 Bemerkung. Nach Satz 3.10 ist

$$\operatorname{op}(p)u(x) = \operatorname{Os} - \iint e^{-iy\eta} p(x,\eta) u(x+y)\, dy d\eta.$$

Eingesetzt erhalten wir für die Komposition:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{op}(p_1) \circ \operatorname{op}(p_2) u(x) \\
&= \operatorname{Os} - \iint e^{-ix'\xi} p_1(x,\xi)(\operatorname{op}(p_2)u)(x+x')\, dx' d\xi \\
&= \operatorname{Os} - \iint e^{-ix'\xi} p_1(x,\xi) \Big[\operatorname{Os} - \iint e^{-ix''\xi'} p_2(x+x',\xi') u(x+x'+x'')\, dx'' d\xi' \Big] dx' d\xi \\
&= \operatorname{Os} - \iint \iint e^{-ix'\xi - ix''\xi'} p_1(x,\xi) p_2(x+x',\xi') u(x+x'+x'')\, dx'' d\xi' dx' d\xi \\
&= \operatorname{Os} - \iint \iint e^{-iy\xi' - ix'\eta} p_1(x,\xi'+\eta) p_2(x+x',\xi') u(x+x',\xi') u(x+y)\, dx' d\xi' dy d\eta \\
&= \operatorname{Os} - \iint e^{-iy\xi'} \Big[\operatorname{Os} - \iint e^{-ix'\eta} p_1(x,\xi'+\eta) p_2(x+x',\xi')\, dx' d\eta \Big] u(x+y)\, dy d\xi' \\
&= \operatorname{Os} - \iint e^{-iy\xi'} (p_1 \# p_2)(x,\xi') u(x+y)\, dy d\xi' \\
&= \operatorname{op}(p_1 \# p_2)(u)(x)
\end{aligned}$$

mit

$$(p_1 \# p_2)(x,\xi) := \operatorname{Os} - \iint e^{-ix'\xi'} p_1(x,\xi+\xi') p_2(x+x',\xi)\, dx' d\xi'.$$

4.3 Definition. *Es seien $\mu, \mu' \in \mathbb{R}$. Dann bezeichnet $S^{\mu,\mu'}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ den Raum aller glatten Funktionen $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mit*

$$\|p\|_k^{\mu,\mu'} := \sup_{\substack{x,x',\xi,\xi' \in \mathbb{R}^n, \\ |\alpha|+|\alpha'|+|\beta|+|\beta'| \le k}} \left| \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \partial_{\xi'}^{\alpha'} \partial_{x'}^{\beta'} p(x,\xi,x',\xi') \right| < \infty$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dies ist ein Frèchetraum mit vorigen (Halb-)normen. Die Elemente nennen wir Doppelsymbole.

4.4 Satz. *Es sei $p \in S^{\mu,\mu'}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Dann definiert*

$$Pu(x) := \mathrm{Os} - \iint e^{-i(y,y')(\eta,\eta')} p(x,\eta,x+y,\eta')u(x+y+y')\,d(y,y')d(\eta,\eta')$$

einen stetigen Operatoren $P : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ bzw. $P : C_b^\infty(\mathbb{R}^n) \to C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wir schreiben wieder

$$P = \mathrm{op}(p) = p(x, D_x, x', D_{x'}).$$

Es gilt

$$Pu(x) = \int e^{ix'\xi}\Big(\int e^{-ix\xi}\Big(\int e^{ix'\xi'}\Big(\int e^{-ix''\xi'} p(x,\xi,x',\xi')u(x'')\,dx''\Big)d\xi'\Big)dx'\Big)d\xi.$$

Beweis. Für festes x ist

$$a(y,y',\eta,\eta') = p(x,\eta,x+y,\eta')u(x+y+y') \in A^{|\mu|+|\mu'|,0}(\mathbb{R}^{2n}).$$

Daher ist $Pu(x)$ wohldefiniert. Für die zweite Darstellung von $Pu(x)$ siehe Kumanogo, Lemma 2.3 in Chapter 2. Die Abbildungseigenschaft von P folgt aus (4.2), siehe unten. □

4.5 Beispiel. Es seien $a_j(x) \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $p_j(\xi) \in S^{\mu_j}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$p(x,\xi,x',\xi') = a_1(x)p_1(\xi)a_s(x')p_2(\xi') \;\in\; S^{\mu_1,\mu_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

und

$$\mathrm{op}(p) = M_{a_1} \circ p_1(D) \circ M_{a_2} \circ p_2(D),$$

wobei M_{a_j} den Operator der Multiplikation mit a_j bezeichnet.

4.6 Beispiel. Es seien $p_j \in S^{\mu_j}(\mathbb{R}^n)$ $(j = 0,1)$ zwei Linkssymbole. Dann ist

$$p(x,\xi,x',\xi') := p_1(x,\xi)p_2(x',\xi') \in S^{\mu_1,\mu_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n).$$

Nach Bemerkung 4.2 ist die formale Rechnung aus Bemerkung (3.2) korrekt ist, wenn man Oszillator-Integrale verwendet, d.h.

$$p(x,D_x,x',D_{x'})u = \big(p_1(x,D) \circ p_2(x,D)\big)u, \qquad u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

4.7 Satz. *Für $p \in S^{\mu,\mu'}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ setze*

$$p_L(x,\xi) = \mathrm{Os} - \iint e^{-iy\eta} p(x,\xi+\eta,x+y,\xi)\,dyd\eta.$$

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

Dann ist

$$p \mapsto p_L : S^{\mu,\mu'}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow S^{\mu+\mu'}(\mathbb{R}^n) \tag{4.1}$$

eine stetige Abbildung und

$$p_L(x, D) = p(x, D_x, x', D_{x'}). \tag{4.2}$$

Weiterhin gilt die asymptotische Entwicklung

$$p_L(x,\xi) \sim \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_{x'}^\alpha p(x,\xi,x',\xi')\Big|_{x'=x,\xi'=\xi}. \tag{4.3}$$

Beweis. Zunächst ist wegen der Peetreschen Ungleichung und der Kettenregel

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \partial_\eta^{\alpha'} \partial_{x'}^{\beta'} p(x,\xi+\eta,x+y,\xi)\right| \leq C \|p\|^{\mu,\mu'}_{|\alpha|+|\beta|+|\alpha'|+|\beta'|} \langle\eta\rangle^{|\mu|+|\alpha|} \langle\xi\rangle^{\mu+\mu'-|\alpha|} \tag{4.4}$$

mit $C = C(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\mu')$. Aus Satz 3.9 folgt,[14] dass $p_L \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ mit

$$\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p_L(x,\xi) = \mathrm{Os}_{y,\eta}\left[\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x,\xi+\eta,x+y,\xi)\right].$$

Aus der Stetigkeit von $\mathrm{Os}[\cdot]$, vgl. Folgerung 3.5, und (4.4) folgt (4.1).

Per Taylor-Entwicklung gilt

$$\begin{aligned} p(x,\xi+\eta,x+y,\xi) = &\sum_{|\alpha|<N} \frac{\eta^\alpha}{\alpha!} p_\alpha(x,\xi,x+y,\xi) + \\ &+ N \sum_{|\alpha|=N} \frac{\eta^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-\theta)^{N-1} p_\alpha(x,\xi+\theta\eta,x+y,\xi)\,d\theta, \end{aligned}$$

wobei $p_\alpha(x,\xi,y,\eta) = \partial_\xi^\alpha p(x,\xi,y,\eta)$. Wegen Lemma 3.6.a) ist also

$$\begin{aligned} p_L(x,\xi) = &\sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!} \mathrm{Os}_{y,\eta}[(D_{x'}^\alpha p_\alpha)(x,\xi,x+y,\xi)] + \\ &+ N \sum_{|\alpha|=N} \frac{1}{\alpha!} \int_0^1 \underbrace{\mathrm{Os}_{y,\eta}\left[(D_{x'}^\alpha p_\alpha)(x,\xi+\theta\eta,x+y,\xi)\right]}_{=:r_{\alpha,\theta}(x,\xi)}\,d\theta. \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.6.c) gilt

$$\mathrm{Os}_{y,\eta}[(D_{x'}^\alpha p_\alpha)(x,\xi,x+y,\xi)] = (D_{x'}^\alpha p_\alpha)(x,\xi,x,\xi).$$

Gleichmäßige Abschätzungen in $0 \leq \theta \leq 1$ wie oben in (4.4) zeigen, dass $\{r_{\alpha,\theta} \mid 0 \leq \theta \leq 1\}$ eine beschränkte Menge in $S^{\mu+\mu'-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ ist. Das zeigt (4.3).

[14] als Analogon zu den klassischen über Differenzierbarkeit von Parameter-Integralen

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

Sein nun $\chi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi(0) = 1$. Dann ist

$$p_{L,\varepsilon}(x,\xi) := \chi(\varepsilon\xi) \iint e^{-iy\eta}\chi(\varepsilon y)\chi(\varepsilon\eta)p(x,\xi+\eta,x+y,\xi)\,dyd\eta \xrightarrow{\varepsilon\to 0} p_L(x,\xi)$$

und, gleichmäßig in $0 < \varepsilon \leq 1$,

$$|p_{L,\varepsilon}(x,\xi)| \leq C\langle\xi\rangle^{|\mu|+\mu'} \qquad \forall\, x,\xi \in \mathbb{R}^n.$$

Wegen dominierter Konvergenz ist also für beliebiges $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}[p_L(x,D)u](x) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \iint e^{ix\xi'} p_{L,\varepsilon}(x,\xi')\widehat{u}(\xi')\,d\xi' \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int e^{ix\xi}\Big(\int e^{-ix'\xi}\Big(\int e^{ix'\xi'} p_\varepsilon(x,\xi,x',\xi')\widehat{u}(\xi')\,d\xi'\Big)dx'\Big)d\xi\end{aligned}$$

mit

$$p_\varepsilon(x,\xi,x',\xi') = \chi(\varepsilon(\xi-\xi'))\chi(\varepsilon(x-x'))\chi(\varepsilon\xi')p(x,\xi,x',\xi').$$

Drei mal dominierte Konvergenz zeigt, dass man $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}$ ganz nach Innen ziehen kann. (4.2) folgt dann aus Satz 4.4. □

4.8 Satz. *Für $p_j \in S^{\mu_j}(\mathbb{R}^n)$ setze*

$$(p_1\#p_2)(x,\xi) = \mathrm{Os}-\iint e^{-iy\eta}p_1(x,\xi+\eta)p_2(x+y,\xi)\,dyd\eta.$$[15]

Dann ist

$$(p_1,p_2) \mapsto p_1\#p_2 : S^{\mu_1}(\mathbb{R}^n)\times S^{\mu_2}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S^{\mu_1+\mu_2}(\mathbb{R}^n) \tag{4.5}$$

bilinear und stetig und

$$\mathrm{op}(p_1)\mathrm{op}(p_2) = \mathrm{op}(p_1\#p_2).$$

Es gilt die asymptotische Entwicklung

$$p_1\#p_2 \sim \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!}(\partial_\xi^\alpha p_1)(D_x^\alpha p_2). \tag{4.6}$$

Beweis. Folgt sofort aus Beispiel 4.6 und Satz 4.7. □

4.9 Folgerung. *a) Sind $p_j \in S^{\mu_j}(\mathbb{R}^n)$, so gilt*

$$p_1\#p_2 - p_1p_2 \in S^{\mu_1+\mu_2-1}(\mathbb{R}^n).$$

[15] $p_1\#p_2$ heißt das Leibniz-Produkt von p_1 mit p_2.

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

b) *Ist* $[A, B] = AB - BA$ *der Kommutator von* A *und* B*, so gilt*

$$[\mathrm{op}(p_1), \mathrm{op}(p_2)] \in S^{\mu_1+\mu_2-1}(\mathbb{R}^n).$$

c) *Seien* $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ *und* $\varphi, \psi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ *mit* $\varphi\psi = 0$*. Dann ist*

$$\varphi \circ \mathrm{op}(p) \circ \psi \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n).$$

4.10 Definition. *Das Symbol* $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ *bzw. der Operator* $\mathrm{op}(p)$ *heißen* *elliptisch, falls es* $C, R \geq 0$ *gibt derart, dass* $p(x,\xi) \neq 0$ *für alle* $|\xi| \geq R$ *und*

$$\left|\frac{1}{p(x,\xi)}\right| \leq C\langle\xi\rangle^{-\mu} \qquad \forall\, x \quad \forall\, |\xi| \geq R. \tag{4.7}$$

4.11 Beispiel. a) Δ ist elliptisch der Ordnung 2, da $\Delta = \mathrm{op}(p)$ mit $p(\xi) = -|\xi|^2$.

b) Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ elliptisch und $p' \in S^{\mu'}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mu' < \mu$. Dann ist $p + p'$ elliptisch der Ordnung μ: Für $|\xi|$ hinreichend groß ist

$$p + p' = p(1 + p'/p) \quad \text{und} \quad |p'(x,\xi)/p(x,\xi)| \leq 1/2.$$

4.12 Satz. *Es sei* $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$*. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) p *ist elliptisch.*

b) *Es gibt ein* $q_L \in S^{-\mu}(\mathbb{R}^n)$ *mit* $1 - q_L \# p \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$*.*

c) *Es gibt ein* $q_R \in S^{-\mu}(\mathbb{R}^n)$ *mit* $1 - p \# q_R \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$*.*

q_L *heißt eine Linksparametrix,* q_R *eine Rechtsparametrix.*

Beweis. b) $\Rightarrow$ a): Sei $r := 1 - q_L\#p \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$. Nach Folgerung 4.9.a) gibt es dann ein $s \in S^{-1}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$1 - r = q_L\#p = q_L p + s \quad \Longrightarrow \quad q_L p = 1 - (r + s).$$

Da $t := r + s \in S^{-1}(\mathbb{R}^n)$ gibt es ein $R \geq 0$ mit

$$|t(x,\xi)| \leq \frac{1}{2} \qquad \forall\, x \quad \forall\, |\xi| \geq R.$$

Für $|\xi| \geq R$ gilt also

$$\frac{1}{p(x,\xi)} = \frac{1}{1 - t(x,\xi)} q_L(x,\xi).$$

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

Offenbar gilt dann (4.7).

a) $\Rightarrow$ b): Wähle eine Ausscheidefunktion χ mit $\chi(\xi) = 0$, falls $|\xi| \le R$. Setze dann

$$q(x,\xi) := \chi(\xi)\,\frac{1}{p(x,\xi)} \qquad \forall\, x,\xi \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt

$$\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta q(x,\xi) \equiv \chi(\xi) \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \frac{1}{p(x,\xi)} \quad \mathrm{mod}\ S^{-\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Per Induktion

$$\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{|\alpha|+|\beta|} \sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_k=\alpha \\ \beta_1+\ldots+\beta_k=\beta}} C_{\alpha_1,\ldots,\beta_k} (\partial_\xi^{\alpha_1}\partial_x^{\beta_1} p) \cdots (\partial_\xi^{\alpha_k}\partial_x^{\beta_k} p) \Big(\frac{1}{p}\Big)^{1+k}.$$

Es folgt, dass $q \in S^{-\mu}(\mathbb{R}^n)$. Nach Folgerung 4.9.a) gibt es ein $\widetilde{r} \in S^{-1}$ mit

$$q\#p = qp + \widetilde{r} = \chi + \widetilde{r} = 1 - \big(\underbrace{(1-\chi) - \widetilde{r}}_{=:r \in S^{-1}(\mathbb{R}^n)}\big).$$

Nach Satz 4.8 und Satz 2.12 gibt es ein $\widetilde{q} \in S^0(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\widetilde{q} \sim \sum_{j=0}^{\infty} r^{\#j}, \qquad r^{\#j} = r \underbrace{\# \ldots \#}_{j\text{-mal}} r.$$

Setze dann $q_L := \widetilde{q}\#q$. Dann gilt

$$q_L\#p = \widetilde{q}\#(1-r) \equiv \sum_{j=0}^{N-1} r^{\#j}\#(1-r) = 1 - r^{\#N} \equiv 1 \quad \mathrm{mod}\ S^{-N}(\mathbb{R}^n).$$

Da man $N \in \mathbb{N}$ beliebig wählen kann, gilt $q_L\#p - 1 \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$.

a) $\Leftrightarrow$ c): Analog. □

4.13 Folgerung. *Ist $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ elliptisch, so ist jede Linksparametrix auch eine Rechtsparametrix und umgekehrt. Wir sprechen daher nur von einer Parametrix.*

Beweis. Seien q_L und q_R die Links- bzw. Rechtsparametrix. Dann, modulo $S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$,

$$q_L = q_L\#1 \equiv q_L\#(p\#q_R) = (q_L\#p)\#q_R \equiv 1\#q_R = q_R.$$

Also folgt $p\#q_L \equiv p\#q_R \equiv 1$, sowie $q_R\#p \equiv q_L\#p \equiv 1$. □

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

4.14 Satz. *Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es genau ein Symbol $p^t \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ bzw. $p^* \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ mit*

$$\langle \mathrm{op}(p)u, v\rangle = \langle u, \mathrm{op}(p^t)v\rangle \quad \textit{bzw.} \quad (\mathrm{op}(p)u, v)_{L_2(\mathbb{R}^n)} = (u, \mathrm{op}(p^*)v)_{L_2(\mathbb{R}^n)}$$ [16]

für alle $u, v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Es ist

$$p^t(x,\xi) \sim \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}(\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha p)(x,-\xi), \qquad p^*(x,\xi) \sim \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \overline{p(x,\xi)}.$$

$\mathrm{op}(p^t)$ bzw. $\mathrm{op}(p^*)$ heißen der transponierte bzw. formal adjungierte Operator von $\mathrm{op}(p)$.

Beweis. Sei $\chi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi(0) = 1$ und $\chi(-\xi) = \chi(\xi)$. Da $\chi(\varepsilon\xi)p(x,\xi) \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ gleichmäßig in $0 < \varepsilon \le 1$ gilt

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{op}(p)u, v\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int \Big(\iint e^{i(x-y)\xi}\chi(\varepsilon\xi)p(x,\xi)u(y)\,dyd\xi\Big)v(x)\,dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int \Big(\iint e^{i(y-x')\xi}\chi(\varepsilon\xi)\widetilde{p}(x',\xi)v(x')\,dx'd\xi\Big)u(y)\,dy = \langle u, \mathrm{op}(\widetilde{p})v\rangle\end{aligned}$$

mit dem (von x, ξ' unabhängigen) Doppelsymbol $\widetilde{p}(x',\xi) = p(x',-\xi)$ (siehe nachfolgende Bemerkung). Nach Satz 4.7 gilt dann die Behauptung mit

$$p^t(x,\xi) = \mathrm{Os} - \iint e^{-iy\eta}\widetilde{p}(x+y,\xi+\eta)\,dyd\eta.$$

Die asymptotische Entwicklung ist gerade (4.3). Der formal adjungierte Operator geht analog. □

4.15 Bemerkung. Im vorigen Beweis wurde folgende Eigenschaft von Doppelsymbolen verwendet: Sei das Doppelsymbol $p(x,\xi,x',\xi')$ unabhängig von x und von ξ', d.h. $p = p(x',\xi)$. Dann gilt

$$\big[p(x,D_x,x',D_{x'})u\big](x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint e^{i(x-x')\xi}\chi(\varepsilon\xi)p(x',\xi)u(x')dx'd\xi.$$

Der Beweis wird dem Leser als Übung überlassen.

4.16 Korollar. *Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$. Für $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ definiert*

$$\langle \mathrm{op}(p)T, \varphi\rangle := \langle T, \mathrm{op}(p^t)\varphi\rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

eine Distribution $\mathrm{op}(p)T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. In diesem Sinne ist

$$\mathrm{op}(p) : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Die Einschränkung auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ bzw. $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ stimmen mit den Abbildungen aus Definition 2.8 bzw. Definition 3.10 überein.

[16]Dabei: $\langle f, g\rangle = \int f(x)g(x)\,dx$

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

5. Stetigkeit in Sobolevräumen

5.1 Worum geht's? Bisher wurden Pseudodifferentialoperatoren in den typischen lokalkonvexen Funktionenräumen wie $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ oder $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ betrachtet. In vielen Anwendungen ist man eher an Hilbertraum- oder Banachraumtheorie interessiert. Daher stellt sich die Frage, ob Pseudodifferentialoperatoren stetige Abbildungen in entsprechenden Sobolevräumen induzieren. Während der Beweis der Stetigkeit für L_2-Sobolevräume relativ leicht beweisbar ist, ist die analoge Aussage für L_p-Sobolevräume wesentlich schwerer. Eine einfache aber wichtige Folgerung ist der Satz über elliptische Regularität.

5.2 Definition und Satz (L_2-Sobolevräume)**.** *Es sei $s \in \mathbb{R}$ und*

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \Big\{ u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \widehat{u} \text{ ist regulär und } \|u\|_s := \Big(\int \langle\xi\rangle^{2s} |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \Big)^{1/2} < \infty \Big\}.$$

Dann ist $H^s(\mathbb{R}^n)$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$(u, v)_s = \int \langle\xi\rangle^{2s} \widehat{u}(\xi) \overline{\widehat{v}(\xi)} \, d\xi.$$

$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist eine dichte Teilmenge von $H^s(\mathbb{R}^n)$. Ist $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $s \in \mathbb{N}_0$ so gilt:

$$u \in H^s(\mathbb{R}^n) \iff \partial^\alpha u \in L_2(\mathbb{R}^n) \qquad \forall\, |\alpha| \le s. \tag{5.1}$$

Jedes Funktional $T \in (H^s(\mathbb{R}^n))'$ ist von der Form

$$u \mapsto (u, v)_{L_2(\mathbb{R}^n)}, \qquad v \in H^{-s}(\mathbb{R}^n).$$ [17]

Definieren wir

$$\Lambda^\mu := \langle D\rangle^\mu = \mathrm{op}(\langle\xi\rangle^\mu) : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n),$$

so gilt

$$\Lambda^0 = 1, \qquad \Lambda^\mu \circ \Lambda^{\mu'} = \Lambda^{\mu+\mu'}.$$

Insbesondere induziert Λ^μ Isomorphismen

$$\Lambda^\mu : H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s-\mu}(\mathbb{R}^n) \qquad \forall\, s \in \mathbb{R}. \tag{5.2}$$

Man nennt Λ^μ eine <u>Ordnungs-Reduktion</u>.

[17] Kurz gesagt: $(H^s(\mathbb{R}^n))' = H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

Beweis. Zur Dichtheit: Die Abbildung $\Phi_s : u \mapsto \langle\cdot\rangle^s \widehat{u}$ ist ein isometrischer Isomorphismus $H^s(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ mit $\Phi_s^{-1}(v) = \mathscr{F}^{-1}(\langle\cdot\rangle^{-s} v)$. Jetzt verwende, dass $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L_2(\mathbb{R}^n)$ ist und dass $\Phi_s^{-1} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Für (5.1) zeige allgemeiner:

$$u \in H^s(\mathbb{R}^n) \iff u, D_1 u, \ldots, D_n u \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n).$$

Wegen $\langle\xi\rangle^2 = 1 + \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$ ist

$$|\langle\xi\rangle^{s+1}\widehat{u}(\xi)|^2 = |\langle\xi\rangle^s \widehat{u}(\xi)|^2 + \sum_{j=1}^n |\langle\xi\rangle^s \xi_j \widehat{u}(\xi)|^2 = |\langle\xi\rangle^s \widehat{u}(\xi)|^2 + \sum_{j=1}^n |\langle\xi\rangle^s \widehat{\partial_j u}(\xi)|^2.$$

Es folgt

$$\|u\|_{s+1}^2 = \|u\|_s^2 + \sum_{j=1}^n \|\partial_j u\|_s^2.$$

(5.2) folgt aus $\widehat{\Lambda^\mu u}(\xi) = \langle\xi\rangle^\mu \widehat{u}(\xi)$. □

5.3 Satz (Hauptsatz über die L_2-Stetigkeit von Pseudodifferentialoperatoren)**.** *Es sei $a \in C^{2n}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ mit*

$$\pi(a) := \sup_{\substack{x,\xi \in \mathbb{R}^n,\\ \alpha,\beta \le (1,\ldots,1)}} \left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)\right| < \infty,$$

sowie

$$[\mathrm{op}(a)u](x) := \int e^{ix\xi} a(x,\xi)\widehat{u}(\xi)\, d\xi, \qquad u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Dann gibt es ein $C \ge 0$, das nicht von a abhängt, mit

$$\|\mathrm{op}(a)u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le C\,\pi(a)\,\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\, u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Insbesondere induziert $\mathrm{op}(a)$ *einen stetigen Operatoren*

$$\mathrm{op}(a) : L_2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n).$$

Beweis. Wir verwenden folgende Notationen: Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ sei

$$(i+x)^\alpha = (i+x_1)^{\alpha_1} \cdots (i+x_n)^{\alpha_n}, \qquad (i+D)^\alpha = (i+D_1)^{\alpha_1} \cdots (i+D_n)^{\alpha_n}.$$

Dann ist

$$(i+D_x)^\alpha e^{ixy} = (i+y)^\alpha e^{ixy}.$$

Wir setzen $\delta = (1,\ldots,1)$ und im folgenden sind $u, v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

1. Schritt: $\operatorname{op}(a)u \in L_2(\mathbb{R}^n)$, da nach partieller Integration

$$\operatorname{op}(a)u(x) = \underbrace{(i+x)^{-\delta}}_{\in L_2(\mathbb{R}^n_x)} \underbrace{\int e^{ix\xi}(i - D_\xi)^\delta [a(x,\xi)\widehat{u}(\xi)]\, d\xi}_{\text{beschränkt}}.$$

Nach dem Satz von Riesz und wegen der Dichtheit von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ in $L_2(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\|\operatorname{op}(a)u\|_{L_2} = \sup_{0\neq v\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)} \frac{(\operatorname{op}(a)u, v)_{L_2}}{\|v\|_{L_2}}. \tag{5.3}$$

2. Schritt: Wir nehmen nun an, dass a kompakten Träger in $\mathbb{R}^{2n}$ hat. Dann

$$\begin{aligned}(\operatorname{op}(a)u, v)_{L_2} &= \iiint e^{i(x-y)\xi} a(x,\xi)u(y)\overline{v(x)}\, dyd\xi dx \\ &= \iiiint e^{i(x-y)\xi - ix\eta} a(x,\xi)u(y)\overline{\widehat{v}(\eta)}\, dyd\xi dxd\eta.\end{aligned}$$

Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}(\operatorname{op}(a)u, v)_{L_2} = \iiiint & e^{i(x-y)\xi - ix\eta}(i - D_x)^\delta \\ & \Big\{(i-D_\xi)^\delta a(x,\xi)\frac{u(y)}{(i+x-y)^\delta}\Big\}\frac{\overline{\widehat{v}(\eta)}}{(i+\xi-\eta)^\delta}\, dyd\xi dxd\eta.\end{aligned}$$

Aus

$$(i-D)^\delta(fg) = \sum_{\alpha\leq\delta}(-1)^{|\alpha|}\big((i-D)^{\delta-\alpha}f\big)D^\alpha g$$

folgt dann

$$\begin{aligned}(\operatorname{op}(a)u, v)_{L_2} &= \sum_{\alpha\leq\delta}\iiiint e^{i(x-y)\xi-ix\eta}(-1)^{|\alpha|}\Big\{D_x^\alpha(i-D_\xi)^\delta a(x,\xi)\Big\}\times \\ &\qquad \times\Big\{(i-D_x)^{\delta-\alpha}\frac{u(y)}{(i+x-y)^\delta}\Big\}\frac{\overline{\widehat{v}(\eta)}}{(i+\xi-\eta)^\delta}\, dyd\xi dxd\eta \\ &= \sum_{\alpha\leq\delta}\iint e^{ix\xi}\Big\{D_x^\alpha(i-D_\xi)^\delta a(x,\xi)\Big\}f_\alpha(x,\xi)g(x,\xi)\, dxd\xi,\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} g(x,\xi) &= g(x,\xi;v) = \int e^{-ix\eta}\frac{\overline{\widehat{v}(\eta)}}{(i+\xi-\eta)^\delta}\, d\eta \\ f_\alpha(x,\xi) &= f_\alpha(x,\xi;u) = (-1)^{|\alpha|}\int e^{-iy\xi}(i-D_x)^{\delta-\alpha}\frac{u(y)}{(i+x-y)^\delta}\, dy.\end{aligned}$$

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

Die Hölder-Ungleichung impliziert

$$\left|(\mathrm{op}(a)u,v)_{L_2}\right| \le C\,\pi(a)\sum_{\alpha\le\delta}\|f_\alpha\|_{L_2(\mathbb{R}^{2n})}\|g\|_{L_2(\mathbb{R}^{2n})}.$$

Wegen des Satzes von Plancherel ist

$$\|g(x,\xi)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n_x)} = (2\pi)^n\left\|\frac{\overline{\widehat{v}(\eta)}}{(i+\xi-\eta)^\delta}\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n_\eta)}$$

und

$$\begin{aligned}\|g\|^2_{L_2(\mathbb{R}^{2n})} &= \int \|g(x,\xi)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n_x)}\,d\xi = (2\pi)^n\iint\left|\frac{\widehat{v}(\eta)}{(i+\xi-\eta)^\delta}\right|^2 d\xi d\eta\\ &= (2\pi)^n\int\frac{1}{(i+\xi)^{2\delta}}\,d\xi\int|\widehat{v}(\eta)|^2\,d\eta = C\|v\|^2_{L_2}\end{aligned}$$

Analog hat man

$$\begin{aligned}\|f_\alpha\|^2_{L_2(\mathbb{R}^{2n})} &= \int\|f_\alpha(x,\xi)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n_\xi)}\,dx = (2\pi)^n\iint\left|(i-D_x)^{\delta-\alpha}\frac{u(y)}{(i+x-y)^\delta}\right|^2 dxdy\\ &= (2\pi)^n\int\left|(i-D_x)^{\delta-\alpha}\frac{1}{(i+x)^\delta}\right|^2 dx\int|u(y)|^2\,dy = C_\alpha\|u\|^2_{L_2}\end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\left|(\mathrm{op}(a)u,v)_{L_2}\right| \le C\,\pi(a)\,\|u\|_{L_2}\|v\|_{L_2}.$$

3. Schritt: Sei nun a allgemein. Wähle $\chi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ mit $\chi(0,0)=1$ und setze

$$a_\varepsilon(x,\xi)=\chi(\varepsilon x,\varepsilon\xi)a(x,\xi),\qquad 0<\varepsilon\le 1.$$

Dann gilt

$$\pi(a_\varepsilon)\le C_\chi\pi(a)\qquad\forall\,0<\varepsilon\le 1$$

und, nach Schritt 2,

$$(\mathrm{op}(a)u,v)_{L_2}\xleftarrow{\varepsilon\to 0}(\mathrm{op}(a_\varepsilon)u,v)_{L_2}\le C_\chi\,\pi(a)\,\|u\|_{L_2}\|v\|_{L_2}.$$

Für die Konvergenz setze $b_\varepsilon=a_\varepsilon-a$. Dann ist

$$[\mathrm{op}(b_\varepsilon]u)(x)=\int e^{ix\xi}b_\varepsilon(x,\xi)\widehat{u}(\xi)\,d\xi\xrightarrow{\varepsilon\to 0}0$$

wegen dominierter Konvergenz und $\mathrm{op}(b_\varepsilon)u$ ist beschränkt, gleichmäßig in ε. Wieder mit dominierter Konvergenz folgt

$$(\mathrm{op}(b_\varepsilon)u,v)_{L_2}=\int(B_\varepsilon u)(x)\overline{v(x)}\,dx\xrightarrow{\varepsilon\to 0}0.$$

Aus (5.3) folgt die Behauptung. □

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

5.4 Satz. *Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$. Dann ist*

$$\mathrm{op}(p) : H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s-\mu}(\mathbb{R}^n), \qquad s \in \mathbb{R},$$

stetig und ebenso

$$p \mapsto \mathrm{op}(p) : S^\mu(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{L}(H^s(\mathbb{R}^n), H^{s-\mu}(\mathbb{R}^n)), \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Nach Satz 5.3 gelten die Behauptungen für $\mu = s = 0$. Im allgemeinen setzen wir

$$a_p(x,\xi) = \langle\xi\rangle^{s-\mu}\#\big(p(x,\xi)\langle\xi\rangle^{-s}\big).$$

Dann ist

$$p \mapsto a_p : S^\mu(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S^0(\mathbb{R}^n)$$

stetig und

$$\mathrm{op}(p) = \Lambda^{\mu-s} \circ \mathrm{op}(a_p) \circ \Lambda^s.$$

Anders gesagt, das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} L_2(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathrm{op}(a_p)} & L_2(\mathbb{R}^n) \\ {\scriptstyle\Lambda^s}\Big\uparrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle\Lambda^{\mu-s}} \\ H^s(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathrm{op}(p)} & H^{s-\mu}(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

Da Ordnungsreduktionen stetig sind, folgt die Behauptung. □

5.5 Korollar (Elliptische Regularität)**.** *Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ elliptisch. Es sei $u \in \cup_{t\in\mathbb{R}} H^t(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung von $\mathrm{op}(p)u = f$ und $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $u \in H^{s+\mu}(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Sei $q \in S^{-\mu}(\mathbb{R}^n)$ eine Parametrix von p. Dann ist $r := q\#p - 1 \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\mathrm{op}(q)f = \mathrm{op}(q\#p)u = u - \mathrm{op}(r)u.$$

Nach Satz 5.4 sind $\mathrm{op}(q)f \in H^{s+\mu}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathrm{op}(r)u \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$. □

5.6 Korollar. *a) Ist $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ harmonisch,*[18] *so ist $u \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

b) Ist $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ elliptisch und $\mu > 0$. Ist $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ und $Pu = \lambda u$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$, so ist $u \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$.

[18] d.h. $\Delta u = 0$

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

5.7 Satz (A priori-Abschätzung). *Sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ elliptisch mit $\mu > 0$ und $s \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ die a priori-Abschätzung*

$$C_s \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \le \|\mathrm{op}(p)u\|_{H^{s-\mu}(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^n)} \le C_s' \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Dabei hängen die Konstanten C_s und C_s' von p und s, aber nicht von u ab.

Beweis. Sei q eine Parametrix von p und $r := q\#p - 1 \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$. Dann folgt

$$\|u\|_{H^s} \le \|\mathrm{op}(q)\mathrm{op}(p)u\|_{H^s} + \|\mathrm{op}(r)u\|_{H^s} \le C_1\big(\|\mathrm{op}(p)u\|_{H^{s-\mu}} + \|u\|_{H^{s-1}}\big) \le C_2\|u\|_{H^s}.$$

□

5.8 Bemerkung. Wie man im Beweis sieht, kann in obiger a priori-Abschätzung $\|u\|_{H^{s-1}}$ durch $\|u\|_{H^{s-k}}$ für jedes $k \ge 0$ ersetzt werden, insbesondere durch $\|u\|_{H^{s-\mu}}$. Fasst man somit $A := \mathrm{op}(p)$ als unbeschränkten Operator in $H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$ mit Definitionsbereich $D(A) = H^\mu(\mathbb{R}^n)$, so besagt obiger Satz, dass die Graphennorm

$$\|u\|_A := \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

äquivalent zur Norm $\|u\|_{H^\mu(\mathbb{R}^n)}$ ist.

Wie bereits erwähnt, ist die L_p-Stetigkeit von Pseudodifferentialoperatoren wesentlich schwerer zu beweisen. Es gilt folgender Satz, der hier nicht bewiesen wird.

5.9 Satz (L_p-Stetigkeit von Pseudodifferentialoperatoren). *Sei $p \in S^0(\mathbb{R}^n)$. Dann induziert p einen stetigen linearen Operator*

$$\mathrm{op}(p)\colon L_p(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n).$$

Die Abbildung $S^0(\mathbb{R}^n) \to L(L_p(\mathbb{R}^n))$, $p \mapsto \mathrm{op}(p)$, ist stetig.

5.10 Korollar. *Sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ mit $\mu \in \mathbb{R}$, und sei $1 < p < \infty$. Dann induziert p einen stetigen Operator auf den Bessel-Potentialräumen*

$$\mathrm{op}(p)\colon H_p^s(\mathbb{R}^n) \to H_p^{s-\mu}(\mathbb{R}^n)$$

für alle $s \in \mathbb{R}$.

Dabei sind die Bessel-Potentialräume $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ definiert als die Menge aller temperierten Distributionen u, für welche

$$\|u\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} := \big\|\mathscr{F}^{-1}\langle\xi\rangle^s u\big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

endlich ist.

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

Beweis. Der Beweis folgt über Ordnungsreduktion genauso wie der Beweis von Satz 5.4, wobei die entsprechende Stetigkeit von Λ^s jetzt direkt aus der Definition der Norm der Bessel-Potentialräume folgt. $\square$

5.11 Bemerkung. Das letzte Korollar besagt im Falle $\mu \in \mathbb{Z}$ insbesondere die Stetigkeit in den Sobolevräumen $W_p^s(\mathbb{R}^n) \to W_p^{s-\mu}(\mathbb{R}^n)$ für ganzzahliges s, da diese mit den Bessel-Potentialräumen übereinstimmen, wie man unter Verwendung des Satzes von Michlin sieht. Durch reelle Interpolation erhält man die Stetigkeit in den Besovräumen $B_{pq}^s(\mathbb{R}^n) \to B_{pq}^{s-\mu}(\mathbb{R}^n)$.

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

6. Pseudodifferentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten

6.1 Worum geht's? Pseudodifferentialoperatoren treten in Anwendungen häufig nicht im $\mathbb{R}^n$ auf, sondern in Gebieten oder auf Mannigfaltigkeiten (etwa im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie oder bei Randwertproblemen, wobei hier der Rand die Mannigfaltigkeit ist). Daher stellt sich die Frage, wie das Konzept der Pseudodifferentialoperatoren, welches ganz wesentlich im $\mathbb{R}^n$ definiert war, auf Mannigfaltigkeiten übertragen werden kann. Man beachte, dass die Fourier-Transformation nur im Ganzraum definiert ist, eine direkte Übertragung also nicht möglich ist.

a) Mannigfaltigkeiten: Eine schnelle Einführung

6.2 Definition (Mannigfaltigkeit). *a) Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Hausdorff-Raum M mit abzählbarer Basis der Topologie, welcher lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist, d.h. zu jedem Punkt $p \in M$ existiert eine offene Umgebung U von p und einen Homöomorphismus $\kappa\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$. In diesem Fall heißt (U, κ) eine Karte von M.*

b) Ein Atlas von M ist eine Menge von Karten $\{(U_j, \kappa_j) : j \in J\}$, für welche $\bigcup_{j\in J} U_j = M$ gilt. Ein Kartenwechsel ist die Abbildung $\kappa_j\kappa_k^{-1}\colon \kappa_k(U_j \cap U_k) \to \kappa_j(U_j \cap U_k)$.

c) Eine C^m-Mannigfaltigkeit mit $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ist eine Mannigfaltigkeit mit C^m-Struktur, d.h. mit Karten $\{(U_j, \kappa_j) : j \in J\}$, für welche gilt

(i) $\bigcup_{j\in J} U_j = M$,

(ii) *für $j, k \in J$ ist der Kartenwechsel $\kappa_j\kappa_k^{-1} \in C^m(\kappa_k(U_j \cap U_k); \mathbb{R}^n)$,*

(iii) *die Menge $\{(U_j, \kappa_j) : j \in J\}$ ist maximal bezüglich der Eigenschaften* (i) *und* (ii)*. Eine C^∞-Mannigfaltigkeit heißt auch glatte Mannigfaltigkeit.*

d) Eine Mannigfaltigkeit M heißt geschlossen, falls sie kompakt ist und keinen Rand besitzt.

6.3 Definition (C^∞-Funktionen auf Mannigfaltigkeiten). *a) Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit mit Atlas $\{(U_j, \kappa_j) : j \in J\}$. Eine Funktion $\varphi\colon M \to \mathbb{C}$ heißt C^∞-Funktion, falls $\varphi \circ \kappa_j^{-1} \in C^\infty(U_j)$ für alle $j \in J$ gilt. Man schreibt $\varphi \in C^\infty(M)$.*

b) Sei nun zusätzlich N eine weitere C^∞-Mannigfaltigkeit mit Atlas $\{(V_m, \pi_m) : m \in M\}$. Dann heißt eine Abbildung $F\colon M \to N$ glatt, falls für jedes $x \in M$, jedes U_j mit $x \in U_j$ und jedes V_m mit $F(x) \in V_m$ die Abbildung

$$\pi_m \circ F \circ \kappa_j^{-1}\colon F^{-1}(V_m) \cap U_j \to \mathbb{R}^n$$

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

unendlich oft differenzierbar ist. Man schreibt $F \in C^\infty(M,N)$.

6.4 Definition (Sobolevräume auf Mannigfaltigkeiten)**.** *Sei M eine geschlossene C^∞-Mannigfaltigkeit. Sei $M = \bigcup_{j=1}^N U_j$ eine Überdeckung von M mit zugehörigen Karten $\kappa_j \colon U_j \to \mathbb{R}^k$. Seien $\varphi_j \in C^\infty(M)$ mit $\operatorname{supp} \varphi_j \subset U_j$ und $\sum_{j=1}^N \varphi_j(x) = 1$ auf M.*

a) Für $s \in [0,\infty)$ und $1 < p < \infty$ definiert man den L^p-Sobolevraum $W_p^s(M)$ durch

$$W_p^s(M) := \big\{u \colon M \to \mathbb{C} \,|\, (u\cdot\varphi_j)\circ\kappa_j^{-1} \in W_p^s(\mathbb{R}^n) \quad (j=1,\dots,N)\big\}$$

mit Norm

$$\|u\|_{W_p^s(M)} := \Big(\sum_{j=1}^N \|(u\cdot\varphi_j)\circ\kappa_j^{-1}\|^p_{W_p^s(\mathbb{R}^n)}\Big)^{1/p}.$$

b) Für $s < 0$ definiert man $W_p^s(M)$ als den topologischen Dualraum von $W_q^{-s}(M)$ bezüglich der dualen Paarung $(u,v) \mapsto \langle u,v\rangle_{L^2(M)}$, wobei $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Im Falle $p=2$ schreibt man auch $H^s(M) := W_2^s(M)$ für $s \in \mathbb{R}$.

6.5 Bemerkung. Bei anderer Wahl von U_j und φ_j erhält man eine andere, aber äquivalente Norm.

6.6 Definition und Satz (Kotangentialraum)**.** *Seien M eine C^∞-Mannigfaltigkeit und $a \in M$.*

a) Falls für $f \in C^\infty(M)$ die Gleichheit $D(f\circ\kappa^{-1})(\kappa(a)) = 0$ für eine Karte κ gilt, so gilt dies für alle Karten. In diesem Fall sagt man, dass die Ableitung von f an der Stelle a verschwindet.

b) Die Menge Z_a aller Funktionen in $C^\infty(M)$, für welche die Ableitung an der Stelle a verschwindet, ist ein Untervektorraum von $C^\infty(M)$.

c) Der Kotangentialraum T_a^*M an der Stelle a ist definiert als $T_a^*M := C^\infty(M)/Z_a$. Die Ableitung einer Funktion $f \in C^\infty(M)$ an der Stelle a ist definiert als das Bild von f in diesem Quotientenraum und wird mit $(df)_a$ bezeichnet. Die Ableitung $(df)_a$ ist auch definiert, falls $f \in C^\infty(U)$ für eine Umgebung U von a.

Beweis. a) Sei $g := f\circ\kappa^{-1}$ und $h := f\circ\pi^{-1}$ für zwei Karten κ und π, welche an der Stelle a definiert sind. Dann gilt

$$g = f\circ\kappa^{-1} = f\circ\pi^{-1}\circ(\pi\circ\kappa^{-1}),$$

und somit $Dg(\kappa(a)) = Dh(\pi(a))(D\Phi)(\kappa(a))$ mit $\Phi := \pi\circ\kappa^{-1}$. Nach Definition einer differenzierbaren Struktur ist Φ und Φ^{-1} glatt, und damit ist $D\Phi(\kappa(a))$ invertierbar. Somit ist $Dg(\kappa(a)) = 0$ genau dann, wenn $Dh(\varphi(a)) = 0$.

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

b) Dass Z_a ein Untervektorraum ist, ist sofort klar, da die Ableitung in lokalen Koordinaten linear ist. $\square$

6.7 Lemma. *Sei M eine n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und $a \in M$.*

a) Der Kotangentialraum T_a^*M ist ein n-dimensionaler reeller Vektorraum.

b) Sei $\kappa = \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_n \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von M mit $a \in U$. Dann ist $\{(d\kappa_1)_a, \dots, (d\kappa_n)_a\}$ eine Basis von T_a^*M. Für $f \in C^\infty(M)$ ist

$$(df)_a = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ \kappa^{-1})}{\partial x_i}(\kappa(a)) \cdot (d\kappa_i)_a. \tag{6.1}$$

Beweis. In der Situation von Teil b) sei

$$g := f - \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ \kappa^{-1})}{\partial y_i}(\kappa(a)) \cdot \kappa_i.$$

Zu zeigen ist, dass die Ableitung von g an der Stelle a verschwindet. Nach Satz 6.6 ist diese Eigenschaft unabhängig von der gewählten Karte, wir dürfen also die Karte κ wählen. Es gilt

$$\begin{aligned}
&[D(g \circ \kappa^{-1})](\kappa(a)) \\
&\quad = D(f \circ \kappa^{-1})(\kappa(a)) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ \kappa^{-1})}{\partial x_i}(\kappa(a)) \cdot D(\kappa_i \circ \kappa^{-1})(\kappa(a)) \\
&\quad = D(f \circ \kappa^{-1})(\kappa(a)) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ \kappa^{-1})}{\partial x_i}(\kappa(a)) e_i^t \\
&\quad = \Big[D(f \circ \kappa^{-1}) - \Big(\frac{\partial(f \circ \kappa^{-1})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(f \circ \kappa^{-1})}{\partial x_n}\Big)\Big](\kappa(a)) \\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

Beachte hierbei, dass $\kappa_i \circ \kappa^{-1}(y) = y_i$ und damit $D(\kappa_i \circ \kappa^{-1})(y) = e_i^t$, wobei e_i den i-ten Einheitsvektor des $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Somit gilt $(dg)_a = 0$, was (6.1) zeigt. Insbesondere ist $\operatorname{span}\{(d\kappa_1)_a, \dots, (d\kappa_n)_a\} = Z_a$.

Falls andererseits $\sum_{i=1}^n \lambda_i (d\kappa_i)_a = 0$ gilt, so verschwindet die Ableitung von $\sum_{i=1}^n \lambda_i \kappa_i$ an der Stelle a. Unter den lokalen Koordinaten κ ist diese Ableitung aber gleich $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, wie die obige Rechnung zeigt. Damit folgt $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, d.h. $\{(d\kappa_1)_a, \dots, (d\kappa_n)_a\}$ ist linear unabhängig, und Z_a ist ein n-dimensionaler reeller Vektorraum. $\square$

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

6.8 Bemerkung. a) Statt von einer Karte κ spricht man meist von lokalen Koordinaten und schreibt x. Man unterscheidet dann häufig nicht mehr zwischen der Funktion $f \in C^\infty(M)$ und der Darstellung $f \circ \kappa^{-1}$ in lokalen Koordinaten. In diesem Sinn lässt sich die Gleichheit (6.1) etwas ungenau schreiben als

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i.$$

b) Wir betrachten hier im Hinblick auf spätere Anwendungen nur den Kotangentialraum T_a^*M. Der Tangentialraum T_aM kann nun definiert werden als Dualraum von T_a^*M; es gibt aber auch direkte Definitionen von T_aM, und dann kann der Kotangentialraum als Dualraum des Tangentialraums betrachtet werden.

6.9 Lemma (Koordinatenwechsel). *Sei M eine n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und $a \in M$. Seien weiter $\kappa\colon U \to \mathbb{R}^n$ und $\widetilde{\kappa}\colon \widetilde{U} \to \mathbb{R}^n$ zwei Karten von M mit $a \in U \cap \widetilde{U}$, und sei $\Phi := \kappa \circ \widetilde{\kappa}^{-1}\colon \widetilde{U} \to U$ der zugehörige Kartenwechsel (Koordinatenwechsel). Dann gilt in T_a^*M die Gleichheit*

$$\sum_{i=1}^n y_i (d\kappa_i)_a = \sum_{j=1}^n \widetilde{y}_j (d\widetilde{\kappa}_j)_a$$

mit

$$y = [(D\Phi)(\widetilde{\kappa}(a))]^{-t}\widetilde{y}.$$

Hierbei bezeichnet $(\cdot)^{-t}$ das Inverse der transponierten Matrix.

Beweis. Wir wenden Lemma 6.7 auf κ_i an und erhalten

$$(d\kappa_i)_a = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\kappa_i \circ \widetilde{\kappa}^{-1})}{\partial x_j}(\widetilde{\kappa}(a)) \cdot (d\widetilde{\kappa}_j)_a.$$

Eingesetzt erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_i (d\kappa_i)_a &= \sum_{i,j=1}^n y_i \frac{\partial(\kappa_i \circ \widetilde{\kappa}^{-1})}{\partial x_j}(\widetilde{\kappa}(a)) \cdot (d\widetilde{\kappa}_j)_a \\ &= \sum_{j=1}^n \widetilde{y}_j (d\widetilde{\kappa}_j)_a \end{aligned}$$

mit $\widetilde{y}^t = y^t (D\Phi)(\widetilde{\kappa}(a))$, was zu zeigen war. □

Das letzte Lemma zeigt uns, wie sich die Kotangentialräume bei einem Kartenwechsel verhalten. Dies ermöglicht es, den Kotangentialraum selbst mit der Struktur einer Mannigfaltigkeit zu versehen. Man erhält eine glatte $(2n)$-dimensionale Mannigfaltigkeit.

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

6.10 Definition und Satz (Kotangentialbündel). *a) Sei M eine glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann ist das Kotangentialbündel T^*M von M definiert durch $T^*M := \bigcup_{a\in M} T_a^*M$ (disjunkte Vereinigung), versehen mit folgenden Karten: Sei $\kappa\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von U. Definiere dazu*

$$\psi\colon U \times \mathbb{R}^n \to \bigcup_{a\in U} T_a^*M,\ (a,y) \mapsto \sum_{i=1}^n y_i (d\kappa_i)_a.$$

Dann ist ψ bijektiv, und

$$\Psi := (\varphi, \mathrm{id}) \circ \psi^{-1}\colon V := \bigcup_{a\in U} T_a^*M \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$$

ist eine Karte für T^*M. Damit wird T^*M zu einer glatten $(2n)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit, dem Kotangentialbündel über M.

b) Seien nun $\kappa\colon U \to \mathbb{R}^n$ und $\widetilde{\kappa}\colon \widetilde{U} \to \mathbb{R}^n$ zwei Karten von M mit $a \in U \cap \widetilde{U}$, und sei $\Phi := \widetilde{\kappa}^{-1} \circ \kappa$ der zugehörige Kartenwechsel. Dann ist für die entsprechenden Karten $\Psi, \widetilde{\Psi}$ von T^*M der Kartenwechsel gegeben durch

$$(\widetilde{\Psi}^{-1} \circ \Psi)(\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n, \widetilde{y}_1, \dots, \widetilde{y}_n) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$$

mit

$$x = \Phi(\widetilde{x}),\ y = [(D\Phi)(\widetilde{\kappa}(a))]^{-t}\widetilde{y}.$$

Beweis. Die Bijektivität von ψ ist klar nach Lemma 6.7 b). Man beachte, dass $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ offen ist. Die Formel für den Kartenwechsel ergibt sich direkt aus Lemma 6.9. Man beachte, dass Φ glatt ist und somit auch der Kartenwechsel in T^*M glatt ist, d.h. man erhält eine glatte $(2n)$-dimensionale Mannigfaltigkeit. $\square$

Das Kotangentialbündel und das analog definierte Tangentialbündel TM sind Beispiele von Vektorbündel über der Mannigfaltigkeit M. Die entscheidende Eigenschaft ist dabei die Existenz einer (lokalen) Trivialisierung, wie sie in folgender Definition beschrieben ist.

6.11 Definition (Vektorbündel). *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, V eine weitere Mannigfaltigkeit und $\pi\colon V \to M$ eine stetige Abbildung. Dann heißt V ein (komplexes) Vektorbündel der Dimension d über M, falls gilt:*

(i) *Für jedes $x \in M$ ist $V_x := \pi^{-1}(\{x\})$ ein komplexer Vektorraum der Dimension d. Der Raum V_x heißt Fiber über x.*

(ii) *Es existiert eine offene Überdeckung $M = \bigcup_{j\in J'} M_j$ von M so, dass V trivial über jedem M_j ist, d.h. es gibt Homöomorphismen („Trivialisierungen“)*

$$h_j\colon \pi^{-1}(M_j) \to M_j \times \mathbb{C}^d$$

mit $h_j(V_x) = \{x\}\times\mathbb{C}^d$ für alle $x \in M_j$, wobei die induzierte Abbildung $\mathrm{pr}_{\mathbb{C}^d} \circ h_j\colon V_x \to \mathbb{C}^d$ ein Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen ist. Hierbei ist $\mathrm{pr}_{\mathbb{C}^d}\colon V_j\times\mathbb{C}^d,\ (x,v) \to v$.

Falls M eine C^∞-Mannigfaltigkeit ist, so heißt das Vektorbündel V glatt, falls

$$h_k h_j^{-1} \colon (M_j \cap M_k) \times \mathbb{C}^d \to (M_j \cap M_k) \times \mathbb{C}^d$$

Ersetzt man $\mathbb{C}^d$ durch $\mathbb{R}^d$, so erhält man ein reelles Vektorbündel.

b) Pseudodifferentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten

6.12 Satz (Koordinatentransformation)**.** *Seien $\mu \in \mathbb{R}$, $U, \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$, $P := \mathrm{op}(p)$. Es existiere ein $\varphi \in \mathscr{D}(U)$ mit $P = \varphi P(\varphi\,\cdot)$, d.h. P sei lokalisiert in U. Sei $\Phi\colon \widetilde{U} \to U$ ein C^∞-Diffeomorphismus. Betrachte den pull-back $\Phi^* P := [P(\cdot \circ \Phi^{-1})] \circ \kappa$ von P unter Φ. Dann ist $\Phi^* P$ wieder ein Pseudodifferentialoperator der Ordnung μ, und der führende Term in der Asymptotik des Symbols von $\Phi^* P$ ist $p(\Phi(x), (D\Phi(x)^{-t}\xi)$.*

Beweis. Wir nehmen an, dass $\mu < -n$ gilt, d.h. dass die Integrale existieren; im allgemeinen Fall muss man Oszillatorintegrale verwenden, d.h. mit einer Funktion $\chi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ regularisieren. Für $B = \Phi^* P$ gilt

$$\begin{aligned} Bu(x) &= \iint e^{i(\Phi(x)-y)\xi} p(\Phi(x),\xi) u(\Phi^{-1}(y)) dy d\xi \\ &= \iint e^{i(\Phi(x)-\Phi(z))\xi} p(\Phi(x),\xi) u(z) |\det D\Phi(z)| dz d\xi, \end{aligned}$$

wobei $z = \Phi^{-1}(y)$ substituiert wurde. Schreibe nun

$$\begin{aligned} \Phi(x) - \Phi(z) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \Phi(z + t(x-z)) dt \\ &= \int_0^1 D\Phi(z + t(x-z)) dt (x-z) =: \Psi(x,z) \cdot (x-z), \end{aligned}$$

wobei $\Psi \in C^\infty(V \times V; C^{n\times n})$ mit $\Psi(z,z) = D\kappa(z)$. Ohne Einschränkung sei $\Psi(x,z)$ für alle $x, z \in V$ invertierbar (sonst verkleinere man V durch eine Partition der Eins). Substituiere in obigem Integral $\eta = \Psi(x,z)^t \xi$ und erhalte

$$Bu(x) = \iint e^{i(x-z)\eta} p(\Phi(x), [\Psi(x,z)^{-1}]t\eta) |\det D\Phi(z)| \cdot |\det \Psi(x,z)|^{-1} dz d\eta.$$

Somit ist B ein Pseudodifferentialoperator mit dem Doppelsymbol

$$q(x,\xi,x') = p(\Phi(x), [\Psi(x,x')^{-1}]^t \eta) \cdot |\det D\Phi(x')| \cdot |\det \Psi(x,z)|^{-1}.$$

Damit erhält man die asymptotische Entwicklung für das Symbol $b(x,\xi)$ von B:

$$b(x,\xi) \sim \sum_{|\alpha|=0}^\infty D_\xi^\alpha \partial_{x'}^\alpha q(x,\xi,x')\big|_{x'=x}.$$

Für $\alpha = 0$ ist der Term gegeben durch $p(\Phi(x), (D\Phi(x))^{-t}\xi)$. □

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

6.13 Definition (Pseudodifferentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten). *Sei M eine geschlossene n-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit. Ein Operator $P\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ ist ein Pseudodifferentialoperator der Ordnung $\mu \in \mathbb{R}$, falls gilt:*

(i) *Für $\varphi, \psi \in C^\infty(M)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp}\psi = \emptyset$ ist $\varphi P(\psi\,\cdot)$ ein Integraloperator mit C^∞-Kern.*

(ii) *Sei $\kappa\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte von M. Dann ist für $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(U)$ der Operator $\kappa_*[\varphi P(\psi\,\cdot)]$ ein Pseudodifferentialoperator in $\mathbb{R}^n$ der Ordnung μ.*
Dabei ist $\kappa_*[\varphi P(\psi u)](x) := \big[\varphi P(\psi \cdot (u \circ \kappa))\big](\kappa^{-1}(x))$ der push-forward von $\varphi P(\psi\,\cdot)$ unter κ.

Die Menge aller Pseudodifferentialoperatoren der Ordnung μ auf M wird mit $\Psi^\mu(M)$ bezeichnet. Falls alle auftretenden Pseudodifferentialoperatoren im $\mathbb{R}^n$ klassisch sind, heißt auch P ein klassischer Pseudodifferentialoperator auf M; Schreibweise $P \in \Psi_{\mathrm{cl}}(M)$.

6.14 Bemerkung. a) Man kann zeigen, dass für einen linearen Operator $A\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) A ist ein Integraloperator mit C^∞-Kern,

(ii) $A\colon H^{-s}(M) \to H^s(M)$ ist stetig für alle $s \geq 0$,

(iii) A ist Pseudodifferentialoperator der Ordnung $-\infty$.

Falls diese Aussagen gelten, heißt A ein glättender Operator auf M.

b) Da bei Kartenwechsel nach Satz 6.12 die Klasse der Pseudodifferentialoperatoren invariant bleibt, ist die Definition 6.13 korrekt.

6.15 Bemerkung. Sei nun P ein Pseudodifferentialoperator der Ordnung μ auf M. Dann existieren folgende Darstellungen von P:

(i) Sei $\{\varphi_j : j = 1,\dots,N\}$ eine Partition von M, wobei wir annehmen können, dass $\operatorname{supp}\varphi_j$ und $\operatorname{supp}\varphi_k$ entweder disjunkt sind oder in einer gemeinsamen Koordinatenumgebung liegen, d.h. im Definitionsbereich einer Karte. Dann gilt $P = \sum_{j,k=1}^N \varphi_j P \varphi_k$, und $\varphi_j P \varphi_k$ ist Integraloperator mit C^∞-Kern, falls $\operatorname{supp}\varphi_j \cap \operatorname{supp}\varphi_k = \emptyset$, und $\kappa_*(\varphi_j P \varphi_k)$ ist Pseudodifferentialoperator der Ordnung μ auf $\mathbb{R}^k$, falls $\operatorname{supp}\varphi_j \cup \operatorname{supp}\varphi_k \subset U$ für eine Karte $\kappa\colon U \to \mathbb{R}^k$ gilt.

(ii) Sei $M = \bigcup_{j=1}^N U_j$ eine offene Überdeckung mit Karten $\kappa_j\colon U_j \to \mathbb{R}^n$, $\{\varphi_j : j = 1,\dots,N\}$ eine zugehörige C^∞-Partition der Eins und $\psi_j \in \mathscr{D}(U_j)$ mit $\psi_j = 1$ auf $\operatorname{supp}\varphi_j$. Dann gilt

$$Pu = \sum_{j=1}^N \varphi_j P[(\psi_j + (1-\psi_j))u] = \sum_{j=1}^N \varphi_j P(\psi_j u) + Tu,$$

wobei $(\kappa_j)_*[\varphi_j P \psi_j]$ ein Pseudodifferentialoperator der Ordnung μ auf $\mathbb{R}^n$ ist und T ein glättender Operator auf M ist.

6.16 Satz. *Sei M eine geschlossene C^∞-Mannigfaltigkeit.*

a) Sei $P \in \Psi^\mu(M)$. Dann besitzt P eine stetige Fortsetzung $P\colon H^s(M) \to H^{s-\mu}(M)$ für alle $s \in \mathbb{R}$.

b) Seien $P_1 \in \Psi^{\mu_1}(M)$, $P_2 \in \Psi^{\mu_2}(M)$. Dann ist $P_1 P_2 \in \Psi^{\mu_1+\mu_2}(M)$.

c) Sei $P \in \Psi^\mu(M)$ und $P^*\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ ein linearer Operator mit

$$\langle Pu, v\rangle_{L^2(M)} = \langle u, P^*v\rangle_{L^2(M)} \quad (u, v \in C^\infty(M)).$$

Dann ist $P^* \in \Psi^\mu(M)$.

Beweis. Dies folgt mit Partition der Eins aus den jeweiligen Aussagen im $\mathbb{R}^n$. □

6.17 Definition (Elliptische Pseudodifferentialoperatoren)**.** *a) Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit, und sei $\{(U_j, \kappa_j) : j \in J\}$ ein Atlas von M. Definiere φ_j und ψ_j wie in Bemerkung 6.15 (ii) und betrachte zu $P \in \Psi(M)$ die Symbole p_j von $(\kappa_j)_*[\varphi_j P \psi_j] \in \Psi(\mathbb{R}^n)$. Dann heißt die Familie $\{p_j : j \in J\}$ das (komplette) Symbol von P.*

b) Falls in der Situation von a) sogar $P \in \Psi_{\mathrm{cl}}(M)$ gilt, so heißt die durch die Familie $\{p_{j0} : j = 1, \dots, N\}$ der Hauptsymbole gegebene Abbildung $p_0\colon T^*M \to \mathbb{C}$ das Hauptsymbol von P.

c) Sei nun M eine geschlossene Mannigfaltigkeit und $P \in \Psi_{\mathrm{cl}}(M)$. Dann heißt P elliptisch, falls

$$p_0(x, \xi) \neq 0 \quad ((x, \xi) \in T^*M \setminus \{0\}).$$

6.18 Bemerkung. Man beachte in obiger Definition, dass das Hauptsymbol eines klassischen Pseudodifferentialoperators $Q \in \Psi_{\mathrm{cl}}(\mathbb{R}^n)$ der führende homogene Teil in der asymptotischen Entwicklung des Symbols ist. Nach Satz 6.12 ist das Hauptsymbol invariant unter Koordinatenwechsel auf T^*M und damit als globale Funktion auf T^*M definiert. Die 0 in T^*M ist dabei definiert durch den Wert 0 als Element von T^*_aM für jedes $a \in M$ (der sogenannte Nullschnitt in T^*M).

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

7. Fredholm-Theorie für elliptische Pseudodifferentialoperatoren

7.1 Worum geht's? Elliptische Pseudodifferentialoperatoren im $\mathbb{R}^n$ können durch die Existenz einer Parametrix charakterisiert werden. Auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten gilt dies ebenso; hier hat man aber auch noch eine weitere äquivalente Eigenschaft, nämlich die Fredholm-Eigenschaft der $H^s(M)$-Realisierung. Dies ist einer der Hauptsätze über Pseudodifferentialoperatoren und stellt einen Einstieg in die Indextheorie dar, welche etwa im berühmten Atiyah-Singer-Indexsatz einen ihrer Höhepunkte findet. Hier werden nur erste Grundlagen besprochen, insbesondere auch der Begriff des Fredholm-Operators diskutiert.

a) Fredholm-Operatoren

7.2 Bemerkung. Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \subset X$ ein Unterraum. Dann heißt ein Unterraum $V \subset X$ ein Komplement von U, falls $X = U \oplus V$, d.h. $U \cap V = \{0\}$ und $X = U + V$. Ein Komplement von U existiert stets, wie man etwa mit dem Basisergänzungssatz sieht, ist aber nicht eindeutig bestimmt.

Falls V ein Komplement zu U ist, so ist die Quotientenabbildung $V \to X/U$ bijektiv. Wir erhalten bijektive Abbildungen

$$U \times X/U \to U \times V \to X,$$

wobei die letzte Abbildung durch $(u, v) \mapsto u + v$ gegeben ist.

Ebenfalls aus dem Basisergänzungssatz sieht man, dass alle Komplemente von U dieselbe Dimension besitzen. Man definiert

$$\operatorname{codim} U := \dim(X/U).$$

Damit gilt $\operatorname{codim} U = \dim V$ für jedes Komplement V von U.

Falls X Banachraum ist, so existiert im allgemeinen nicht zu jedem abgeschlossenen Unterraum ein abgeschlossenes Komplement. Falls X jedoch sogar ein Hilbertraum ist, so ist $U^\perp$ stets ein abgeschlossenes Komplement zum abgeschlossenen Unterraum U.

7.3 Lemma. *Seien X, Y $\mathbb{K}$-Banachräume, und sei $T \in L(X, Y)$ mit $\operatorname{codim} R(T) < \infty$. Dann ist $R(T)$ abgeschlossen.*

Beweis. (i) Sei zunächst T injektiv. Wir wählen eine Basis $\{\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n\}$ von $Y/R(T)$.

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

Definiere

$$S\colon \mathbb{K}^n \times X \to Y,\ (\alpha, x) \mapsto Tx + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i.$$

Dann ist $S \in L(\mathbb{K}^n \times X, Y)$. Falls $S(\alpha, x) = 0$, so folgt $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{y}_i = 0$ in $Y/R(T)$ und damit $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Also ist $Tx = 0$ und somit $x = 0$. Daher ist S injektiv.

Zu $y \in Y$ existieren $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ mit $\overline{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{y}_i$, d.h. $y - \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \in R(T)$. Damit existiert ein $x \in X$ mit $S(\alpha, x) = y$. Also ist S auch surjektiv und damit bijektiv. Nach dem Satz vom stetigen Inversen ist $S^{-1} \in L(Y, X \times \mathbb{K}^n)$, und $R(T) = S(\{0\} \times \mathbb{R}^n)$ abgeschlossen.

(ii) Falls T nicht injektiv ist, so betrachte

$$\widetilde{T}\colon X/\ker T \to Y,\ \overline{x} \mapsto Tx.$$

Da $\ker T = T^{-1}(0)$ abgeschlossen ist, ist $X/\ker T$ ein Banachraum, und nach (i) ist $R(\widetilde{T}) = R(T)$ abgeschlossen. □

7.4 Definition. *Seien X, Y Banachräume.*

a) Ein Operator $T \in L(X, Y)$ heißt kompakt, falls

$$\overline{\{Tx : \|x\| \le 1\}} \subset Y$$

kompakt ist.

b) Ein Operator $T \in L(X, Y)$ heißt Fredholm-Operator, falls $\dim \ker T < \infty$ und $\operatorname{codim} R(T) < \infty$ gilt (und damit $R(T)$ abgeschlossen ist). In diesem Fall heißt

$$\operatorname{ind} T := \dim \ker T - \operatorname{codim} R(T)$$

der Index von T.

Die Menge der kompakten bzw. Fredholm-Operatoren wird mit $K(X, Y)$ bzw. $\Phi(X, Y)$ bezeichnet. Man setzt $K(X) := K(X, X)$ und $\Phi(X) := \Phi(X, X)$.

7.5 Lemma. *Seien X, Y Banachräume.*

a) Es gilt $\mathrm{id}_X \in K(X)$ genau dann, wenn $\dim X < \infty$.

b) Die Menge $K(X)$ ist ein zweiseitiges Ideal in $L(X)$. Analog gilt auch für Operatoren zwischen verschiedenen Banachräumen, dass die Komposition eines beschränkten Operators und eines kompakten Operators wieder kompakt ist.

c) $K(X, Y)$ ist ein Unterraum von $L(X, Y)$, der in der Normtopologie abgeschlossen ist.

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

Beweis. a) Falls $\dim X < \infty$, so ist $\overline{B(0,1)}$ kompakt. Falls andererseits $\mathrm{id}_X \in K(X)$, so existiert eine endliche Überdeckung $\overline{B}(0,1) \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \frac{1}{2})$ mit $x_i \in X$. Sei $V := \mathrm{span}\{x_1, \dots, x_n\}$. Wir zeigen $X = V$.

Angenommen, es existiert ein $x \in X \setminus V$. Dann ist $d := \mathrm{dist}(x, V) > 0$, und wir können ein $y \in V$ mit $d \le \|x - y\| \le \frac{3}{2} d$ wählen. Setzt man $z := \frac{x-y}{\|x-y\|} \in \overline{B(0,1)}$, so existiert ein x_i mit $\|x_i - z\| < \frac{1}{2}$. Wir schreiben

$$x = y + \|x-y\| z = y + \|x-y\| x_i + \|x-y\|(z - x_i).$$

Da die ersten beiden Summanden auf der rechten Seite beide in V liegen, gilt nach Definition von d die Ungleichung

$$\|x-y\| \cdot \|z - x_i\| \ge d,$$

d.h. $\|x - y\| \ge \frac{d}{\|z - x_i\|} > 2d$ im Widerspruch zur Wahl von y. Also gilt $X = V$ und damit ist X endlich-dimensional.

b) folgt sofort aus der Definition, da stetige Operatoren beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen abbilden.

c) Man sieht leicht, dass $K(X,Y) \subset L(X,Y)$ ein Unterraum ist, d.h. es ist nur die Abgeschlossenheit zu zeigen.

Offensichtlich ist ein Operator S genau dann kompakt, falls die Menge $S(B(0,1))$ für jedes $\varepsilon > 0$ ein ε-Netz besitzt, d.h. eine endliche Menge $(Sx_i)_{i=1,\dots,n}$ mit $S(B(0,1)) \subset \bigcup_{i=1}^n B(Sx_i, \varepsilon)$.

Sei nun $T \in \overline{K(X,Y)}$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $S \in K(X,Y)$ mit $\|T - S\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Da S kompakt ist, existiert ein $\frac{\varepsilon}{3}$-Netz $(Sx_i)_{i=1,\dots,n}$ für die Menge $S(B(0,1))$. Für $x \in B(0,1)$ und geeignetes $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt dann

$$\|Tx - Tx_i\| \le \|(T-S)x\| + \|Sx - Sx_i\| + \|(T-S)x\| < \varepsilon.$$

Also gilt $T(B(0,1)) \subset \bigcup_{i=1}^n B(Tx_i, \varepsilon)$, und T ist ebenfalls kompakt. □

Die folgenden Sätze werden nur für den Hilbertraum-Fall formuliert und bewiesen, gelten aber auch für Banachräume. Die Beweise für Banachräume sind ähnlich, aber technisch aufwändiger. Dies liegt insbesondere daran, dass die Existenz abgeschlossener komplementärer Unterräume in Banachräumen nicht gesichert ist, während man bei Hilberträumen stets das orthogonale Komplement wählen kann.

7.6 Satz. *Sei X ein Hilbertraum. Dann ist $\Phi(X) \subset L(X)$ offen, und* $\mathrm{Ind}\colon \Phi(X) \to \mathbb{Z}$ *ist lokal konstant und damit konstant auf jeder Zusammenhangskomponente. Insbesondere ist für jede stetige Abbildung $F\colon [0,1] \to \Phi(X)$ die Abbildung* $\mathrm{Ind}\colon [0,1] \to \mathbb{Z}$ *eine Konstante.*

Beweis. Sei $T \in \Phi(X)$. Definiere

$$N := (\ker T)^\perp,\ M := R(T)^\perp.$$

Dann gilt $\dim M < \infty$. Definiere $Y := N \oplus M$ und betrachte die Abbildung

$$\varphi\colon L(X) \to L(Y, X),\ S \mapsto \varphi(S) \text{ mit } \varphi(S)(n, m) := Sn+m \quad (n \in N,\, m \in M,\, S \in L(X)).$$

Dann gilt $\|\varphi(S) - \varphi(T)\| = \|S - T\|$ $(S \in L(X))$, und $\varphi(T)$ ist bijektiv (vergleiche Bemerkung 7.2). Also (Neumann-Reihe!) existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $\widetilde{T} \in L(X)$ mit $\|T - \widetilde{T}\| < \varepsilon$ die Abbildung $\varphi(\widetilde{T}) \in L(Y, X)$ bijektiv ist.

Sei nun $\widetilde{T} \in L(X)$ mit $\|T - \widetilde{T}\| < \varepsilon$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\varphi(\widetilde{T})(N \times \{0\}) &= \widetilde{T}(N),\\ \varphi(\widetilde{T})(\{0\} \times M) &= M,\end{aligned}$$

und wegen der Bijektivität von $\varphi(\widetilde{T})$ folgt somit

$$\widetilde{T}(N) \oplus M = X. \tag{7.1}$$

Andererseits ist $\widetilde{T}|_N$ injektiv, da $\varphi(\widetilde{T})$ injektiv ist, d.h. es gilt $\ker \widetilde{T} \cap N = \{0\}$. Somit existiert eine direkte Zerlegung

$$\ker \widetilde{T} \oplus W \oplus W = X \tag{7.2}$$

mit einem Unterraum $W \subset X$ (man kann etwa $W := (\ker \widetilde{T} \oplus N)^\perp$ wählen). Insbesondere gilt

$$\dim \ker \widetilde{T} + \dim W = \dim \ker T < \infty. \tag{7.3}$$

Für $U := R(\widetilde{T})^\perp$ erhalten wir aus (7.1) die Gleichheit

$$R(\widetilde{T}) \oplus U = X = \widetilde{T}(N) \oplus M.$$

Anderseits ist $\widetilde{T}|_{W \oplus N}$ nach (7.2) injektiv, d.h.

$$R(\widetilde{T}) = \widetilde{T}(W \oplus N) = \widetilde{T}(W) \oplus \widetilde{T}(N).$$

Somit ist

$$\operatorname{codim} R(\widetilde{T}) = \dim U = \dim M - \dim \widetilde{T}(W) = \dim M - \dim W,$$

letzteres gilt, weil $\widetilde{T}|_W\colon W \to \widetilde{T}(W)$ eine Bijektion ist. Wir erhalten

$$\operatorname{codim} R(\widetilde{T}) = \operatorname{codim} R(T) - \dim W < \infty.$$

Somit ist $\widetilde{T} \in \Phi(X)$, und aus der letzten Gleichheit und (7.3) folgt $\operatorname{Ind} \widetilde{T} = \operatorname{Ind} T$. □

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

7.7 Satz (Satz von Schauder)**.** *Seien X, Y Hilberträume und $T \in L(X, Y)$ kompakt. Dann ist auch der adjungierte Operator $T^* \in L(Y, X)$ kompakt.*

Beweis. Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ eine beschränkte Folge. Dann definiert $x_n := T^* y_n$ eine beschränkte Folge in X, also existiert eine konvergente Teilfolge $(Tx_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Somit folgt

$$\|x_{n_j} - x_{n_k}\|^2 = \langle T^* y_{n_j} - T^* y_{n_k}, x_{n_j} - x_{n_k}\rangle_X = \langle y_{n_j} - y_{n_k}, Tx_{n_j} - Tx_{n_k}\rangle_Y \to 0$$

für $j, k \to \infty$, da $(y_{n_j})_{j\in\mathbb{N}} \subset Y$ beschränkt ist. Also ist $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}} = (T^* y_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. □

7.8 Satz (Fredholm-Alternative)**.** *Sei X Hilbertraum und $T \in K(X)$. Dann ist $1 - T \in \Phi(X)$ mit $\operatorname{Ind}(1 - T) = 0$. Insbesondere gilt eine der beiden Alternativen:*

(i) *$1 - T$ ist bijektiv.*

(ii) *$1 - T$ ist nicht injektiv.*

Somit hat die Gleichung $(1 - T)u = f$ genau dann für alle $f \in X$ eine eindeutige Lösung u, falls die homogene Gleichung $(1-T)u = 0$ nur die triviale Lösung besitzt.

Beweis. Der Operator $\mathrm{id}_X|_{\ker(1-T)} = T|_{\ker(1-T)}$ ist kompakt, also gilt $\dim\ker(1 - T) < \infty$ nach Lemma 7.5 b). Nach dem Satz von Schauder ist $T^* \in K(X)$, und damit

$$\operatorname{codim} R(1 - T) = \dim R(1 - T)^\perp = \dim\ker(1 - T^*) < \infty.$$

Also ist $1 - T \in \Phi(X)$.

Die Abbildung $F\colon [0, 1] \to \Phi(X)$, $\lambda \mapsto 1 - \lambda T$, ist stetig. Nach Satz 7.6 folgt

$$\operatorname{Ind}(1 - T) = \operatorname{Ind} F(1) = \operatorname{Ind} F(0) = \operatorname{Ind}(\mathrm{id}_X) = 0.$$

□

7.9 Satz. *Seien X, Y Hilberträume und $T \in L(X, Y)$. Dann sind äquivalent:*

(i) *T ist Fredholm-Operator.*

(ii) *Es existiert ein Regularisator S von T, d.h. ein $S \in L(Y, X)$ mit $\mathrm{id}_X - ST \in K(X)$ und $\mathrm{id}_Y - TS \in K(Y)$.*

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

Beweis. (i)⇒(ii). Sei $T \in \Phi(X, Y)$. Da $T|_{(\ker T)^\perp} \to R(T)$ bijektiv ist, kann man $S \in L(Y, X)$ durch

$$S := \begin{cases} (T|_{(\ker T)^\perp})^{-1}, & \text{auf } R(T), \\ 0, & \text{auf } R(T)^\perp \end{cases}$$

definieren. Dann ist $\mathrm{id}_X - ST$ die orthogonale Projektion auf $\ker T$ und $\mathrm{id}_Y - TS$ die orthogonale Projektion auf $R(T)^\perp$. Nach Voraussetzung haben beide Projektionen endlich-dimensionalen Wertebereich und sind somit kompakt.

(ii)⇒(i). Sei $K_1 := \mathrm{id}_Y - T \in K(Y)$. Nach Satz 7.8 ist $TS = \mathrm{id}_Y - K_1 \in \Phi(Y)$. Wegen $R(T) \supset R(TS) = R(\mathrm{id}_Y - K_1)$ ist

$$\operatorname{codim} R(T) \leq \operatorname{codim}(\mathrm{id}_Y - K_1) < \infty.$$

Analog gilt für $K_2 := \mathrm{id}_X - ST$ die Ungleichung

$$\dim \ker T \leq \dim \ker(ST) = \dim \ker(\mathrm{id}_X - K_2) < \infty.$$

Somit ist $T \in \Phi(X, Y)$. □

b) Der Hauptsatz für elliptische Pseudodifferentialoperatoren

Zunächst zitieren wir zwei Ergebnisse, die sich direkt durch Lokalisierung aus den entsprechenden Ergebnissen im $\mathbb{R}^n$ übertragen lassen. Im folgenden sei stets M eine geschlossene glatte Mannigfaltigkeit.

7.10 Satz. *a) (Rellich-Kondrachov)Für $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ mit $s_1 < s_2$ ist die Einbettung $H^{s_2}(M) \hookrightarrow H^{s_1}(M)$ kompakt.*

b) Falls $P \in \Psi^\mu_{\mathrm{cl}}(M)$ mit $\mu > 0$ ist, so besitzt P eine Parametrix Q, d.h. ein $Q \in \Psi^{-\mu}_{cl}(M)$ mit $1 - PQ \in \Psi^{-\infty}(M)$ und $1 - QP \in \Psi^{-\infty}(M)$.

7.11 Satz (Notwendigkeit der Elliptizität)**.** *Sei $P \in \Psi^\mu_{\mathrm{cl}}(M)$ mit $\mu > 0$. Es gelte die a priori-Abschätzung*

$$\|u\|_{H^\mu(M)} \leq C(\|Pu\|_{L^2(M)} + \|u\|_{L^2(M)}) \quad (u \in H^\mu(M))$$

mit einer Konstante $C > 0$. Dann ist P elliptisch.

Beweis. **(i)** *Lokalisierung:* Sei $(a, f) \in T^*M \setminus \{0\}$ und sei $\kappa\colon U \to \kappa(U)$ eine Karte von M mit $a \in U$. Sei Ψ die zu κ gehörige Karte von T^*M, und sei $\varphi \in \mathscr{D}(U)$ mit $\varphi = 1$ in einer Umgebung U' von a. Sei ferner $\psi \in \mathscr{D}(U)$ mit $\psi = 1$ auf $\operatorname{supp} \varphi$.

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

Das Hauptsymbol p_0 von P ist gegeben durch $p_0(a,f) = q_0(x,\xi)$ mit $(x,\xi) = \Psi(a,f)$, wobei q_0 das Hauptsymbol von $Q := \kappa_*(\psi P\varphi)$ ist.

Die a priori-Abschätzung gilt insbesondere für $u \in \mathscr{D}(U')$. Für diese u gilt $\varphi u = u$ und $\|u\|_{H^s(M)} = \|u\circ\kappa^{-1}\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$ (vergleiche Definition 6.4). Schreibe $Pu = \psi Pu + (1-\psi)P\varphi u$. Wegen $(1-\psi)P\varphi \in \Psi^{-\infty}(M)$ erhalten wir für $v := u\circ\kappa^{-1}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|v\|_{H^\mu(M)} &= \|u\circ\kappa^{-1}\|_{H^\mu(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{H^\mu(M)}\\
&\le C\big(\|Pu\|_{L^2(M)} + \|u\|_{L^2(M)}\big)\\
&\le C\big(\|\psi Pu\|_{L^2(M)} + \|(1-\psi)P\varphi u\|_{L^2(M)} + \|u\|_{L^2(M)}\big)\\
&\le C\big(\|(\psi P\varphi u)\circ\kappa^{-1}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|u\circ\kappa^{-1}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\big)\\
&= C\big(\|Qv\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\big).
\end{aligned}$$

Diese a priori-Abschätzung gilt für alle $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} v \subset \kappa(U')$.

(ii) *Abschätzung der einzelnen Terme:* Sei $(x_0,\xi_0) \in \kappa(U') \times \mathbb{R}^n$. Definiere $v(x) := \theta(x)\exp(i\tau x\xi_0)$ mit $\theta \in \mathscr{D}(\kappa(U'))$, $\|\theta\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1$ und einem großen Parameter $\kappa > 0$.

Wir wenden die a priori-Abschätzung auf v an und schätzen die einzelnen Terme ab.

(a) Sei $\langle D\rangle = \mathscr{F}^{-1}\langle\xi\rangle\mathscr{F}$ und $M_\theta u := \theta\cdot u$. Dann ist $\langle D\rangle^\mu \in \Psi^\mu_{\mathrm{cl}}(\mathbb{R}^n)$, $M_\theta \in \Psi^0_{\mathrm{cl}}(\mathbb{R}^n)$ und damit $\langle D\rangle^\mu M_\theta \in \Psi^\mu_{\mathrm{cl}}(\mathbb{R}^n)$ mit Doppelsymbol

$$a(x,\xi,x',\xi') = \langle\xi\rangle^\mu\theta(x').$$

Das zugehörige Linkssymbol besitzt nach Satz 4.7 die asymptotische Entwicklung

$$a_L(x,\xi) \sim \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\langle\xi\rangle^\mu D_x^\alpha\theta(x).$$

Unter Verwendung von Folgerung 3.11 erhält man

$$\langle D\rangle^\mu v(x) = \langle D\rangle^\mu M_\theta e^{i\tau\xi_0\cdot} = [\operatorname{op}(a_L)e^{i\tau\xi_0\cdot}](x) = a_L(x,\tau\xi_0)e^{i\tau\xi_0 x}.$$

Da $\langle D\rangle$ das Hauptsymbol $|\xi|$ besitzt, ist das Hauptsymbol von $\operatorname{op}(a_L)$ gegeben durch $|\xi|^\mu\theta(x)$.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\|v\|_{H^\mu(\mathbb{R}^n)} &= C\|\langle D\rangle^\mu v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = C\|a_L(\cdot,\tau\xi_0)e^{i\tau\xi_0\cdot}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\
&= C\big(|\tau\xi_0|^\mu\|\theta\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + O(\tau^{\mu-1})\big)
\end{aligned}$$

für $\tau\to\infty$, da $a_L(x,\tau\xi_0) - a_{L0}(x,\tau\xi_0) = O(\tau^{\mu-1})$ für $\tau\to\infty$.

(c) Dieselbe Rechnung wie in Teil (a) mit Q anstelle von $\langle D\rangle^\mu$ zeigt

$$Qv = \big[QM_\theta e^{i\tau\xi_0\cdot}\big](x) = q_0(x,\tau\xi_0)\theta(x) + O(\tau^{\mu-1}) \quad (\tau\to\infty).$$

Damit erhalten wir für die L^2-Norm die Abschätzung

$$\|Qv\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|q_0(\cdot,\xi_0)\theta(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\tau^\mu + O(\tau^{\mu-1}) \quad (\tau\to\infty).$$

(iii) *Beweis durch Widerspruch für $\tau\to\infty$:* Sei $\varepsilon>0$. Angenommen, es gilt $q_0(x_0,\xi_0)=0$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\|q_0(\cdot,\xi_0)\theta(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\le \sup_{x\in\operatorname{supp}\theta}|q_0(x,\xi_0)|\cdot\|\theta\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\ &= \sup_{x\in\operatorname{supp}\theta}\big|q_0(x,\xi_0)-q_0(x_0,\xi_0)\big|<\varepsilon,\end{aligned}$$

falls $\operatorname{supp}\theta$ hinreichend klein mit $x_0\in\operatorname{supp}\theta$ gewählt wird. Nach (c) folgt

$$\|Qv\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \varepsilon\tau^\mu + O(\tau^{\mu-1}) \quad (\tau\to\infty).$$

Verwendet man nun $\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=1$ und die Abschätzungen aus (b) und (c), so erhält man aus der a priori-Abschätzung

$$\tau^\mu|\xi_0|^\mu \le C\big(\varepsilon\tau^\mu + O(\tau^{\mu-1})\big) \quad (\tau\to\infty),$$

was für hinreichend kleines ε zu einem Widerspruch führt. □

7.12 Satz (Hauptsatz über elliptische Pseudodifferentialoperatoren)**.** *Sei M geschlossene glatte Mannigfaltigkeit und $P\in\Psi^\mu_{\mathrm{cl}}(M)$ mit $\mu>0$. Dann sind äquivalent:*

(i) *P ist elliptisch.*

(ii) *P besitzt eine Parametrix.*

(iii) *Durch P wird für alle $s\in\mathbb{R}$ ein Fredholm-Operator $P\in\Phi(H^s(M),H^{s-\mu}(M))$ definiert.*

(iv) *Für jedes $s\in\mathbb{R}$ gilt die a priori-Abschätzung*

$$\|u\|_{H^s(M)} \le C_s\big(\|Pu\|_{H^{s-\mu}(M)} + \|u\|_{H^{s-\mu}(M)}\big) \quad (u\in H^s(M)).$$

(v) *Es gilt $\|u\|_{H^\mu(M)} \le C_\mu\big(\|Pu\|_{L^2(M)}+\|u\|_{L^2(M)}\big)$ $(u\in H^\mu(M))$.*

Beweis. **(i)⇒(ii).** Satz 7.10 b).

(ii)⇒(iii). Sei $1-QP\in\Psi^{-\infty}(M)$. Da $T\in L(H^s(M),H^{s+1}(M))$ und da die Einbettung $H^{s+1}(M)\hookrightarrow H^s(M)$ nach dem Satz von Rellich-Kondrachov kompakt ist, folgt $T\in K(H^s(M))$. Genauso folgt $1-PQ\in K(H^{s-\mu}(M))$. Nach Satz 7.9 ist $P\in\Phi(H^s(M),H^{s-\mu}(M))$.

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

(iii)⇒(iv). Zu $s \in \mathbb{R}$ betrachte $P \in \Phi(H^s(M), H^{s-\mu}(M))$. Da der Wertebereich $R(P)$ abgeschlossen ist, ist

$$\widetilde{P} := P|_{(\ker P)^\perp} : \big((\ker P)^\perp, \|\cdot\|_{H^s(M)}\big) \to \big(R(P), \|\cdot\|_{H^{s-\mu}(M)}\big)$$

eine Bijektion zwischen Hilberträumen und besitzt daher ein stetiges Inverses $\widetilde{P}^{-1}$.

Sei S die orthogonale Projektion auf $\ker P$. Als endlich-dimensionaler Unterraum ist $\ker P \subset H^{s-\mu}(M)$ abgeschlossen, d.h. S ist sowohl als orthogonale Projektion in $H^s(M)$ als auch als Operator in $L(H^{s-\mu}(M))$ stetig. Wegen $\dim \ker P < \infty$ sind die Normen $\|\cdot\|_{H^s(M)}$ und $\|\cdot\|_{H^{s-\mu}(M)}$ auf $\ker P$ äquivalent. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^s(M)} &\le \|Su\|_{H^s(M)} + \|\widetilde{P}^{-1}P(1-S)u\|_{H^s(M)}\\ &\le C\|Su\|_{H^{s-\mu}(M)} + \|\widetilde{P}^{-1}\| \cdot \|P(1-S)u\|_{H^{s-\mu}(M)}\\ &\le C\big(\|u\|_{H^{s-\mu}(M)} + \|Pu\|_{H^{s-\mu}(M)}\big),\end{aligned}$$

wobei $P(1-S)u = Pu$ verwendet wurde.

(iv)⇒(v). Trivial.

(v)⇒(i). Satz 7.11. □

c) Randwertprobleme: Ein kurzer Ausblick

Im folgenden sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^∞-Rand ∂G. Gegeben sei ein Differentialoperator

$$A(x,D) = \sum_{|\alpha|\le 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

mit glatten Koeffizienten $a_\alpha \in C^\infty(\overline{G})$, und Randoperatoren

$$B_j(x,D) = \sum_{|\beta|\le m_j} b_{j\beta}(x)\gamma_0 D^\beta$$

mit Koeffizienten $b_{j\beta} \in C^\infty(\partial G)$. Hier ist $\gamma_0 \colon u \mapsto u|_{\partial G}$ der Spuroperator.

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{aligned} A(x,D)u &= f \quad \text{in } G,\\ B_j(x,D)u &= g_j \quad (j=1,\dots,m) \ \text{ auf } \partial G.\end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass der Operator

$$(A,B) \colon H^s(G) \to H^{s-2m}(G) \times \prod_{j=1}^m H^{s-m_j-\frac12}(\partial G)$$

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

für alle $s \in \mathbb{R}$ stetig ist. Beachte, dass $H^s(\partial G)$ als Sobolevraum einer geschlossenen glatten Mannigfaltigkeit definiert ist.

Das Randwertproblem (A, B) heißt elliptisch, falls A proper elliptisch ist und die Lopatinskii-Shapiro-Bedingung erfüllt ist, d.h. die zugehörige gewöhnliche Differentialgleichung für jedes $\xi' \neq 0$ eindeutig lösbar ist. Wie im zweiten Teil der Vorlesung (für den parameter-elliptischen Fall) gezeigt wurde, existiert eine Fundamentallösung der gewöhnlichen Differentialgleichung der Form $w_k(x_n) = w_k(x', \xi', x_n)$. Wir definieren den zugehörigen Pseudodifferentialoperator P_k mit Hilfe einer Ausschneidefunktion χ, d.h. einer Funktion $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ mit $\chi(\xi') = 0$ für $|\xi'| \leq 1$ und $\chi(\xi') = 1$ für $|\xi'| \geq 2$. Definiere für $k = 1, \ldots, m$ den Operator

$$P_k g(x) := (\mathscr{F}')^{-1} \chi(\xi') w_k(x', \xi', x_n)(\mathscr{F}' g)(\xi').$$

7.13 Definition. *a) Sei $p \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^{n-1})$ mit*

$$|D_x^\alpha D_{\xi'}^{\beta'} p(x, \xi')| \leq C_{\alpha\beta'} \langle \xi' \rangle^{\mu - |\beta'| + \alpha_n} \exp(-\widetilde{C}_{\alpha\beta'} \langle \xi' \rangle x_n)$$
$$(x \in \mathbb{R}^n_+,\ \xi' \in \mathbb{R}^{n-1},\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ \beta' \in \mathbb{N}_0^{n-1}).$$

Dann heißt $P\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^{n-1}) \to C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$, $g \mapsto (\mathscr{F}')^{-1} p(x, \xi')(\mathscr{F}' g)(\xi')$ ein Poisson-Operator von Ordnung μ in $\mathbb{R}^n_+$.

b) Ein Operator $P\colon C^\infty(\partial G) \to C^\infty(G)$ heißt Poisson-Operator in G, falls P lokal Poisson-Operator in $\mathbb{R}^n_+$ ist.

Die explizite Darstellung der Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen erlaubt eine Abschätzung der Fundamentallösung $w_k(x', \xi', x_n)$. Damit kann man folgenden Satz beweisen:

7.14 Satz. *Das Randwertproblem (A, B) sei elliptisch. Dann gilt für $k, j = 1, \ldots, m$:*

a) Der oben definierte Operator P_k ist Poisson-Operator der Ordnung $-m_k - 1$ in G.

b) Der Operator AP_k ist Poisson-Operator der Ordnung $2m - m_k - 1$ in G.

c) Der Operator $B_j P_k - \delta_{jk} 1$ ist Pseudodifferentialoperator der Ordnung $m_j - m_k - 1$ im $\mathbb{R}^{n-1}$.

7.15 Bemerkung (Boutet de Monvel-Kalkül)**.** a) Sei (A, B) elliptisch. Sei $\widetilde{R} \in \Psi^{-2m}(\mathbb{R}^n)$ eine Parametrix zu $A(x, D)$ im $\mathbb{R}^n$, und sei $R_1 := (\widetilde{R} E_0 f)|_{\mathbb{R}^n_+}$, wobei E_0 die Fortsetzung von $f \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$ auf $\mathbb{R}^n$ durch 0 ist.

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

Definiere

$$R\begin{pmatrix} f \\ g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix} := (R_1 + G_1, P_1, \dots, P_k)\begin{pmatrix} f \\ g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix} := R_1 f + \sum_{k=1}^{m} P_k(g_k - B_k R_1 f),$$

wobei P_k die oben definierten Poisson-Operatoren sind und

$$G_1 := -\sum_{k=1}^{m} P_k B_k R_1$$

gesetzt wurde. Dann gilt bis auf Operatoren niedrigerer Ordnung $AR_1 f = f$, $AP_k = 0$ und $B_j P_k = \delta_{jk}$, d.h.

$$\begin{pmatrix} A \\ B_1 \\ \vdots \\ B_m \end{pmatrix} (R_1 + G_1, P_1, \dots, P_m) = I_{m+1} + \text{Operatoren der Ordnung -1} .$$

Also ist R eine Parametrix (erster Ordnung) zu $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$.

b) Dies ist ein Spezialfall des Boutet de Monvel-Kalküls, bei welchem allgemein Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} A+G & P \\ T & S \end{pmatrix}$$

betrachtet werden. Dabei sind

- A Pseudodifferentialoperator in G,
- G ein sogenannter singulärer Green-Operator in G,
- P ein Poisson-Operator in G (d.h. ein Operator von ∂G auf G),
- T ein Rand- oder Spuroperator (d.h. ein Operator von G auf ∂G),
- S ein Pseudodifferentialoperator auf ∂G.

Ein Beispiel für S ist der zur Lopatinskii-Matrix gehörige Operator. Die Theorie des Boutet de Monvel-Kalküls zeigt, dass bei geeigneter Definition der entsprechenden Operatorklassen jedes elliptische System $\begin{pmatrix} A+G & P \\ T & S \end{pmatrix}$ eine Parametrix besitzt.

Die oben definierte Parametrix stellt den wesentlichen Schritt dar, um folgenden Satz zu beweisen:

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008

7.16 Satz (Hauptsatz über elliptische Randwertprobleme)**.** *Sei* (A, B) *ein Randwertproblem in* G*. Dann sind äquivalent:*

(i) (A, B) *ist elliptisch.*

(ii) (A, B) *besitzt eine Parametrix.*

(iii) $(A, B)\colon H^{2m}(G) \to L^2(G) \times \prod_{j=1}^m H^{2m-m_j-\frac{1}{2}}(\partial G)$ *ist Fredholm.*

(iv) *Es gilt die a priori-Abschätzung*

$$\|u\|_{H^{2m}(G)} \le C\big(\|Au\|_{L^2(G)} + \sum_{j=1}^m \|B_j u\|_{H^{2m-m_j-\frac{1}{2}}(\partial G)} + \|u\|_{L^2(G)}\big).$$

© Robert Denk, Jörg Seiler 26. 1. 2008