Skript zur Vorlesung

Parabolische Differentialgleichungen

Sommersemester 2009

Robert Denk

Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 30. 7. 2009

Inhaltsverzeichnis

1. Maximale Regularität und $\mathcal{R}$-sektorielle Operatoren

1.1 Worum geht's? Dieser Abschnitt dient der Motivation und untersucht, größtenteils ohne Beweise, den Zusammenhang zwischen maximaler Regularität und $\mathcal{R}$-sektoriellen Operatoren. Maximale Regularität hat sich in den letzten Jahren als wichtiges Hilfsmittel zur Lösung nichtlinearer partieller Differentialgleichungen erwiesen. Eine äquivalente Beschreibung maximaler Regularität verwendet den Begriff der $\mathcal{R}$-Beschränktheit, der später noch genauer diskutiert wird. Insgesamt wird damit die zeitlich lokale Lösbarkeit einer nichtlinearen Gleichung zurückgeführt auf das genaue Studium der Resolvente des zur linearisierten Gleichung gehörigen Operators.

a) Linearisierung und maximale Regularität

1.2 Beispiel. Die Gleichung des *mean curvature flow* (Gleichung des mittleren Krümmungsflusses) beschreibt das zeitliche Verhalten einer Oberfläche und ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \partial_t u - \sum_{i,j=1}^n \Big(\delta_{ij} - \frac{\partial_i u \partial_j u}{1+|\nabla u|^2}\Big)\partial_i\partial_j u &= 0, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{1-1}$$

Dies ist ein typisches Beispiel einer quasilinearen Gleichung: Hier hängen die Koeffizienten der höchsten auftretenden Ableitung (im Beispiel die zweiten Ableitungen) noch von der gesuchten Funktion u und ihren Ableitungen ab.

1.3 Bemerkung (Linearisierung). Abstrakt kann man die obige Gleichung in der Form

$$\begin{aligned} \partial_t u + F(u)u &= G(u), \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

schreiben. Dabei ist $F(u)$ ein *linearer* Operator, der selbst noch von u abhängt, und $G(u)$ ist im allgemeinen ebenfalls eine nichtlineare Funktion von u. Die Linearisierung besteht nur darin, für festes u die Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_t v + F(u)v &= G(u), \\ v(0) &= u_0 \end{aligned}$$

zu betrachten. Als Gleichung in v ist dies eine lineare Gleichung, und man kann diese Gleichung mit Methoden der linearen Operatortheorie und Halbgruppentheorie behandeln.

Die Idee der maximalen Regularität besteht darin, für die linearisierte Gleichung eine „optimale“ Regularität nachzuweisen. Dies erlaubt es dann, durch eine Iteration die nichtlineare Gleichung zu lösen. Grob gesprochen, darf man beim Lösen der linearen Gleichung keine Glattheit verlieren, da die Lösung beim nächsten Iterationsschritt wieder eingesetzt werden muss. Dieser Zugang erlaubt es, recht allgemeine quasilineare und auch voll nichtlineare Gleichungen zu lösen, jedoch ist die Lösung im allgemeinen nur lokal in der Zeit, d.h. es ist mit diesen Methoden schwer, global existierende Lösungen zu finden.

Der Begriff der maximalen Regularität hängt ganz wesentlich von den Funktionenräumen ab, in welchen die Gleichung betrachtet wird. Es gibt zwei wichtige Klassen von geeigneten Lösungsräumen: Der Raum der Hölder-stetigen Funktionen, und die L^p-Sobolevräume. Wir werden uns in dieser Vorlesung ausschließlich mit den Sobolevräumen befassen.

Die linearisierte Gleichung hat die Form

$$\begin{aligned} \partial_t v + Av &= f \quad (t > 0), \\ v(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{1-2}$$

Im folgenden sei $T \in (0, \infty]$ und $J = (0, T)$. Falls man von $f \in L^p(J; X)$ für einen Banachraum X ausgeht, wird man an v die Bedingung

$$\partial_t v \in L^p(J; X) \;\text{ und } v \in L^p(J; D(A))$$

stellen. Aber was ist dann der richtige Raum für u_0? Es handelt sich hier um einen Spurraum, da der Wert von v an der Stelle $t = 0$ gebildet wird.

1.4 Definition und Satz (Spurraum)**.** *Sei $J = (0, T)$, $1 \le p \le \infty$ und $A\colon X \supset D(A) \to X$ ein abgeschlossener Operator im Banachraum X. Dann ist*

$$I_p(A) = \{x = u\,|_{t=0}\colon u \in \mathbb{E} := W^{1,p}(J; X) \cap L^p(J; D(A))\}$$

ausgestattet mit $\|x\|_{I_p(A)} := \inf\{\|u\|_{\mathbb{E}} : u\,|_{t=0} = x\}$ ein Banachraum und es gilt

$$D(A) \hookrightarrow I_p(A) \hookrightarrow X.$$

Man beachte, dass hier die Einbettung $X \hookrightarrow Y$ von zwei Banachräumen eine kanonische lineare, injektive und stetige Abbildung bezeichnet (in den meisten Fällen als Identität wählbar).

Beweis. Die Soboleveinbettung besagt $W^{1,p}(J; X) \hookrightarrow C([0, T]; X)$, was die Wohldefiniertheit von $u(0) \in X$ garantiert. Weiter ist

$$\|x\| = \|u(0)\| \le \sup_{t \in I} \|u(t)\| \le C\|u\|_{\mathbb{E}} \Longrightarrow I_p(A) \hookrightarrow X.$$

Ist $x \in D(A)$, betrachte $u(t) = e^{-t}x$. Dies zeigt

$$D(A) \hookrightarrow I_p(A).$$

Die anderen Aussagen werden hier nicht bewiesen. □

1.5 Bemerkung. Falls A ein abgeschlossener linearer Operator ist, kann der Spurraum auch explizit beschrieben werden. Für $p > 1$ gilt

$$I_p(A) = (X, D(A))_{1-1/p,p}$$

wobei die Notation auf der rechten Seite den reellen Interpolationsraum mit Interpolations-Exponent $1 - 1/p$ und Integrabilitäts-Parameter p bezeichnet. Falls $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ und $D(A) = W_p^m(\mathbb{R}^n)$ ist (wie das bei Differentialoperatoren A im Ganzraum eine natürliche Wahl ist), so folgt

$$I_p(A) = B_{pp}^{m-m/p}(\mathbb{R}^n).$$

Hier bezeichnet $B_{pp}^s(\mathbb{R}^n)$ den Besovraum der Differenzierbarkeitsordnung s.

1.6 Definition. Sei $T \in (0, \infty]$, $J = (0, T)$, $1 \leq p \leq \infty$ und $A : D(A) \to X$ abgeschlossen. Der Operator A hat maximale (L^p-) Regularität (MR), falls für alle $(f, x) \in L^p(J; X) \times I_p(A) =: \mathbb{F}$ ein u existiert, das $(CP)_{f,x}$ fast überall löst, und falls ein $C = C(J) > 0$ existiert, so dass für alle $(f, x) \in \mathbb{F}$ die Ungleichung

$$\|\dot{u}\|_{L^p(J;X)} + \|Au\|_{L^p(J;X)} \leq C(\|f\|_{L^p(J;X)} + \|x\|_{I_p(A)}) \tag{1-3}$$

erfüllt ist. Wir schreiben $A \in MR_p(J; X)$ bzw. (für $J = (0, \infty)$) $A \in MR_p(X)$.

1.7 Bemerkung. In der obigen Definition wird nur $\dot{u} \in L^p(J; X)$, aber nicht $u \in L^p(J; X)$ verlangt. Falls J endlich ist oder $0 \in \rho(A)$ gilt, so kann $\|\dot{u}\|_{L^p(J;X)}$ durch $\|u\|_{W_p^1(J;X)}$ ersetzt werden. In diesem Fall hat A genau dann maximale Regularität, falls durch

$$\begin{pmatrix} \partial_t + A \\ \gamma_0 \end{pmatrix} : \mathbb{E} = W^{1,p}(J; X) \cap L^p(J; D(A)) \to \mathbb{F} = L^p(J; X) \times I_p(A)$$

ein Isomorphismus von Banachräumen gegeben ist. Hierbei steht $\gamma_0 \colon u \mapsto u(0)$ für den Spuroperator.

1.8 Bemerkung. a) Jeder Operator $A \in MR_p(X)$ erzeugt eine beschränkte, holomorphe C_0-Halbgruppe.

b) Falls $A \in MR_p(X)$ für ein $p \in [1, \infty)$ gilt, so folgt bereits $A \in MR_p(X)$ für alle $p \in (1, \infty)$. Deswegen schreiben wir ab jetzt $MR(X)$ statt $MR_p(X)$.

Die beiden Aussagen a) und b) werden hier nicht bewiesen.

Wir wollen jetzt noch mal kurz auf den Gedanken der Linearisierung quasilinearer Gleichungen zurückkommen. Die nichtlineare Gleichung lautete

$$\begin{aligned} \partial_t u + F(u)u &= G(u), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Die zugehörige Linearisierung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \partial_t v + F(u)v &= G(u), \\ v(0) &= u_0 \end{aligned}$$

Für festes u setzt man nun $A := F(u)$ und $f := G(u)$. In den meisten Fällen hängt der Spurraum $I_p(A)$ nicht von u ab, wovon wir hier ausgehen. Falls die linearisierte Gleichung maximale Regularität besitzt, so existiert ein Lösungsoperator

$$S_u \colon L^p(J;X) \times I_p(A) \to W_p^1(J;X) \cap L^p(J;D(A)), \quad (f, u_0) \mapsto v$$

der linearen Gleichung, der selbst noch von der (unbekannten) Lösung u abhängt.

Die nichtlineare Gleichung ist nun genau dann eindeutig lösbar, falls die Fixpunktgleichung

$$u = S_u(G(u), u_0)$$

eine Lösung besitzt. Wegen maximaler Regularität kennt man eine Abschätzung für den Lösungsoperator S_u. Falls auch für die rechte Seite $G(u)$ geeignete Abschätzungen gefunden werden können, so kann versucht werden, den Banachschen Fixpunktsatz anzuwenden. Dazu muss die rechte Seite $\Phi(u) := S_u(G(u), u_0)$ eine Kontraktion im geeigneten Lösungsraum $\mathbb{E}$ definieren. Um die Kontraktionseigenschaft zu erreichen, muss üblicherweise das Zeitintervall $J = (0, T)$ oder die Anfangsdaten u_0 klein gewählt werden. Bei beliebigen Anfangsdaten erhält man (in der Zeit) lokale Lösungen und damit eine maximale Lösung, d.h. eine Lösung auf dem maximalen Existenzintervall. Globale Lösungen können mit dieser Methode üblicherweise nicht bewiesen werden.

Die oben skizzierte Methode ist nur recht abstrakt als allgemeiner Satz formulierbar, funktioniert aber bei einer ganzen Reihe von nichtlinearen Randwertproblemen. Beispiele hierfür sind

- der oben genannte mean-curvature-flow,
- Stefan-Probleme, welche Phasenübergänge beschreiben (inklusive der Beschreibung des freien Randes zwischen den beiden Aggregatszuständen),
- Cahn-Hilliard-Gleichungen, welche etwa die Grenze zwischen zwei Legierungen in einem Metall beschreiben,
- die Navier-Stokes-Gleichung, welche das Strömungsverhalten von Flüssigkeiten beschreibt, und verwandte Gleichungen, die zur Modellierung z.B. der Erdatmosphäre verwendet werden.

b) $\mathcal{R}$-sektorielle Operatoren

Wir erinnern an den Begriff des sektoriellen Operators. Im folgenden sei

$$\Sigma_\varphi := \Big\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(z)| < \varphi \Big\}.$$

Mit $\sigma(A)$ bzw. $\rho(A)$ bezeichnen wir das Spektrum bzw. die Resolventenmenge des Operators A.

1.9 Definition. Sei $A\colon D(A) \to X$ ein linearer Operator mit $\overline{D(A)} = X$. Dann heißt A sektoriell, falls ein Winkel $\varphi > 0$ existiert mit $\rho(A) \supset \Sigma_\varphi$ und

$$\sup_{\lambda \in \Sigma_\varphi} \|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{L(X)} < \infty.$$

Falls A ein sektorieller Operator ist, so heißt

$$\varphi_A := \sup\{\varphi : \ \rho(A) \supset \Sigma_\varphi, \ \sup_{\lambda \in \Sigma_\varphi} \|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{L(X)} < \infty\}$$

der spektrale Winkel von A.

Sektorielle Operatoren erzeugen holomorphe Halbgruppen, wenn der Sektorwinkel groß genug ist. Der folgende Satz wird hier nicht bewiesen.

1.10 Satz. *Sei X ein Banachraum, $A : D(A) \to X$ linear. Äquivalent sind:*

(i) *A erzeugt eine beschränkte holomorphe C_0-Halbgruppe T auf X vom Winkel $\vartheta \in (0, \frac{\pi}{2}]$.*

(ii) *A ist sektoriell mit spektralem Winkel $\varphi_A \geq \vartheta + \frac{\pi}{2}$.*

Nach Bemerkung 1.8 erzeugen Operatoren $A \in MR(X)$ holomorphe Halbgruppen, sind also sektoriell mit spektralem Winkel $\varphi > \frac{\pi}{2}$. Die Umkehrung gilt jedoch nicht, d.h. nicht jeder sektorieller Operator besitzt maximale Regularität!

Vor einigen Jahren wurde eine Charakterisierung der Operatoren in $MR(X)$ gefunden. Bevor wir dieses Resultat formulieren können, benötigen wir noch einige Begriffe. Dabei treten einige aus der Analysis bekannte Objekte Banachraum-wertig auf, so z.B. $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n; X)$, der Schwartz-Raum der schnell fallenden X-wertigen Funktionen, oder $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n; X) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n; X)$, die Fouriertransformation auf diesem Raum. Definiert man den Raum der X-wertigen temperierten Distributionen durch

$$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n; X) := L(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}), X),$$

so kann die Fouriertransformation zu einem stetigen Isomorphismus $\mathscr{F} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n; X) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n; X)$ fortgesetzt werden. Die zugehörigen Beweise übertragen sich direkt aus dem skalaren Fall.

1.11 Definition. Sei X ein Banachraum.

a) Die Hilberttransformation $H\colon \mathscr{S}(\mathbb{R};X) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R};X)$ ist definiert durch

$$Hf := \mathscr{F}^{-1} m \mathscr{F} f \quad \text{ mit } m(\xi) := \frac{i\xi}{|\xi|}.$$

b) Der Banachraum X ist von Klasse $\mathcal{HT}$, , falls ein $p \in (1,\infty)$ existiert, so dass die Hilberttransformation H zu einem stetigen linearen Operator $H \in L(L^p(\mathbb{R};X))$ fortgesetzt werden kann.

1.12 Bemerkung. a) Man kann zeigen, dass die Eigenschaft von Teil b) der obigen Definition nicht von der Wahl von p abhängt, d.h. falls die Bedingung aus b) für ein $p \in (1,\infty)$ erfüllt ist, dann auch für alle $p \in (1,\infty)$.

b) Falls X ein Hilbertraum ist, so ist X von Klasse $\mathcal{HT}$. Denn der Satz von Plancherel gilt für Hilberträume, und wegen $m \in L^\infty(\mathbb{R}; L(X))$ gilt somit

$$\mathscr{F}^{-1} m \mathscr{F} \in L(L^2(\mathbb{R};X)) \quad \text{ mit } \|F^{-1} m \mathscr{F}\|_{L(L^2(\mathbb{R};X))} = \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R};L(X))} = 1.$$

c) Falls X von Klasse $\mathcal{HT}$ ist und $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet ist, so ist auch $L^p(G;X)$ von Klasse $\mathcal{HT}$. Insbesondere ist die Hilberttransformation stetig in $L^p(G)$.

d) Es gibt andere Beschreibungen der Klasse $\mathcal{HT}$. Insbesondere ist X genau dann von Klasse $\mathcal{HT}$, falls die Eigenschaft „X ist UMD-Raum“ gilt, wobei UMD für *unconditional martingale differences* steht.

1.13 Definition. Eine Familie $\mathcal{T} \subset L(X,Y)$ heißt $\mathcal{R}$-beschränkt, falls eine Konstante $C > 0$ und ein $p \in [1,\infty)$ so existiert, dass für alle $N \in \mathbb{N}$, $T_j \in \mathcal{T}$, $x_j \in X$ und alle Folgen $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von unabhängigen, identisch verteilten $\{-1,1\}$-wertigen und symmetrischen Zufallsgrößen über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ gilt

$$\Big\| \sum_{j=1}^N \varepsilon_j T_j x_j \Big\|_{L^p(\Omega,Y)} \le C \Big\| \sum_{j=1}^N \varepsilon_j x_j \Big\|_{L^p(\Omega,X)}. \tag{1-4}$$

In diesem Fall heißt $\mathcal{R}(\mathcal{T}) := \inf\{C > 0 : (1\text{-}4) \text{ gilt}\}$ die $\mathcal{R}$-Schranke von $\mathcal{T}$.

1.14 Bemerkung. a) Die obige Formulierung bedeutet für die einzelnen Zufallsgrößen $P(\{\varepsilon_j = 1\}) = P(\{\varepsilon_j = -1\}) = \frac{1}{2}$. Da das Maß $P \circ (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)^{-1}$ diskret ist, kann die Unabhängigkeit durch folgende Bedingung angegeben werden:

$$P(\{\varepsilon_1 = z_1, \ldots, \varepsilon_N = z_N\}) = 2^{-N} \quad \Big(z_1, \ldots, z_N) \in \{-1,1\}^N,\ N \in \mathbb{N}\Big).$$

Eine nicht-stochastische Beschreibung der $\mathcal{R}$-Beschränktheit ist somit gegeben durch die Ungleichung

$$\exists\, C > 0\ \forall\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, T_j \in \mathcal{T}\ \forall\, x_j \in X$$
$$\Big(\sum_{z_1,\dots,z_N=\pm 1} \Big\| \sum_{j=1}^N z_j T_j x_j \Big\|_Y^p \Big)^{1/p} \le C \Big(\sum_{z_1,\dots,z_N=\pm 1} \Big\| \sum_{j=1}^N z_j x_j \Big\|_X^p \Big)^{1/p}. \tag{1-5}$$

Die stochastische Beschreibung ist dennoch manchmal günstig; insbesondere kann man als Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$ wählen, wobei die ε_j dann durch die Rademacher-Funktionen gegeben sind (siehe unten). Es ist nicht klar, woher der Namenszusatz „$\mathcal{R}$“ stammt; möglich sind „Rademacher“, „randomisiert“.

Nach diesen Definitionen können wir die Charakterisierung maximaler Regularität angeben. Der folgende Satz wird hier nicht bewiesen.

1.15 Satz (Weis 2001)**.** *Sei X ein Banachraum der Klasse $\mathcal{HT}$, $1 < p < \infty$, A ein sektorieller Operator mit spektralem Winkel $\varphi_A > \frac{\pi}{2}$. Es gilt genau dann $A \in MR(X)$, falls die Menge*

$$\big\{ \lambda(\lambda - A)^{-1} : \lambda \in \Sigma_\varphi \big\} \subset L(X)$$

für ein $\varphi > \frac{\pi}{2}$ $\mathcal{R}$-beschränkt ist.

In Analogie zum Begriff eines sektoriellen Operators definiert man:

1.16 Definition. Sei $A\colon D(A) \to X$ ein linearer Operator mit $\overline{D(A)} = X$. Dann heißt A $\mathcal{R}$-sektoriell, falls ein Winkel $\varphi > 0$ existiert mit $\rho(A) \supset \Sigma_\varphi$ und

$$\mathcal{R}\big\{ \lambda(\lambda - A)^{-1} : \lambda \in \Sigma_\varphi \big\} < \infty.$$

Der $\mathcal{R}$-Winkel von A ist in diesem Fall das Supremum aller Winkel, für die die obige $\mathcal{R}$-Schranke endlich ist.

2. $\mathcal{R}$-Beschränktheit und Fourier-Multiplikatoren

2.1 Worum geht's? Nachdem im letzten Kapitel der Zusammenhang zwischen maximaler Regularität und $\mathcal{R}$-Beschränktheit diskutiert wurde, geht es jetzt um den Begriff der $\mathcal{R}$-Beschränktheit selbst. Eine gute Beschreibung verwendet die Rademacher-Funktionen als konkretes Beispiel für den stochastischen Zugang. Einige wichtige Prinzipien der $\mathcal{R}$-Beschränktheit werden diskutiert, welche es in den Anwendungen erlauben werden, diese Eigenschaft nachzuweisen.

a) Eigenschaften $\mathcal{R}$-beschränkter Operatorfamilien

2.2 Definition (Rademacher-Funktionen)**.** Die Rademacher-Funktionen $r_n\colon [0,1] \to \{-1,1\}$ sind definiert durch

$$r_n(t) := \operatorname{sign}\sin(2^n\pi t) \quad (t\in[0,1]).$$

Laut Definition ist

$$r_1(t) = \begin{cases} 1, & t\in(0,\frac12),\\ -1, & t\in(\frac12,1).\end{cases}$$

Die Funktion r_2 nimmt den Wert 1 auf den Teilintervallen $(0,\frac14)$ und $(\frac12,\frac34)$ an. Man rechnet sofort nach, dass

$$\int_0^1 r_n(t)r_m(t)dt = \delta_{nm} \quad (n,m\in\mathbb{N})$$

gilt. Außerdem ist

$$\lambda(\{t\in[0,1] : r_{n_1}(t)=z_1,\dots,r_{n_M}(t)=z_M\}) = \frac{1}{2^M} = \prod_{j=1}^M \lambda(\{t\in[0,1] : r_{n_j}(t)=z_j\}).$$

Somit bildet $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger gleichverteilter Zufallsgrößen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $([0,1],\mathscr{B}([0,1]),\lambda)$ wie in Definition 1.13. Man kann sich die Folge $(\varepsilon_j)_j$ in dieser Definition stets als Rademacher-Funktionen vorstellen, da die Aussage dieser Definition nur die Wahrschenlichkeitsverteilung der Zufallsgrößen verwendet. Umgekehrt gelten Aussagen über die Rademacher-Funktionen analog für beliebige Folgen von Zufallsgrößen wie in Definition 1.13.

2.3 Definition. Sei X ein Banachraum und $1\le p<\infty$. Dann ist $\mathrm{Rad}_p(X)$ definiert als der Banachraum aller Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$, für welche

$$\big\|(x_n)_n\big\| := \Big\|\sum_{n=1}^\infty r_nx_n\Big\|_{L^p([0,1];X)}$$

endlich ist.

2.4 Bemerkung. Da die Rademacher-Funktionen unabhängig sind, kann man eine Folge $(x_n)_n$ mit ihrer Summe $\sum_n r_n x_n \in L^p([0,1];X)$ identifizieren. Denn falls $\sum_n r_n x_n = 0$ in $L^p([0,1];X)$ gilt, so folgt $\sum_n r_n f(x_n) = 0$ für alle $f \in X'$. Nimmt man nun das L^2-Skalarprodukt mit r_{n_0} für ein festes n_0, so erhält man aufgrund der Orthogonalität $f(x_{n_0}) = 0$ für alle $f \in X'$ und damit $x_{n_0} = 0$. Die Abbildung $\operatorname{Rad}_p(X) \to L^p([0,1];X)$, $(x_n)_n \mapsto \sum_{n=1}^\infty r_n x_n$ ist somit injektiv, und $\operatorname{Rad}_p(X)$ kann als Teilraum von $L^p([0,1];X)$ aufgefasst werden.

2.5 Satz (Ungleichung von Kahane)**.** *Die Räume* $\operatorname{Rad}_p(X)$ *sind isomorph für* $1 \leq p < \infty$*, d.h. es existieren Konstanten* $C_p > 0$ *mit*

$$\frac{1}{C_p}\Big\|\sum_{n=1}^\infty r_n x_n\Big\|_{L^2([0,1];X)} \leq \Big\|\sum_{n=1}^\infty r_n x_n\Big\|_{L^p([0,1];X)} \leq C_p\Big\|\sum_{n=1}^\infty r_n x_n\Big\|_{L^2([0,1];X)}.$$

Der Beweis dieser Ungleichung ist im skalaren Fall $X = \mathbb{C}$ elementar, für beliebige Banachräume X jedoch recht kompliziert und wird hier weggelassen. Im skalaren Fall spricht man von der Ungleichung von Khinchine.

2.6 Lemma (Kontraktionsprinzip von Kahane)**.** *Sei* $1 \leq p < \infty$*. Dann gilt für alle* $N \in \mathbb{N}$*, für alle* $x_j \in X$ *und alle* $a_j, b_j \in \mathbb{C}$ *mit* $|a_j| \leq |b_j|$*,* $j = 1, \ldots, N$

$$\Big\|\sum_{j=1}^N a_j r_j x_j\Big\|_{L^p([0,1];X)} \leq 2\Big\|\sum_{j=1}^N b_j r_j x_j\Big\|_{L^p([0,1];X)}. \tag{2-1}$$

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $b_j = 1$ und $|a_j| \leq 1$ für alle $j = 1, \ldots, N$ annehmen. Dies liegt daran, dass mit x_n auch $b_j x_j$ im Banachraum X liegt und somit nach dem Übergang von x_j zu $b_j x_j$ der zu betrachtende Fall vorliegt. Betrachtet man weiter $\operatorname{Re} a_j$ und $\operatorname{Im} a_j$ getrennt, so bleibt also noch für $a_j \in \mathbb{R}$ mit $|a_j| \leq 1$ die Ungleichung

$$\Big\|\sum_{j=1}^N a_j r_j x_j\Big\|_{L^p([0,1];X)} \leq \cdot \Big\|\sum_{j=1}^N b_j r_j x_j\Big\|_{L^p([0,1];X)} \tag{2-2}$$

zu zeigen. Dazu sei $\{e^{(k)}\}_{k=1,\ldots,2^N}$ eine Durchnummerierung der Ecken des Würfels $[-1,1]^N$. Wegen $a := (a_1, \ldots, a_N)^T \in [-1,1]^N$ lässt sich a als Konvexkombination der $e^{(k)}$ darstellen, d.h. es existieren $\lambda_k \in [0,1]$ mit

$$\sum_{k=1}^{2^N} \lambda_k = 1 \quad \text{und} \quad a = \sum_{k=1}^{2^N} \lambda_k e^{(k)}.$$

Damit gilt für $e^{(k)} = (e_1^{(k)}, \ldots, e_N^{(k)})^T$

$$\begin{aligned}\Big\| \sum_{j=1}^N a_j r_j x_j \Big\|_{L^p([0,1];X)} &\le \sum_{k=1}^{2^N} \lambda_k \Big\| \sum_{j=1}^N r_j e_j^{(k)} x_j \Big\|_{L^p([0,1];X)} \\ &\le \max_{1\le k\le 2^N} \Big\| \sum_{j=1}^N r_j e_j^{(k)} x_j \Big\|_{L^p([0,1];X)} = \Big\| \sum_{j=1}^N r_j x_j \Big\|_{L^p([0,1];X)}.\end{aligned}$$

Dabei wird für die letzte Gleichheit verwendet, dass $\{r_j : j = 1, ..., N\}$ und $\{r_j e_j^{(k)} : j = 1, ..., N\}$ die gleiche gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung besitzen. □

2.7 Lemma. *a) Falls die Bedingung (1-4) in der Definition 1.13 für ein $p \in [1,\infty)$ gilt, so für alle $p \in [1,\infty)$. Für die zugehörigen $\mathcal{R}$-Schranken $\mathcal{R}_p(\mathcal{T})$ gilt*

$$\frac{1}{C_p^2}\mathcal{R}_2(\mathcal{T}) \le \mathcal{R}_p(\mathcal{T}) \le C_p^2 \mathcal{R}_2(\mathcal{T})$$

mit den Konstanten C_p aus Satz 2.5.

b) Eine Menge $\mathcal{T} \subset L(X,Y)$ ist genau dann $\mathcal{R}$-beschränkt mit $\mathcal{R}_2(\mathcal{T}) \le C$, wenn für alle $N \in \mathbb{N}$ und alle $T_1, \ldots, T_N \in \mathcal{T}$ durch

$$\mathbf{T}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (y_n)_{n\in\mathbb{N}},\ y_n := \begin{cases} T_n x_n, & n \le N, \\ 0, & n > N \end{cases}$$

ein beschränkter Operator $\mathbf{T} \in L(\mathrm{Rad}_2(X))$ mit Norm $\|\mathbf{T}\| \le C$ definiert wird.

Beweis. Teil a) folgt direkt aus der Ungleichung von Kahane, Teil b) ist eine Umformulierung der $\mathcal{R}$-Beschränktheit und eine Anwendung der p-Unabhängigkeit aus Teil a). □

2.8 Bemerkung. a) Falls $\mathcal{T} \subset L(X,Y)$ $\mathcal{R}$-beschränkt ist, so ist $\mathcal{T}$ gleichmäßig beschränkt mit $\sup_{T\in\mathcal{T}} \|T\| \le \mathcal{R}(\mathcal{T})$. Dies folgt direkt aus der Definition der $\mathcal{R}$-Beschränktheit mit $N = 1$.

b) Falls X und Y Hilberträume sind, so ist $\mathcal{R}$-Beschränktheit äquivalent zur gleichmäßigen Beschränktheit. Denn in diesem Fall sind auch $L^2([0,1];X)$ bzw. $L^2([0,1];Y)$ Hilberträume, und $(r_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2([0,1];X)$ und $(r_n T_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2([0,1];Y)$ sind orthogonale Folgen. Falls $\|T\| \le C_{\mathcal{T}}$ für alle $T \in \mathcal{T} \subset L(X,Y)$ gilt, so folgt

$$\Big\| \sum_{n=1}^N r_n T_n x_n \Big\|^2_{L^2[0,1];Y)} = \sum_{n=1}^N \|r_n T_n x_n\|^2_{L^2([0,1];Y)}$$

$$\begin{aligned}&= \sum_{n=1}^N \|T_n x_n\|_Y^2 \le C_{\mathcal{T}}^2 \sum_{n=1}^N \|x_n\|_X^2\\ &= C_{\mathcal{T}}^2 \Big\| \sum_{n=1}^N r_n x_n \Big\|_{L^2([0,1];X)}^2.\end{aligned}$$

2.9 Bemerkung. Seien X, Y, Z Banachräume und $\mathcal{T}, \mathcal{S} \subset L(X,Y)$ und $\mathcal{U} \subset L(Y,Z)$ $\mathcal{R}$-beschränkt. Dann sind auch

$$\mathcal{T} + \mathcal{S} := \{T + S : T \in \mathcal{T},\, S \in \mathcal{S}\}$$

und

$$\mathcal{U}\mathcal{T} := \{UT : U \in \mathcal{U},\, T \in \mathcal{T}\}$$

$\mathcal{R}$-beschränkt mit

$$\mathcal{R}\{\mathcal{T} + \mathcal{S}\} \le \mathcal{R}(\mathcal{T}) + \mathcal{R}(\mathcal{S}),\ \mathcal{R}(\mathcal{U}\mathcal{T}) \le \mathcal{R}(\mathcal{U})\mathcal{R}(\mathcal{T}).$$

Denn seien $S_n \in \mathcal{S}$, $T_n \in \mathcal{T}$ und $U_n \in \mathcal{U}$ für $n = 1, \dots, N$. Dann folgt die Behauptung aus

$$\Big\| \sum_{n=1}^N r_n (T_n + S_n) x_n \Big\|_{L^1([0,1];Y)} \le \Big\| \sum_{n=1}^N r_n T_n x_n \Big\|_{L^1([0,1];Y)} + \Big\| \sum_{n=1}^N r_n S_n x_n \Big\|_{L^1([0,1];Y)}$$

und

$$\Big\| \sum_{n=1}^N r_n U_n T_n x_n \Big\|_{L^1([0,1];Z)} \le \mathcal{R}(\mathcal{U}) \Big\| \sum_{n=1}^N r_n T_n x_n \Big\|_{L^1([0,1];Y)}.$$

2.10 Lemma (Square function estimate)**.** *Sei $(G, \mathscr{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, $X = L^q(\mu)$, und sei $1 \le q < \infty$. Dann ist $\mathcal{T} \subset L(X)$ genau dann $\mathcal{R}$-beschränkt, falls ein $M > 0$ existiert mit*

$$\Big\| \Big(\sum_{j=1}^N |T_n f_n|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^q(\mu)} \le M \Big\| \Big(\sum_{j=1}^N |f_n|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^q(\mu)}$$

für alle $N \in \mathbb{N}$, $T_n \in \mathcal{T}$ und $f_n \in L^q(\mu)$.

Beweis. Wir schreiben $f \approx g$, falls es Konstanten $C_1, C_2 > 0$ gibt mit $C_1|f| \le |g| \le C_2|f|$. Um die $\mathcal{R}$-Beschränktheit nachzurechnen, können wir nach der Ungleichung von Kahane die $\mathcal{R}$-Schranke $\mathcal{R}_q$ betrachten. Man berechnet

$$\Big\| \sum_{n=1}^N r_n f_n \Big\|_{L^q([0,1];L^q(\mu))}^q = \int_0^1 \Big\| \sum_{n=1}^N r_n(t) f_n(\cdot) \Big\|_{L^q(G;\mu)}^q dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_G \Big| \sum_{n=1}^N r_n(t) f_n(\omega) \Big|^q d\mu(\omega)\, dt \\
&= \int_G \int_0^1 \Big| \sum_{n=1}^N r_n(t) f_n(\omega) \Big|^q dt d\mu(\omega) \\
&\approx \int_G \Big(\int_0^1 \Big| \sum_{n=1}^N r_n(t) f_n(\omega) \Big|^2 dt \Big)^{q/2} d\mu(\omega) \\
&= \int_G \Big(\sum_{n=1}^N |f_n(\omega)|^2 \Big)^{q/2} d\mu(\omega) \\
&= \Big\| \Big(\sum_{n=1}^N |f_n|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^q(\mu)}^q .
\end{aligned}$$

Dabei wurden der Satz von Fubini und die Khinchine-Ungleichung verwendet. Auf beide Seiten der Definition der $\mathcal{R}$-Beschränktheit angewendet, erhalten wir die Behauptung. □

2.11 Beispiel. Die Familie $\{T_n : n \in \mathbb{N}_0\} \subset L(L^p(\mathbb{R}))$, $T_n f(\cdot) := f(\cdot - n)$ von Translationen ist für $p \in [1, \infty) \setminus \{2\}$ nicht $\mathcal{R}$-beschränkt. Denn für $f_n = \chi_{[0,1]}$ gilt

$$\begin{aligned}
\Big\| \Big(\sum_{n=0}^{N-1} |T_n f_n|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p(\mathbb{R})} &= \|\chi_{[0,N]}\|_{L^p(\mathbb{R})} = N^{1/p}, \\
\Big\| \Big(\sum_{n=0}^{N-1} |f_n|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p(\mathbb{R})} &= N^{1/2} \|\chi_{[0,1]}\|_{L^p(\mathbb{R})} = N^{1/2},
\end{aligned}$$

und für $1 \le p < 2$ gilt $\frac{N^{1/p}}{N^{1/2}} \to \infty$ für $N \to \infty$. Ähnlich geht der Beweis für $p > 2$.

2.12 Lemma. *a) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \le p < \infty$. Zu $\varphi \in L^\infty(G)$ definiere $m_\varphi \in L(L^p(G; X))$ durch $(m_\varphi f)(x) := \varphi(x) f(x)$. Dann gilt für $r > 0$*

$$\mathcal{R}_p\Big(\{ m_\varphi : \varphi \in L^\infty(G),\ \|\varphi\|_\infty \le r \} \Big) \le 2r.$$

b) Sei $1 \le p < \infty$, $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathcal{T} \subset L(L^p(G; X), L^p(G; Y))$ $\mathcal{R}$-beschränkt mit $\mathcal{R}$-Schranke τ. Dann gilt

$$\mathcal{R}_p\Big(\{ m_\varphi T m_\psi : T \in \mathcal{T},\ \varphi, \psi \in L^\infty(G), \|\varphi\|_\infty \le r,\ \|\psi\|_\infty \le s \} \Big) \le 4rs\tau.$$

Beweis. a) Nach dem Satz von Fubini und dem Kontraktionsprinzip gilt

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{k=1}^N r_k m_{\varphi_k} f_k\Big\|_{L^p([0,1];L^p(G;X))} &= \Big\|\sum_{k=1}^N r_k \varphi_k f_k\Big\|_{L^p(G;L^p([0,1];X))}\\ &\le 2r\Big\|\sum_{k=1}^N r_k f_k\Big\|_{L^p(G;L^p([0,1];X))}\\ &= 2r\Big\|\sum_{k=1}^N r_k f_k\Big\|_{L^p([0,1];L^p(G;X))}.\end{aligned}$$

b) folgt aus a) und Bemerkung 2.9. □

2.13 Satz. *Sei $\mathcal{T}\subset L(X,Y)$ $\mathcal{R}$-beschränkt. Dann sind auch die konvexe Hülle*

$$\operatorname{co}\mathcal{T} := \Big\{\sum_{k=1}^n \lambda_k T_k : n\in\mathbb{N},\, T_k\in\mathcal{T},\, \lambda_k\in[0,1],\, \sum_{k=1}^n\lambda_k = 1\Big\}$$

und die absolutkonvexe Hülle

$$\operatorname{aco}\mathcal{T} := \Big\{\sum_{k=1}^n \lambda_k T_k : n\in\mathbb{N},\, T_k\in\mathcal{T},\, \lambda_k\in\mathbb{C},\, \sum_{k=1}^n|\lambda_k| = 1\Big\}$$

und der Abschluss von $\operatorname{co}\mathcal{T}$ und $\operatorname{aco}\mathcal{T}$ in der starken Operatortopologie $\mathcal{R}$-beschränkt mit $\mathcal{R}(\overline{\operatorname{co}\mathcal{T}}^s)\le\mathcal{R}(\mathcal{T})$ und $\mathcal{R}(\overline{\operatorname{aco}\mathcal{R}}^s)\le 2\mathcal{R}(\mathcal{T})$.

Beweis. a) Seien $T_1,\dots,T_N\in\operatorname{co}(\mathcal{T})$. Dann existieren $\lambda_{k,j_k}\in[0,1]$, $j_k=1,\dots,m_k$, $T_{k,j_k}\in\mathcal{T}$ mit $\sum_{j_k=1}^{m_k}\lambda_{k,j_k}=1$ und $T_k=\sum_{j_k=1}^{m_k}\lambda_{k,j_k}T_{k,j_k}$.

Setze $\lambda_{k,j_k}:=0$ für $j_k>m_k$ und $l:=(j_1,\dots,j_N)$, $T_{kl}:=T_{k,j_k}$ $(k=1,\dots,N,\, l\in\mathbb{N})$ und $\lambda_l:=\lambda_{k,j_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_{k,j_N}$ für $l\in\mathbb{N}^n$. Dann ist

$$T_k=\sum_{l\in\mathbb{N}^n}\lambda_l T_{kl}\quad (k=1,\dots,N),$$

wobei $\lambda_l\in[0,1]$ und $\sum_{l\in\mathbb{N}^n}\lambda_l=1$. Beachte, dass es sich hierbei um endliche Summen handelt. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{k=1}^N r_k T_k x_k\Big\|_{L^p([0,1];Y)} &\le \sum_{l\in\mathbb{N}^n}\lambda_l\Big\|\sum_{k=1}^N r_k T_{kl} x_k\Big\|_{L^p([0,1];Y)}\\ &\le \mathcal{R}(\mathcal{T})\sum_{l\in\mathbb{N}^n}\lambda_l\Big\|\sum_{k=1}^N r_k x_k\Big\|_{L^p([0,1];X)}\end{aligned}$$

$$= \mathcal{R}(\mathcal{T}) \Big\| \sum_{k=1}^{N} r_k x_k \Big\|_{L^p([0,1];X)}.$$

Also gilt $\mathcal{R}(\operatorname{co}\mathcal{T}) \le \mathcal{R}(\mathcal{T})$.

b) Nach dem Kontraktionsprinzip gilt $\mathcal{R}(\mathcal{T}_0) \le 2\mathcal{R}(\mathcal{T})$ für

$$\mathcal{T}_0 := \{\lambda T : T \in \mathcal{T},\, \lambda \in \mathbb{C},\, |\lambda| \le 1\}.$$

Wegen $\operatorname{co}\mathcal{T}_0 = \operatorname{aco}\mathcal{T}$ folgt $\mathcal{R}(\operatorname{aco}\mathcal{T}) \le 2\mathcal{R}(\mathcal{T})$ nach a).

c) Direkt aus der Definition der $\mathcal{R}$-Beschränktheit folgt die Absgeschlossenheit unter der starken Operatortopologie. □

2.14 Korollar. *Sei $(G, \mathscr{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $\mathcal{T} \subset L(X,Y)$ $\mathcal{R}$-beschränkt. Sei*

$$\mathcal{N} := \{N\colon G \to L(X,Y) \,|\, N \text{ stark messbar mit } N(G) \subset \mathcal{T}\}.$$

Zu $h \in L^1(G,\mu)$ und $N \in \mathcal{N}$ definiere

$$T_{N,h}x := \int_G h(\omega)N(\omega)x d\mu(\omega) \quad (x \in X).$$

Dann ist

$$\mathcal{R}\{T_{N,h} : \|h\|_{L^1(G,\mu)} \le 1,\ N \in \mathcal{N}\} \le 2\mathcal{R}(\mathcal{T}).$$

Beweis. Zu $x_1, \dots, x_N \in X$, $h \in L^1(G,\mu)$ und $N \in \mathcal{N}$ definiere die messbare Abbildung

$$M\colon G \to X^N,\ M(\omega) := \big(N(\omega)x_j\big)_{j=1,\dots,N}.$$

Dann existiert eine messbare Partition $G = \sum_{j=1}^\infty G_j$ und $\omega_j \in G_j$ mit

$$\|N(\omega)x_k - N(\omega_j)x_k\|_Y < \varepsilon \quad \text{für fast alle } \omega \in G_j \text{ und alle } k = 1, \dots, N.$$

Setze

$$S := \sum_{j=1}^\infty \Big(\int_{G_j} h(\omega) d\mu(\omega)\Big) N(\omega_j).$$

Dann gilt $\|T_{N,h}x_k - Sx_k\|_Y < \varepsilon$ für alle $k = 1, \dots, N$. Somit liegt $T_{N,h}$ in der durch $x_1, \dots, x_N$ und ε gegebenen Umgebung von S bezüglich der starken Operatortopologie. Wegen $S \in \overline{\operatorname{aco}\mathcal{T}}^s$ folgt $T_{N,h} \in \overline{\operatorname{aco}\mathcal{T}}^s$, und die Behauptung ergibt sich aus Satz 2.13. □

2.15 Korollar. *Sei $N\colon \Sigma_{\theta'} \to L(X,Y)$ holomorph, und $N(\partial\Sigma_\theta \setminus \{0\})$ $\mathcal{R}$-beschränkt für ein $\theta < \theta'$. Dann ist $N(\Sigma_\theta)$ $\mathcal{R}$-beschränkt, und für jedes $\theta_1 < \theta$ ist $\{\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}N(\lambda) : \lambda \in \Sigma_{\theta_1}\}$ $\mathcal{R}$-beschränkt.*

Beweis. Durch Betrachten von $M(\lambda) := N(\lambda^{2\theta/\pi})$ können wir $\theta = \frac{\pi}{2}$ annehmen. Nach der Poissonschen Formel gilt

$$N(\alpha + i\beta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + (s-\beta)^2} N(is)ds \quad (\alpha > 0).$$

Wegen $\|\frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+(\cdot-\beta)^2}\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1$ folgt die erste Behauptung aus Korollar 2.14.

Nach der Cauchyschen Integralformel gilt

$$\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}N(\lambda) = \int_{\partial\Sigma_\theta} h_\lambda(\mu)N(\mu)d\mu \quad (\lambda \in \Sigma_{\theta_1})$$

für $h(\lambda) := \frac{1}{2\pi i}\frac{\lambda}{(\mu-\lambda)^2}$. Wegen $\sup_{\lambda\in\Sigma_{\theta_1}} \|h_\lambda\|_{L^1(\partial\Sigma_\theta)} < \infty$ folgt die zweiten Behauptung ebenfalls aus Korollar 2.14. □

2.16 Lemma. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $K \subset G$ kompakt und $H\colon G \to L(X,Y)$ holomorph. Dann ist $H(K)$ $\mathcal{R}$-beschränkt.*

Beweis. Sei $z_0 \in K$. Dann existiert ein $r > 0$ mit

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} H^{(k)}(z_0)\frac{(z-z_0)^k}{k!} \quad (|z - z_0| \le r),$$

wobei die Reihe absolut konvergiert und

$$\rho_0 := \sum_{k=0}^{\infty} \|H^{(k)}(z_0)\|_{L(X,Y)}\frac{r^k}{k!} < \infty.$$

Nach Satz 2.13 folgt $\mathcal{R}(H(B(z_0,r)) \le 2\rho_0$. Durch Überdeckung von K durch endlich viele Kugeln erhält man die Behauptung. □

2.17 Satz. *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 < p < \infty$. Sei Λ eine Menge und $\{k_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ eine Familie von messbaren Kernen $k_\lambda\colon G \times G \to L(X,Y)$ mit*

$$\mathcal{R}_p\big\{k_\lambda(z,z') : \lambda \in \Lambda\big\} \le k_0(z,z') \quad (z, z' \in G).$$

Für den zugehörigen skalaren Integraloperatoren

$$(K_0 f)(z) = \int_G k_0(z,z')f(z')dz' \quad (f \in L^p(G))$$

gelte $K_0 \in L(L^p(G))$. *Definiere*

$$(K_\lambda f)(z) = \int_G k_\lambda(z,z')f(z')dz' \quad (f \in L^p(G;X)).$$

Dann gilt $K_\lambda \in L(L^p(G;X), L^p(G;Y))$ *mit*

$$\mathcal{R}_p\big(\{K_\lambda : \lambda \in \Lambda\}\big) \le \|K_0\|_{L(L^p(G))}.$$

Beweis. Wir setzen direkt in die Definition der $\mathcal{R}$-Beschränktheit ein und erhalten

$$\begin{aligned}
&\Big\| \sum_{j=1}^N r_j K_{\lambda_j} f_j \Big\|_{L^p([0,1];L^p(G;Y))} \\
&\quad = \Big(\int_0^1 \Big\| \sum_{j=1}^N r_j(t) \int_G k_{\lambda_j}(\cdot, z')f_j(z')dz' \Big\|^p_{L^p(G;Y)} dt \Big)^{1/p} \\
&\quad = \Big(\int_0^1 \Big\| \int_G \sum_{j=1}^N r_j(t) k_{\lambda_j}(\cdot, z')f_j(z')dz' \Big\|^p_{L^p(G;Y)} dt \Big)^{1/p} \\
&\quad = \Big(\int_0^1 \int_G \Big\| \int_G \sum_{j=1}^N r_j(t) k_{\lambda_j}(z, z')f_j(z')dz' \Big\|^p_Y dz\, dt \Big)^{1/p} \\
&\quad = \Big(\int_G \int_0^1 \Big\| \int_G \sum_{j=1}^N r_j(t) k_{\lambda_j}(z, z')f_j(z')dz' \Big\|^p_Y dt\, dz \Big)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Definiert man $\varphi(t,z,z') := \sum_{j=1}^N r_j(t)k_{\lambda_j}(z,z')f_j(z')$, so ist das Integral über t im letzten Ausdruck gerade $\| \int_G \varphi(\cdot,z,z')dz'\|^p_{L^p([0,1])}$. Wir verwenden nun die Abschätzung

$$\Big\| \int_G \varphi(\cdot,z,z')dz' \Big\|_{L^p([0,1])} \le \int_G \|\varphi(\cdot,z,z')\|_{L^p([0,1])} dz'$$

für Bochner-Integrale und erhalten unter Verwendung der Voraussetzung der $\mathcal{R}$-Beschränktheit

$$\begin{aligned}
&\Big\| \sum_{j=1}^N r_j K_{\lambda_j} f_j \Big\|_{L^p([0,1];L^p(G;Y))} \\
&\quad \le \Big(\int_G \Big[\int_G \Big\| \sum_{j=1}^N r_j(\cdot) k_{\lambda_j}(z,z')f_j(z') \Big\|_{L^p([0,1];Y)} dz' \Big]^p dz \Big)^{1/p} \\
&\quad \le \Big(\int_G \Big[\int_G k_0(z,z') \Big\| \sum_{j=1}^N r_j(\cdot) f_j(z') \Big\|_{L^p([0,1];X)} dz' \Big]^p dz \Big)^{1/p}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big\| K_0 \Big(\Big\| \sum_{j=1}^N r_j f_j(\cdot) \Big\|_{L^p([0,1];X)} \Big) \Big\|_{L^p(G)} \\
&\le \|K_0\|_{L(L^p(G))} \Big\| \Big(\Big\| \sum_{j=1}^N r_j f_j(\cdot) \Big\|_{L^p([0,1];X)} \Big) \Big\|_{L^p(G)} \\
&= \|K_0\|_{L(L^p(G))} \Big\| \sum_{j=1}^N r_j f_j \Big\|_{L^p([0,1];L^p(G;X))}
\end{aligned}
$$

□

Wir wissen nach dem Satz von Weis, dass ein sektorieller Operator A genau dann maximale Regularität besitzt, falls er $\mathcal{R}$-sektoriell mit $\mathcal{R}$-Winkel größer als $\frac{\pi}{2}$ ist. Die obigen Aussagen über $\mathcal{R}$-Beschränktheit erlauben es eine Reihe dazu äquivalenter Aussagen zu formulieren.

2.18 Satz. *Sei A der Erzeuger einer beschränkten holomorphen Halbgruppe T. Dann sind äquivalent:*

(i) *A ist $\mathcal{R}$-sektoriell mit $\mathcal{R}$-Winkel $\varphi_{\mathcal{R}} = \frac{\pi}{2} + \delta$, $\delta > 0$.*

(ii) *Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\{t^n(it - A)^{-n} : t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ $\mathcal{R}$-beschränkt ist.*

(iii) *Die Familie $\{T_z : z \in \Sigma_\delta\}$ ist $\mathcal{R}$-beschränkt.*

(iv) *Die Familie $\{T_t, tAT_t : t > 0\}$ ist $\mathcal{R}$-beschränkt.*

Zum Beweis. (i)$\Longrightarrow$(ii) ist klar.

(ii)$\Longrightarrow$(i). Schreibe

$$(it - A)^{-n+1} = (n-1)i \int_t^\infty (is - A)^{-n} ds$$

und damit

$$(it)^{n-1}(it - A)^{-n+1} = \int_0^\infty h_t(s) \big[(is)^n (is - A)^{-n}\big] ds$$

für die Funktion $h_t(s) := (n-1)t^{n-1}s^{-n}\chi_{[t,\infty)}$. Es gilt $\int_0^\infty h_t(s)ds = 1$, und nach Korollar 2.14 folgt die Aussage (ii) für $n-1$ anstelle von n. Iterativ erhält man, dass (ii) für $n = 1$ gilt. Verwende nun Korollar 2.15, um die $\mathcal{R}$-Beschränktheit von $\{\lambda(\lambda - A)^{-1} : \lambda \in \Sigma_{\pi/2}\}$ zu zeigen. Durch Reihenentwicklung (ähnlich wie beim Beweis der Analyzität einer Halbgruppe) kann man zeigen, dass $\lambda(\lambda - A)^{-1}$ sogar auf einem größeren Sektor $\mathcal{R}$-beschränkt ist.

(iii)$\Longrightarrow$(i). Dies folgt ebenfalls aus Korollar 2.14 und der Darstellung

$$(\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t dt.$$

(i)$\Longrightarrow$(iii) folgt analog aus

$$T_z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_t} e^{\lambda z} (\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

(iii)$\Longleftrightarrow$(iv) kann man unter Verwendung von Korollar 2.15 zeigen. □

b) Fouriermultiplikatoren und der Satz von Mikhlin

Im folgenden sei stets $D := -i(\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n})$. Mit C, C_1, C_2 bezeichnen wir generische Konstanten, d.h. Konstanten, welche bei jedem Auftreten einen anderen Wert besitzen können, aber nicht von den in der Gleichung auftretenden Größen abhängt.

2.19 Bemerkung. Wir betrachten den Laplace-Operator im $L^p(\mathbb{R}^n)$ mit maximalem Definitionsbereich $D(\Delta) := \{u \in L^p(\mathbb{R}^n) : \Delta u \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$. Offensichtlich ist $D(\Delta) \supset W_p^2(\mathbb{R}^n)$. Wir wollen zeigen, dass tatsächlich Gleichheit gilt. Sei dazu $u \in D(\Delta)$ und $f := u - \Delta u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Sei $|\alpha| \le 2$. Dann gilt

$$D^\alpha u = \mathscr{F}^{-1} \xi^\alpha \mathscr{F} u = -\mathscr{F}^{-1} \frac{\xi^\alpha}{1 + |\xi|^2} \mathscr{F} f$$

als Gleichheit in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Um $D^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ zu zeigen, muss also $\mathscr{F}^{-1} m_\alpha(\xi) \mathscr{F} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ gelten, wobei $m_\alpha(\xi) := \frac{\xi^\alpha}{1+|\xi|^2}$. Die Frage lautet also: Wird durch

$$f \mapsto \mathscr{F}^{-1} m_\alpha(\xi) \mathscr{F} f$$

ein stetiger linearer Operator auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ definiert? Die (positive) Antwort liefert der Satz von Mikhlin, der eine Aussage über Fourier-Multiplikatoren trifft.

2.20 Definition (Fourier-Multiplikator)**.** Seien X, Y Banachräume, $1 \le p \le \infty$ und sei $m\colon \mathbb{R}^n \to L(X, Y)$ eine beschränkte messbare Funktion. Wegen $\mathscr{F}^{-1} \in L(L^1(\mathbb{R}^n; X), L^\infty(\mathbb{R}^n; Y))$ induziert m eine Abbildung $T_m\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n; X) \to L^\infty(\mathbb{R}^n; Y)$ durch

$$T_m f := \mathscr{F}^{-1} m \mathscr{F} f \quad (f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n; X)).$$

Die Funktion m heißt Fourier-Multiplikator, falls

$$\|T_m f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;Y)} \le C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;X)} \quad (f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n; X)),$$

d.h. falls T_m eindeutig zu einem stetigen Operator $T_m \in L(L^p(\mathbb{R}^n; X), L^p(\mathbb{R}^n; Y))$ fortgesetzt werden kann. Die Funktion m heißt in diesem Fall das Symbol des Operators M. Wir schreiben $\mathrm{op}(m) := \mathscr{F} m \mathscr{F}^{-1}$ und $\mathrm{symb}(M) := m$.

Wir betrachten zunächst den skalaren Fall $X = Y = \mathbb{C}$.

2.21 Bemerkung. Für $p = 2$ gilt nach dem Satz von Plancherel genau dann $\operatorname{op}(m) \in L(L^2(\mathbb{R}^n))$, falls der Multiplikationsoperator $g \mapsto mg$ stetig in $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt. Denn falls $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, so folgt $\|mg\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Falls andererseits $m \notin L^\infty(\mathbb{R}^n)$, so existiert eine Folge messbarer Mengen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $0 \le c_k \to \infty$, mit $0 < \lambda(A_k) < \infty$ und $|m| \ge c_k$ auf A_n. Für $g_k := \chi_{A_k}$ gilt dann $g_k \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|mg_k\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int |m(\xi)g_k(\xi)|^2 d\xi \ge c_k^2 \lambda(A_k) = c_k^2 \|g_k\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

d.h. $\operatorname{op}(m)$ ist kein beschränkter Operator in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Der folgende Satz ist fundamental für die L^p-Theorie von Differentialoperatoren. Der Beweis ist für diese Vorlesung zu aufwändig. Hier bezeichnet $[\frac{n}{2}]$ die größte ganze Zahl kleiner gleich $\frac{n}{2}$. Wir geben den Satz in zwei Varianten an.

2.22 Satz (Mikhlin). *Sei $1 < p < \infty$ und $m\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Falls eine der beiden Bedingungen*

(i) $m \in C^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ *und*

$$|\xi|^{|\beta|} |D^\beta m(\xi)| \le C_M \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ |\beta| \le [\tfrac{n}{2}] + 1),$$

(ii) $m \in C^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ *und*

$$\big|\xi^\beta D^\beta m(\xi)\big| \le C_M \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \beta \in \{0,1\}^n)$$

mit einer Konstanten $C_M > 0$ gilt, so ist m ein L^p-Fouriermultiplikator mit

$$\|\operatorname{op}(m)\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n))} \le c(n,p) C_M,$$

wobei die Konstante $c(n,p)$ nur von n und p abhängt.

2.23 Bemerkung. a) Die Bedingung (i) in obigem Satz wird häufig als die Mikhlin-Bedingung (aus dem Jahr 1957) bezeichnet, während Bedingung (ii) auf Lizorkin (1963) zurückgeht.

b) Sei die Funktion $m\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ homogen in ξ vom Grad $d \in \mathbb{R}$, d.h. es gelte

$$m(r\xi) = \rho^d m(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \rho > 0).$$

Falls $m \in C^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, so ist $D^\beta m(\xi)$ homogen in ξ vom Grad $d - |\beta|$ für alle $|\beta| \le k$.

Denn z.B. für $\beta = (1, 0, \dots, 0)$ gilt

$$(\partial_{\xi_1} m)(\rho\xi) = \lim_{h\to 0} \frac{m(\rho\xi + he_1) - m(\rho\xi)}{h} = \lim_{h\to 0} \rho^d \,\frac{m(\xi + \frac{h}{\rho} e_1) - m(\xi)}{\rho \frac{h}{\rho}}$$

$$= \rho^{d-1}\partial_{\xi_1} m(\xi).$$

Für beliebige β folgt die Aussage dann iterativ.

c) Sei $m \in C^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ homogen vom Grad 0. Dann erfüllt m die Mikhlin-Bedingung. Denn für $|\beta| \le [\frac{n}{2}] + 1$ ist $m_\beta(\xi) := |\xi|^{|\beta|} D_\beta m(\xi)$ homogen vom Grad 0 nach Teil a). Damit folgt

$$|m_\beta(\xi)| = \Big|m_\beta\Big(\frac{\xi}{|\xi|}\Big)\Big| \le \max_{|\eta|=1} |m_\beta(\eta)| < \infty \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Als erste Anwendung des Satzes von Mikhlin wird die Frage aus Bemerkung 2.19 beantwortet.

2.24 Korollar. *Sei $1 < p < \infty$. Dann gilt $\{u \in L^p(\mathbb{R}^n) : \Delta u \in L^p(\mathbb{R}^n)\} = W_p^2(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Betrachte wie in Bemerkung 2.19 die Funktion $m_\alpha(\xi) := \frac{\xi^\alpha}{1+|\xi|^2}$ für $|\alpha| \le 2$. Sei $\beta \in \mathbb{N}_0^n$. Für $|\xi| \le 1$ ist $D^\beta m_\alpha$ als stetige Funktion beschränkt, für $|\xi| \ge 1$ können wir bei Berechnung von $D^\beta m_\alpha$ den Nenner $1 + |\xi|^2$ durch $|\xi|^2$ abschätzen und erhalten eine homogene Funktion vom Grad $-|\beta|$, welche auf $|\xi| \ge 1$ ebenfalls beschränkt ist. Somit erfüllt m_α die Mikhlin-Bedingung. □

Während der Satz von Mikhlin für den skalaren Fall hinreichende Kriterien für Fourier-Multiplikatoren angibt, ist für allgemeine Banachräume X, Y keines der beiden Kriterien hinreichend. Falls X und Y von Klasse $\mathcal{HT}$ sind, so gilt jedoch das Analogon des Mikhlinschen Satzes, wenn man die Normbeschränktheit durch die $\mathcal{R}$-Beschränktheit ersetzt, wie der folgende Satz zeigt. Die Aussage dieses Satzes mit $n = 1$ ist auch die wesentliche Beweiszutat des Satzes von Weis über maximale Regularität.

2.25 Satz. *Seien X, Y Banachräume von Klasse $\mathcal{HT}$, und sei $1 < p < \infty$. Sei $m \in C^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; L(X, Y))$ mit*

$$\mathcal{R}\Big(\big\{|\xi|^{|\alpha|} D^\alpha m(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \alpha \in \{0,1\}^n\big\}\Big) =: \kappa < \infty.$$

Dann ist m ein vektorwertiger Fourier-Multiplikator mit

$$\|T\|_{L(L^p(\mathbb{R}^n;X), L^p(\mathbb{R}^n;Y))} \le C\kappa,$$

wobei die Konstante C nur von n, p, X und Y abhängt.

Der Beweis dieses Satzes findet sich etwa in [10] oder [6].

Man beachte, dass in diesem Satz die $\mathcal{R}$-Beschränktheit gefordert wird, um die Norm-Beschränktheit der zugehörigen Fourier-Multiplikatoren zu erhalten. Um sogar $\mathcal{R}$-Beschränktheit zu erhalten (und damit eine Art Iteration möglich zu machen), braucht man noch eine weitere Eigenschaft der Banachräume X und Y.

2.26 Definition. Ein Banachraum X hat die Eigenschaft (α) (englisch: „property (α)“), falls eine Konstante $C > 0$ so existiert, dass für alle $N \in \mathbb{N}$, $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$, $|\alpha_{ij}| \leq 1$ und alle $x_{ij} \in X$ gilt:

$$\int_0^1 \int_0^1 \Big\| \sum_{i,j=1}^N r_i(u) r_j(u) \alpha_{ij} x_{ij} \Big\|_X du dv \leq C \int_0^1 \int_0^1 \Big\| \sum_{i,j=1}^N r_i(u) r_j(v) x_{ij} \Big\|_X du dv.$$

D.h. das Kontraktionsprinzip gilt sogar für Doppelsequenzen $(r_i r_j)_{i,j=1}^N$. Hierbei sind r_i wieder die Rademacher-Funktionen.

2.27 Bemerkung. a) Die Eigenschaft (α) ist unabhängig von der Eigenschaft, dass X von Klasse $\mathcal{HT}$ ist.

b) Falls $X = L^p(G, \mu)$ mit einem σ-finiten Maß μ, so hat X die Eigenschaft (α), wie man leicht mit Hilfe des Satzes von Fubini sieht. Falls X ein abgeschlossener Unterraum von $L^p(G, \mu)$ ist, gilt Eigenschaft (α) ebenfalls. Somit haben insbesondere Sobolev- und Besovräume die Eigenschaft (α).

c) Falls X die Eigenschaft (α) hat und $Y = L^p(G, \mu; X)$ für ein σ-finites Maß μ ist, so hat auch Y die Eigenschaft (α). Auch dies folgt schnell mit dem Satz von Fubini.

Für Räume mit Eigenschaft (α) von Klasse $\mathcal{HT}$ gilt folgende Verschärfung des vektorwertigen Satzes von Mikhlin.

2.28 Satz. *Seien X, Y Banachräume von Klasse $\mathcal{HT}$ mit Eigenschaft (α). Sei $\mathcal{T} \subset L(X, Y)$ $\mathcal{R}$-beschränkt. Betrachte die Menge*

$$M := \Big\{ m \in C^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; L(X, Y)) : \xi^\alpha D^\alpha m(\xi) \in \mathcal{T} \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\, \alpha \in \{0,1\}^n \Big\}.$$

Dann ist $\{T_m : m \in M\} \subset L(L^p(\mathbb{R}^n; X), L^p(\mathbb{R}^n; Y))$ $\mathcal{R}$-beschränkt mit $\mathcal{R}_p(\{T_m : m \in M\}) \leq C \mathcal{R}_p(\mathcal{T})$, wobei die Konstante C nur von p, m, X und Y abhängt.

Ein Beweis dieses Satzes findet sich in [10].

2.29 Korollar. *Sei $\{m_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ eine Familie von matrizenwertigen Funktionen $m_\lambda \in C^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{C}^{N \times N})$ mit*

$$|\xi^\alpha D^\alpha m_\lambda(\xi)|_{\mathbb{C}^{N\times N}} \leq C_0 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\, \alpha \in \{0,1\}^n,\, \lambda \in \Lambda).$$

Dann ist $\{T_{m_\lambda} : \lambda \in \Lambda\} \subset L(L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N))$ $\mathcal{R}$-beschränkt mit Schranke $C \cdot C_0$, wobei C nur von p und N abhängt.

Beweis. Der Raum $X = \mathbb{C}^N$ ist von Klasse $\mathcal{HT}$ und besitzt die Eigenschaft (α). Offensichtlich ändert sich die Eigenschaft der $\mathcal{R}$-Beschränktheit nicht, wenn man auf X zu einer äquivalenten Norm übergeht, d.h. wir können die euklidische Norm auf X wählen. Nach Voraussetzung ist

$$\big\{\xi^\alpha D_\xi^\alpha m_\lambda(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\, \alpha \in \{0,1\}^n,\, \lambda \in \Lambda\big\} \subset L(X)$$

normbeschränkt und damit, da X Hilbertraum ist, auch $\mathcal{R}$-beschränkt. Man wählt in Satz 2.28 $\mathcal{T} := \{A \in \mathbb{C}^{N\times N} : |A| \le C_0\}$ und erhält die $\mathcal{R}$-Beschränktheit von $\{T_{m_\lambda} : \lambda \in \Lambda\} \subset L(L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N))$. □

3. Parameterelliptische Randwertprobleme

3.1 Worum geht's? Wir kennen bereits äquivalente Kriterien dafür, dass ein Operator etwa eine holomorphe Halbgruppe erzeugt. Dieses Kriterium verlangt es, die Resolvente des zugehörigen Operators genauer zu studieren, insbesondere die Resolventenabschätzung (a priori-Abschätzung) zu beweisen. Hier soll nun gezeigt werden, wie man dies für eine große Klasse von Differentialoperatoren im $\mathbb{R}^n$ oder in Gebieten nachweisen kann. Dabei handelt es sich um parameterelliptische oder parabolische Operatoren.

Der „Königsweg", um nichtselbstadjungierte Differentialoperatoren zu untersuchen, liegt in der Fouriertransformation. Während in L^2 der Satz von Plancherel verwendet werden kann, gibt es in L^p den Satz von Mikhlin, der Bedingungen an das Symbol des Operators stellt.

Während im Ganzraumfall die Sektorialität und auch die $\mathcal{R}$-Sektorialität direkt aus dem Satz von Plancherel bzw. Mikhlin folgt, muss in Gebieten noch eine Bedingung an die Randoperatoren gestellt werden, die Lopatinskii-Shapiro-Bedingung.

a) Parameterelliptische Differentialoperatoren

Im folgenden sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet.

3.2 Definition (elliptische und parabolische Differentialoperatoren)**.** Sei $m \in \mathbb{N}$ und $A = A(x, D) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D^\alpha$ ein linearer Differentialoperator der Ordnung m mit Koeffizienten $a_\alpha \colon \overline{G} \to \mathbb{C}$.

a) Der Operator $A_0(x, D) := \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)D^\alpha$ heißt der Hauptteil des Operators $A(x, D)$.

b) Die Abbildung $a\colon G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $a(x, \xi) := \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ heißt das Symbol von $A(x, D)$. Wir schreiben $a = \operatorname{symb}(A)$ bzw. $A = \operatorname{op}(a)$. Das Symbol $a_0 := \operatorname{symb}(A_0)$ heißt das Hauptsymbol von $A(x, D)$.

c) Der Operator A heißt elliptisch in $\overline{G}$, falls

$$a_0(x, \xi) \neq 0 \quad (x \in \overline{G},\ \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Analog definiert man elliptisch in einer Menge $M \subset \overline{G}$, z.B. elliptisch an der Stelle $x \in \overline{G}$.

d) Sei $\mathscr{L} \subset \mathbb{C}$ ein geschlossener Sektor in $\mathbb{C}$ mit Spitze in 0. Dann heißt der Operator $A(x, D)$ parameterelliptisch im Sektor $\mathscr{L}$, falls

$$a_0(x, \xi) - \lambda \neq 0 \quad (x \in \overline{G},\ (\xi, \lambda) \in (\mathbb{R}^n \times \mathscr{L}) \setminus \{(0, 0)\}).$$

e) Der Operator $\partial_t - A(x,D)$ heißt parabolisch, falls $A(x,D)-\lambda$ parameterelliptisch im Sektor $\overline{\Sigma_{\pi/2}}$ ist.

3.3 Beispiele. a) Der Cauchy-Riemann-Operator $A := \partial_{x_1} + i\partial_{x_2}$ ist elliptisch in $\mathbb{R}^2$.

b) Der Laplace-Operator $A := \Delta$ ist elliptisch, parameterelliptisch in jedem Sektor, der den negativen Halbstrahl $(-\infty, 0)$ nicht enthält, und insbesondere parabolisch.

c) Der Operator $A(x,D) := \partial_{x_1} + i\partial_{x_2} + (ix_1 - x_2)\partial_{x_3}$ ist nicht elliptisch in $\mathbb{R}^3$, denn

$$a_0(x,\xi) = i\xi_1 - \xi_2 + i(ix_1 - x_2)\xi_3 = 0 \quad \text{für} \quad \xi = (x_2, -x_1, 1).$$

Für diesen Operator existieren C^∞-Funktionen f, für welche $Au = f$ nicht einmal in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)$ lösbar ist.

Seien $G, \widetilde{G} \subset \mathbb{R}^n$ und $\Phi\colon G \to \widetilde{G}$ eine Bijektion. Zu einer Funktion $u\colon \widetilde{G} \to \mathbb{C}$ heißt die Funktion $\Phi^* u := u \circ \Phi\colon G \to \mathbb{C}$ der *pullback* von u.

3.4 Satz. *Seien $G, \widetilde{G} \subset \mathbb{R}^n$ Gebiete und $\Phi\colon G \to \widetilde{G}$ ein C^m-Diffeomorphismus. Sei A ein linearer Differentialoperator auf $\widetilde{G}$ der Ordnung m. Definiere den pullback von A durch $B := \Phi^* A := A(\cdot \circ \Phi^{-1}) \circ \Phi$. Dann ist B linearer Differentialoperator der Ordnung m auf G, und für die Hauptsymbole gilt*

$$b_0(x,\xi) = a_0(\Phi(x), [\Phi'(x)]^{-t}\xi) \quad (x \in G, \xi \in \mathbb{R}^n).$$

Dabei ist Φ' die Jacobimatrix von Φ und $[\cdot]^{-t} := ([\cdot]^{-1})^t$, wobei $(\cdot)^t$ die transponierte Matrix bezeichnet. Insbesondere ist $\Phi^* A$ elliptisch in G, wenn A elliptisch in $\widetilde{G}$ ist.

Beweis. (i) Sei zunächst $(Au)(y) = (D_{i_1} \cdots D_{i_m} u)(y)$ mit $D_j := -i\partial_j$ und $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, n\}$. Es gilt

$$\partial_{i_1}(v \circ \Phi^{-1})(y) = \sum_{j_1=1}^n (\partial_{j_1} v)(\Phi^{-1}(y)) M_{j_1 i_1}(y),$$

wobei $(M_{jk}(y))_{j,k=1,\ldots,n} := (\Phi^{-1})'(y)$. Somit erhält man mit der Produktregel

$$\begin{aligned}[\partial_{i_2}\partial_{i_1}(v \circ \Phi^{-1})(y) &= \sum_{j_2=1}^n \sum_{j_1=1}^n (\partial_{j_2}\partial_{j_1} v)(\Phi^{-1}(y)) M_{j_2 i_2}(y) M_{j_1 i_1}(y) \\ &\quad + \sum_{j_1=1}^n (\partial_{j_1} v)(\Phi^{-1}(y)) \partial_{i_2} M_{j_1 i_1}(y).\end{aligned}$$

Die letzte Summe ist ein Operator der Ordnung 1 bzgl. v. Iterativ folgt

$$\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_m}(v \circ \Phi^{-1})(y) = \sum_{j_1,\ldots,j_m=1} (\partial_{j_1} \ldots \partial_{j_m} v)(\Phi^{-1}(y)) M_{j_1 i_1}(y) \cdot \ldots \cdot M_{j_m i_m}(y) + Rv,$$

wobei R ein linearer Differentialoperator der Ordnung nicht größer als $m-1$ ist. Der Hauptteil des Operators B ist also gegeben durch

$$(B_0 v)(x) = \sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} (\partial_{j_1} \ldots \partial_{j_m} v)(x) M_{j_1 i_1}(\Phi(x)) \cdot \ldots \cdot M_{j_m i_m}(\Phi(x)).$$

Das Hauptsymbol von A ist $a_0(y,\eta) = \eta_{i_1} \cdot \ldots \cdot \eta_{i_m}$, das Hauptsymbol von B ist

$$b_0(x,\xi) = \sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} \xi_{j_1} \cdot \ldots \cdot \xi_{j_m} M_{j_1 i_1}(\Phi(x)) \cdot \ldots \cdot M_{j_m i_m}(\Phi(x)) = \prod_{k=1}^{n} \eta_{i_k}$$

mit

$$\eta_{i_k} := \sum_{j_k=1}^{n} \xi_{j_k} M_{j_k i_k}(\Phi(x)),$$

d.h.

$$\eta^t = \xi^t M(\Phi(x)) = \xi^t (\Phi^{-1})'(\Phi(x)) = \xi^t (\Phi'(x))^{-1}.$$

Somit gilt

$$b_0(x,\xi) = a_0(\Phi(x), (\Phi'(x))^{-t}\xi) \quad (x \in G, \xi \in \mathbb{R}^n).$$

(ii) Sei nun A allgemeiner linearer Differentialoperator der Ordnung m auf $\widetilde{G}$. Schreibe A_0 in der Form

$$(A_0 u)(y) = \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} a_{i_1\ldots i_m}(y)(D_{i_1} \ldots D_{i_m} u)(y).$$

Nach Teil (i) ist B linearer Differentialoperator mit Hauptsymbol

$$b_0(x,\xi) = \sum_{i_1,\ldots,i_m} a_{i_1\ldots i_m}(\Phi(x))\eta_{i_1} \cdot \ldots \cdot \eta_{i_m} = a_0(\Phi(x),\eta) = a_0(\Phi(x), (\Phi'(x))^{-t}\xi).$$

$\square$

3.5 Definition. Sei $n \geq 2$ und $A(x,D)$ ein elliptischer Differentialoperator in G. Dann heißt $A(x,D)$ proper elliptisch in G, falls das Polynom $P := a_0(x,\xi',\cdot)$ für jedes $x \in G$ und jedes $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ genauso viele Nullstellen in der oberen komplexen Halbebene $\mathbb{H}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ wie in der unteren komplexen Halbebene $\mathbb{H}_- := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$ besitzt.

3.6 Bemerkung. a) Man beachte in obiger Definition, dass P keine reelle Nullstelle besitzt, da $A(x,D)$ elliptisch ist.

b) Das Hauptsymbol eines Operators A der Ordnung m ist homogen vom Grad m in ξ. Falls A elliptisch ist, enthält $a_0(x,\xi)$ einen Term der Form $a(x)\xi_n^m$, denn sonst wäre $a_0(x,\xi) = 0$ für $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = 0$ und $\xi_n = 1$. Somit ist P ein Polynom vom Grad m, und falls A proper elliptisch ist, ist m eine gerade Zahl.

c) Falls a_α für $|\alpha| = m$ reellwertige Koeffizienten sind und $A(x,D)$ elliptisch ist, so ist A auch proper elliptisch. Denn dann ist P ein Polynom mit reellen Koeffizienten ohne reelle Nullstelle.

3.7 Satz. *Sei $A(x,D)$ elliptisch in G und $n \geq 3$. Dann ist A proper elliptisch. Insbesondere ist die Ordnung von A eine gerade Zahl.*

Beweis. Sei $x \in G$ und $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$. Wegen $n \geq 3$ existiert ein stetiger Weg $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ mit $\gamma(0) = \xi'$ und $\gamma(1) = -\xi'$. Sei $n_+(t)$ die Anzahl der Nullstellen z mit $\operatorname{Im} z > 0$ des Polynoms $p_t := A_0(x, (\gamma(t), \cdot))$. Dann ist $n_+(t)$ unabhängig von t. Denn da die Nullstellen eines Polynoms stetig von den Koeffizienten abhängt, gäbe es sonst ein $t \in (0,1)$, für welches p_t eine reelle Nullstelle besitzt, was wegen $\gamma(t) \neq 0$ einen Widerspruch zur Elliptizität darstellt.

Daher gilt $n_+(0) = n_+(1)$, d.h. die Polynome $a_0(x, \xi', \cdot)$ und $a_0(x, -\xi', \cdot)$ besitzen dieselbe Anzahl von Nullstellen in $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Wegen

$$a_0(x, -\xi', z) = (-1)^m a_0(x, \xi', -z)$$

ist aber $n_+(1)$ auch die Anzahl der Nullstellen von $a_0(x, \xi', \cdot)$ in $\mathbb{H}_- = -\mathbb{H}_+$, d.h. A ist proper elliptisch. □

3.8 Definition. Sei $A = A(x,D)$ ein linearer Differentialoperator der Ordnung m in G. Dann heißt A gleichmäßig elliptisch in $\overline{G}$, falls

$$|a_0(x,\xi)| \geq C|\xi|^m \quad ((x,\xi) \in \overline{G} \times \mathbb{R}^n),$$

und gleichmäßig in $\overline{G}$ parameterelliptisch in einem Sektor $\mathscr{L}$, falls

$$|a_0(x,\xi) - \lambda| \geq C(|\xi|^{2m} + |\lambda|) \quad (x \in \overline{G}, (\xi,\lambda) \in (\mathbb{R}^n \times \mathscr{L}) \setminus \{0\}).$$

Der Operator A heißt gleichmäßig stark elliptisch in $\overline{G}$, falls

$$\operatorname{Re} a_0(x,\xi) \geq C|\xi|^m \quad ((x,\xi) \in \overline{G} \times \mathbb{R}^n).$$

3.9 Lemma. *Sei G beschränkt und $A = A(x,D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$ mit $a_\alpha \in C(\overline{G})$. Falls A elliptisch in $\overline{G}$ ist, so ist A dort auch gleichmäßig elliptisch.*

Beweis. Für $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $x \in \overline{G}$ gilt

$$|a_0(x,\xi)| = |\xi|^m \Big| a_0\Big(x, \frac{\xi}{|\xi|}\Big)\Big| \geq M|\xi|^m,$$

wobei $M := \min\{|a_0(x,\xi)| : (x,\xi) \in \overline{G} \times S^{n-1}\} > 0$. Hier wurde verwendet, dass $a_0(x,\xi)$ als stetige Funktion auf der kompakten Menge $\overline{G} \times S^{n-1}$ ihr Minimum annimmt. □

3.10 Definition. Sei $A(x, D)$ ein linearer Differentialoperator der Ordnung m und sei $1 < p < \infty$.

a) Sei $\mathscr{L} \subset \mathbb{C}$ ein geschlossener Sektor und $s \in [0, m]$. Dann definiert man die parameterabhängigen Normen $|\!|\!| \cdot |\!|\!|_{s,p,G}$ durch

$$|\!|\!| u |\!|\!|_{s,p,G} := \|u\|_{W_p^s(G)} + |\lambda|^{s/(2m)} \|u\|_{L^p(G)} \quad (\lambda \in \mathscr{L},\ u \in W_p^m(G)).$$

b) Die L^p-Realisierung A_p des Differentialoperators $A(x, D)$ ist gegeben durch $D(A_p) := W_p^m(G)$ und $A_p u := A(x, D)u \quad (u \in D(A_p))$.

3.11 Satz (Modellproblem für parameterelliptische Operatoren)**.** *Seien $a_\alpha \in \mathbb{C}$ für $|\alpha| = 2m$ und $A(D) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha D^\alpha$ parameterelliptisch im Sektor $\mathscr{L} = \overline{\Sigma}_\varphi$ mit $\varphi \in [0, \pi]$. Dann gilt für die L^p-Realisierung A_p die Inklusion $\rho(A_p) \supset \mathscr{L} \setminus \{0\}$. Zu jedem $\lambda_0 > 0$ existiert ein $C_{\lambda_0} > 0$ mit*

$$|\!|\!| u |\!|\!|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \le C_{\lambda_0} \|(\lambda - A_p) f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n),\ \lambda \in \mathscr{L},\ |\lambda| \ge \lambda_0).$$

Weiter ist die Menge

$$\big\{\lambda(\lambda - A_p)^{-1} : \lambda \in \overline{\Sigma}_\varphi \setminus \{0\}\big\}$$

$\mathcal{R}$-beschränkt. Falls $\varphi > \frac{\pi}{2}$, so besitzt $A(D)$ maximale L^q-Regularität für alle $q \in (1, \infty)$.

Beweis. Da $A(D)$ parameterelliptisch ist, ist für $\lambda \in \overline{\Sigma}_\varphi \setminus \{0\}$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ das Symbol $(\lambda - a_0(\xi))^{-1}$ definiert. Wir zeigen, dass die Familie $\{m_\lambda : \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\}\}$ mit $m_\lambda(\xi) := \lambda(\lambda - a_0(\xi))^{-1}$ die Voraussetzung von Korollar 2.29 erfüllt.

Da für $r > 0$ gilt $r^{2m}\lambda - a_0(r\xi) = r^{2m}(\lambda - a_0(\xi))$, ist die Abbildung $(\xi, \lambda) \mapsto \frac{1}{\lambda}(\lambda - a_0(\xi))$ quasihomogen in (ξ, λ) vom Grad 0. Damit gilt dasselbe für die Abbildung $(\xi, \lambda) \mapsto \lambda(\lambda - a_0(\xi))^{-1}$. Nach Bemerkung 2.23 erfüllt m_λ die Mikhlin-Bedingung, und nach Korollar 2.29 folgt die $\mathcal{R}$-Beschränktheit von $\{T_{m_\lambda} : \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\}\} \subset L(L^p(\mathbb{R}^n))$. Wegen $\frac{1}{\lambda} T_{m_\lambda}(\lambda - A_p) = \mathrm{id}_{W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)}$ und $\frac{1}{\lambda}(\lambda - A_p) T_{m_\lambda} = \mathrm{id}_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ ist $T_{m_\lambda} = \lambda(\lambda - A_p)^{-1}$. Nach Satz 2.18 ist A_p $\mathcal{R}$-sektoriell mit Winkel größer als $\frac{\pi}{2}$, und nach Satz 1.15 besitzt A_p maximale L^q-Regularität für alle $q \in (1, \infty)$. Dies zeigt alle Behauptungen des Satzes bis auf die Resolventenabschätzung.

Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $u = (A_p - \lambda)^{-1} f \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)$. Mit demselben Homogenitätsargument sieht man, dass für festes $|\alpha| \le 2m$ die Familie

$$m_\lambda^{(\alpha)} := \frac{\lambda^{(2m-|\alpha|)/(2m)} \xi^\alpha}{\lambda - a_0(\xi)}$$

die Voraussetzungen des Satzes von Mikhlin erfüllt. Daher ist

$$|\lambda|^{(2m-|\alpha|)/(2m)}\|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_\alpha \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{3-1}$$

Sei $\lambda_0 > 0$. Dann folgt aus (3-1) für $\lambda \in \overline{\Sigma}_\varphi$, $|\lambda| \ge \lambda_0$, die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|\!|\!| u |\!|\!|_{2m,p,\mathbb{R}^n} &= \|u\|_{W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)} + |\lambda|\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\le C\Big(\sum_{|\alpha|\le 2m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + |\lambda|\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\Big) \\
&\le C_1 \min\{1,\lambda_0\}^{-2m}\Big(\sum_{|\alpha|\le 2m} C_\alpha\Big)\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\le C_{\lambda_0}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

□

3.12 Bemerkung. Im vorigen Beweis wurde die Quasihomogenität von $m_\lambda(\xi)$ verwendet. Dabei heißt eine Funktion $\varphi = \varphi(\xi,\lambda)$ quasi-homogen vom Grad $d \in \mathbb{R}$ in (ξ,λ), falls ein $r > 0$ existiert mit

$$\varphi(\rho\xi, \rho^r\lambda) = \rho^d\varphi(\xi,\lambda) \quad ((\xi,\lambda) \ne 0,\ \rho > 0).$$

Die Zahl r heißt das relative Gewicht von λ bzgl. ξ. In obigem Beweis hat λ das relative Gewicht $2m$. Neben spektraltheoretischen Betrachtungen wie im obigen Beweis sind parabolische Gleichungen der Grund für das Auftreten quasihomogener Symbole. So hat bei der Wärmeleitungsgleichung $\partial_t - \Delta$ die Zeitableitung im obigen Sinn relatives Gewicht 2 bzgl. den Ortsableitungen.

3.13 Korollar. *Falls in der Situation von Satz 3.11 der Operator $A(D)$ parabolisch ist, so besitzt die L^p-Realisierung A_p maximale L^q-Regularität und erzeugt insbesondere eine beschränkte holomorphe Halbgruppe.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $A(D)$ parameterelliptisch in $\overline{\Sigma}_{\pi/2}$, d.h. es gilt $a_0(\xi) - \lambda \ne 0$ für alle $(\xi,\lambda) \in \mathbb{R}^n \times \overline{\Sigma}_{\pi/2}\setminus\{0\}$. Wegen $a_0(\rho\xi) = \rho^{2m}a_0(\xi)$ ist der Wertebereich $R(a_0) := \{a_0(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n\}$ ein Kegel, und da $\{a_0(\xi) : |\xi| = 1\}$ kompakt ist, ist dieser Kegel abgeschlossen. Damit ist aber die Menge der Winkel $W := \{\alpha \in [0,2\pi) : e^{i\alpha} \notin R(a_0)\}$ offen. Da $A(D)$ parabolisch ist, gilt $[-\pi/2,\pi/2] \subset W$, und somit existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $[-\pi/2-\varepsilon, \pi/2+\varepsilon] \subset W$. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit $\arg\lambda \in [-\pi/2-\varepsilon,\pi/2+\varepsilon]$ folgt damit $\lambda \notin R(a_0)$, d.h. $a_0(\xi) - \lambda \ne 0 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n)$.

Wir haben gezeigt, dass $A(D)$ parameterelliptisch in einem Sektor $\overline{\Sigma}_{\pi/2+\varepsilon}$ ist. Damit folgt die Behauptung aus Satz 3.11. □

3.14 Bemerkung. Wir haben in obigem Beweis gezeigt, dass die Menge aller Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ offen ist, für welche $A(D)$ die Bedingung der Parameterelliptizität auf dem Halbstrahl $\{\rho e^{i\alpha} : \rho \geq 0\}$ erfüllt.

b) Die Bedingung von Lopatinskii-Shapiro

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $C^{2m-1,1}$-Rand. Wir betrachten nun ein Randwertproblem der Form

$$\begin{aligned} (A(x,D)-\lambda)u &= f \quad \text{in } G,\\ B_j(x,D)u &= g_j \quad (j=1,\dots,m) \quad \text{auf } \partial G. \end{aligned} \tag{3-2}$$

Hierbei sind $A(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$, $B_j(x,D) = \sum_{|\beta|\leq m_j} b_{j\beta}(x)\gamma_0 D^\beta$ $(j = 1,\dots,m)$ mit $m_j < 2m$. Die Bezeichnung γ_0 steht hier für die sogenannte Spurabbildung $u \mapsto u|_{\partial G}$, welche zunächst für C^∞-Funktionen definiert ist, sich aber zu einem stetigen linearen Operator

$$\gamma_0\colon W_p^k(G) \to W_p^{k-1/p}(\partial G) := B_{pp}^{k-1/p}(\partial G)$$

für $k = 1,\dots,2m$ fortsetzen lässt. Dabei steht $B_{pp}^{k-1/p}(\partial G)$ für den Besovraum der Ordnung $k - 1/p$ auf dem Rand ∂G. Die rechten Seiten von (3-2) sind gegeben und aus den folgenden Sobolevräumen:

$$f \in L^p(G),\ g_j \in W_p^{2m-m_j-1/p}(\partial G)\ (j = 1,\dots,m).$$

Zur Lösung von (3-2) wird folgende Strategie verwendet:

(i) *Reduktion auf den Fall $f = 0$:* Falls A parameterelliptisch in einem Sektor $\mathscr{L} \subset \mathbb{C}$ ist, so existiert für $\lambda \in \mathscr{L}$, $|\lambda|$ groß, eine Lösung u_1 von

$$(A(x,D)-\lambda)u_1 = \widetilde{f} \quad \text{in } \mathbb{R}^n,$$

wobei

$$\widetilde{f} := \begin{cases} f & \text{in } G,\\ 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus G. \end{cases}$$

Für die Lösung u_1 gilt $u_1 \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)$ und $\|u_1\|_{2m,p,\mathbb{R}^n} \leq C\|f\|_{L^p(G)}$. Man sucht nun eine Lösung $u_2 \in W_p^{2m}(G)$ des Randwertproblems

$$\begin{aligned} (A(x,D)-\lambda)u_2 &= 0 \quad \text{in } G,\\ B_j(x,D)u_2 &= g_j - B_j(x,D)u_1 \quad (j=1,\dots,m) \quad \text{auf } \partial G. \end{aligned} \tag{3-3}$$

Dann ist $u_1 + u_2$ eine Lösung von (3-2). Somit können wir $f = 0$ annehmen.

(ii) *Einfrieren der Koeffizienten:* Fixiere $x_0 \in \partial G$ und wähle ein zu x_0 gehöriges Koordinatensystem. Dies ist ein Koordinatensystem, bezüglich welchem $x_0 = 0$ gilt und für welches die positive x_n-Richtung in Richtung der inneren Normale an x_0 zeigt, und das aus dem ursprünglichen Koordinatensystem durch Drehung und Verschiebung hervorgeht. In diesem Koordinatensystem sind $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ tangentiale Richtungen. Man ersetzt die Operatoren durch ihren Hauptteil und erhält das sog. Modellproblem im Halbraum $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$:

$$\begin{aligned} (A_0(x_0, D) - \lambda)u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n_+, \\ B_{j0}(x_0, D)u &= g_j \quad (j = 1, \dots, m) \quad \text{auf } \mathbb{R}^{n-1} = \partial\mathbb{R}^n_+. \end{aligned} \tag{3-4}$$

(iii) *Partielle Fouriertransformation:* Sei $\mathscr{F}' \colon \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n-1}) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n-1})$ die Fouriertransformation „$x' \mapsto \xi'$". Angewendet auf (3-4) erhält man

$$\begin{aligned} (a_0(x_0, \xi', D_n) - \lambda)v(x_n) &= 0 \quad (x_n > 0), \\ b_{j0}(x_0, \xi', D_n)v(x_n)\big|_{x_n=0} &= (\mathscr{F}'g_j)(\xi') \quad (j = 1, \dots, m). \end{aligned} \tag{3-5}$$

Hier ist $v(x_n) := (\mathscr{F}'u)(\xi', x_n)$. Die Lösung u erhält man dann durch partielle Fourier-Rücktransformation $(\mathscr{F}')^{-1}$. Man beachte, dass (3-5) eine gewöhnliche Differentialgleichung ist. Somit hat man das ursprüngliche Randwertproblem im Kern zurückgeführt auf die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung der Ordnung $2m$ mit m Anfangsbedingungen.

Die Lösungen von

$$(a_0(x_0, \xi', D_n) - \lambda)v(x_n) = 0 \quad (x_n > 0)$$

sind gegeben durch Funktionen der Form $ce^{i\tau x_n}$ mit $c \in \mathbb{C}$, wobei τ die algebraische Gleichung $a_0(x_0, \xi', \tau) - \lambda = 0$ erfüllt (mit entsprechenden Modifikationen bei mehrfachen Nullstellen). Falls $\operatorname{Im}\tau > 0$, so ist $\operatorname{Re} i\tau < 0$ und es gilt $v(x_n) \to 0 \quad (x_n \to \infty)$, d.h. die Lösung ist (asymptotisch) stabil. Falls $\operatorname{Im}\tau < 0$, so folgt analog $\operatorname{Re} i\tau > 0$, und es gilt $|v(x_n)| \to \infty \quad (x_n \to \infty)$. Da wir insgesamt (mindestens) an L^p-Lösungen interessiert sind, dürfen wir nur die stabilen Lösungen betrachten.

3.15 Definition. a) Das Randwertproblem (3-2) heißt parameterelliptisch in einem Sektor $\mathscr{L} \subset \mathbb{C}$, falls $A(x, D)$ in diesem Sektor parameterelliptisch ist und folgende Lopatinskii-Shapiro-Bedingung erfüllt ist:

(LS) Sei $x_0 \in \partial G$. Schreibe das Randwertproblem (3-2) und zu x_0 gehörigen Koordinaten. Dann hat die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{aligned} (A_0(x_0, \xi', D_n) - \lambda)v(x_n) &= 0 \quad (x_n > 0), \\ B_{j0}(x_0, \xi', D_n)v(x_n)\big|_{x_n=0} &= 0 \quad (j = 1, \dots, m), \\ v(x_n) &\to 0 \quad (x_n \to \infty) \end{aligned} \tag{3-6}$$

nur die triviale Lösung für alle $(\xi', \lambda) \in (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathscr{L}) \setminus \{0\}$.

b) Das Randwertproblem $(A(x,D), B_1(x,D), \ldots, B_m(x,D))$ heißt elliptisch, falls $A(x,D)$ elliptisch ist und die Lopatinskii-Shapiro-Bedingung für $\lambda = 0$ erfüllt ist.

c) Das Randwertproblem $(A(x,D), B_1(x,D), \ldots, B_m(x,D))$ heißt parabolisch, falls es parameterelliptisch in der komplexen Halbebene $\overline{\mathbb{C}}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$ ist.

3.16 Lemma. *Sei $A(x,D)$ elliptisch von Ordnung $2m$. Für ein $x_0 \in \partial G$ gelte die Lopatinskii-Shapiro-Bedingung. Sei $\mathscr{M}$ der $2m$-dimensionale Lösungsraum von*

$$a_0(x_0, \xi', D_n)v(x_n) = 0 \quad (x_n > 0),$$

und sei $\mathscr{M}_\pm$ der Unterraum der stabilen bzw. instabilen Lösungen. Dann gilt $\dim \mathscr{M}_\pm = m$, und $A(x,D)$ ist proper elliptisch. Analog gilt dies, falls $A(x,D)$ parameterelliptisch ist.

Beweis. Sei $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ und $P := a_0(x_0, \xi', \cdot)$. Wir schreiben $\mathscr{M} = \mathscr{M}(\xi')$. Da P keine reelle Nullstelle besitzt, gilt $\mathscr{M}(\xi') = \mathscr{M}_+(\xi') \oplus \mathscr{M}_-(\xi')$, und $\dim \mathscr{M}_\pm(\xi')$ ist die Anzahl der Nullstellen von P in $\mathbb{C}_\pm$.

Nach (LS) ist die lineare Abbildung

$$\mathscr{M}_+ \to \mathbb{C}^m, \; v \mapsto b_{j0}(x_0, \xi', D_n)v(x_n)\big|_{x_n=0}$$

injektiv, d.h. es gilt $\dim \mathscr{M}_+(\xi') \leq m$. Wegen $a_0(x_0, \xi', \tau) = a_0(x_0, -\xi', -\tau)$ gilt $\mathscr{M}_-(\xi') = \mathscr{M}_+(-\xi')$, und (LS) liefert $\dim M_+(-\xi') \leq m$. Damit

$$2m = \dim \mathscr{M}_+(\xi') + \dim \mathscr{M}_-(\xi') \leq m + m = 2m,$$

und A ist proper elliptisch. □

3.17 Korollar. *Sei $A(x,D)$ parameterelliptisch in einem Sektor $\mathscr{L} \subset \mathbb{C}$. Die folgenden Bedingungen sind jeweils äquivalent zur Lopatinskii-Shapiro-Bedingung.*

(i) Für alle $x_0 \in \partial G$, alle $(\xi', \lambda) \in (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathscr{L}) \setminus \{0\}$ und alle $h_1, \ldots, h_m \in \mathbb{C}$ besitzt

$$\begin{aligned} (a_0(x_0, \xi', D_n) - \lambda)v(x_n) &= 0 \quad (x_n > 0), \\ b_{j0}(x_0, \xi', D_n)v(x_n)\big|_{x_n=0} &= h_j \quad (j = 1, \ldots, m), \\ v(x_n) &\to 0 \quad (x_n \to \infty) \end{aligned}$$

genau eine Lösung.

(ii) Für alle $x_0 \in \partial G$ und alle $(\xi', \lambda) \in (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathscr{L}) \setminus \{0\}$ ist der Operator

$$T(x_0, \xi', \lambda) \colon W_p^{2m}((0,\infty)) \to L^p((0,\infty)) \times \mathbb{C}^m,$$

$$v \mapsto \begin{pmatrix} (a_0(x_0,\xi',D_n)-\lambda)v \\ b_{10}(x_0,\xi',D_n)v(x_n)\big|_{x_n=0} \\ \vdots \\ b_{m0}(x_0,\xi',D_n)v(x_n)\big|_{x_n=0} \end{pmatrix}$$

invertierbar.

Beweis. Die Äquivalenz von (LS) und (i) folgt aus Lemma 3.16 wegen $\dim \mathscr{M}_+ = m$. Zur Äquivalenz von (i) und (ii) definiert man zu $f \in L^p((0,\infty))$ die triviale Fortsetzung $\widetilde{f} := f \cdot \chi_{(0,\infty)}$ auf $\mathbb{R}$ und löst die gewöhnliche Differentialgleichung

$$(a_0(x_0,\xi',D_n)-\lambda)v_1(x_n) = \widetilde{f}(x_n) \quad (x_n \in \mathbb{R})$$

durch den Fourieransatz

$$v_1 := \mathscr{F}_{x_n}^{-1} \frac{1}{a_0(x_0,\xi',\xi_n)-\lambda} \mathscr{F}_{x_n}\widetilde{f} \in W_p^{2m}(\mathbb{R}).$$

Damit erreicht man wie oben eine Reduktion auf den Fall $f = 0$. Die Aussage von (ii) folgt dann daraus, dass eine stabile Lösung der homogenen Gleichung exponentiell abfällt und damit in $W_p^{2m}((0,\infty))$ liegt. □

3.18 Bemerkung. Man betrachtet in (ii) den Operator für festes ξ' und x_0 als Funktion von λ. Dann ist $T(\lambda) = T(x_0,\xi',\lambda)$ eine sogenannte Operatorschar, welche linear vom Spektralparameter λ abhängt. Das Spektrum einer Operatorschar wird definiert als

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T(\lambda) \text{ nicht bijektiv }\}.$$

Damit kann man die Bedingung (ii) in folgender Form schreiben:

Für alle $x_0 \in \partial G$ und alle $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\}$ ist $\rho(T(x_0,\xi',\cdot)) \supset \mathscr{L}$.

3.19 Definition (Lopatinskii-Matrix)**.** Sei $A(x,D)$ parameterelliptisch in einem Sektor $\mathscr{L} \subset \mathbb{C}$ für $x \in \overline{G}$. Sei $(x_0,\xi',\lambda) \in \partial G \times (\mathbb{R}^{n-1} \times \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\})$ fest und seien $\tau_j = \tau_j(x_0,\xi',\lambda)$, $j = 1,\dots,m$ die (nicht notwendig verschiedenen) Nullstellen von $a_0(x_0,\xi',\cdot) - \lambda$ mit positivem Imaginärteil. Setze

$$a_+(\tau) := a_+(x_0,\xi',\lambda,\tau) := \prod_{j=1}^m (\tau - \tau_j(x_0,\xi',\lambda)) \in \mathbb{C}[\tau].$$

Betrachte die Restklassen $\overline{b}_{j0} = \overline{b}_{j0}(x_0,\xi',\lambda,\cdot) \in \mathbb{C}[\tau]/(a_+)$ von b_{j0} modulo a_+ und schreibe $\overline{b}_{j0}$ bezüglich der kanonischen Basis $\overline{1},\overline{\tau},\dots,\overline{\tau^{m-1}} \in \mathbb{C}[\tau]/(a_+)$, d.h.

$$\begin{pmatrix} \overline{b}_{10} \\ \vdots \\ \overline{b}_{m0} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \vdots \\ \overline{\tau^{m-1}} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } L = L(x_0,\xi',\lambda) \in \mathbb{C}^{m\times m}.$$

Dann heißt L die Lopatinskii-Matrix von (A, B) an der Stelle x.

3.20 Lemma. *Sei $A(x, D)$ in einem Sektor $\mathscr{L} \subset \mathbb{C}$ parameterelliptisch für $x \in \overline{G}$. Dann gilt die Lopatinskii-Shapiro-Bedingung genau dann, falls*

$$\det L(x_0, \xi', \lambda) \neq 0 \quad (x_0 \in \partial G,\ (\xi', \lambda) \in (\mathbb{R}^{n-1} \times \overline{\mathbb{C}}_+) \setminus \{0\}).$$

Beweis. Sei v_j $(j = 1, \dots, m)$ die Lösung von

$$\begin{aligned} \big(a_+(x_0, \xi, D_n) - \lambda\big) v(x_n) = 0 \quad (x_n > 0), \\ D_n^{k-1} v(x_n)\big|_{x_n=0} \delta_{kj} \quad (k = 1, \dots, m). \end{aligned}$$

Dann ist $\{v_1, \dots, v_m\}$ eine Basis des Lösungsraums $\mathscr{M}_+$ aller stabilen Lösungen von $\big(a_+(x_0, \xi, D_n) - \lambda\big) v(x_n) = 0$. Sei nun v eine Lösung von (3-6), $v = \sum_{j=1}^m \lambda_j v_j$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} b_{10}(D_n) \\ \vdots \\ b_{m0}(D_n) \end{pmatrix} v(x_n)\big|_{x_n=0} &= \begin{pmatrix} b_{10}(D_n) \\ \vdots \\ b_{m0}(D_n) \end{pmatrix} \big(v_1(x_n), \dots, v_m(x_n)\big)\big|_{x_n=0} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \overline{b}_{10}(D_n) \\ \vdots \\ \overline{b}_{m0}(D_n) \end{pmatrix} \big(v_1(x_n), \dots, v_m(x_n)\big)\big|_{x_n=0} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \\ &= L \begin{pmatrix} D_n^0 \\ \vdots \\ D_n^{m-1} \end{pmatrix} \big(v_1(x_n), \dots, v_m(x_n)\big)\big|_{x_n=0} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \\ &= L \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass $b_{k0}(D_n) v_j(x_n)\big|_{x_n=0} = \overline{b}_{k0}(D_n) v_j(x_n)\big|_{x_n=0}$ gilt wegen $a_+(D_n) v_j(x_n) = 0$. Somit hat (**??**) genau dann nur die triviale Lösung, falls $\det L \neq 0$. □

3.21 Bemerkung. a) Die Bedingung aus Lemma 3.20 lässt sich folgendermaßen formulieren: Die Randbedingungen sind linear unabhängig modulo a_+, d.h. $\overline{b}_{10}, \dots, \overline{b}_{m0}$ sind linear unabhängig in $\mathbb{C}[\tau]/(a_+)$.

b) Die Randbedingungen $B_1, \dots, B_m$ heißen vollständig elliptisch, falls für jedes proper elliptische A das Randwertproblem (A, B) elliptisch ist. Dies ist der Fall für

(i) $B_j(x_0, D) = \gamma_0 (\frac{\partial}{\partial x_n})^{j-1}$ $(j = 1, \dots, m)$ (allgemeine Dirichlet-Bedingungen),

(ii) $B_j(x_0, D) = \gamma_0(\frac{\partial}{\partial x_n})^{m+j-1}$ $(j = 1, \dots, m)$ (allgemeine Neumann-Bedingungen),

oder allgemeiner für festes $s \in \{0, \dots, m\}$

$$B_j(x_0, D) = \gamma_0\Big(\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)^{s+j-1} + \text{ Terme niederer Ordnung } \ (j = 1, \dots, m).$$

Zu zeigen ist hierfür, dass $\{\overline{\tau^{s+j-1}} : j = 1, \dots, m\}$ in $\mathbb{C}[\tau]/(a_+)$ linear unabhängig ist. Falls dies nicht der Fall ist, existieren $c_j \in \mathbb{C}$ und $p \in \mathbb{C}[\tau]$ mit

$$\sum_{j=1}^m c_j \tau^{s+j-1} = p(\tau) a_+(\tau).$$

Wegen $a_+(0) \neq 0$ folgt $\tau^s | p(\tau)$, d.h. $\sum_{j=1}^m c_j \tau^{j-1} = \widetilde{p}(\tau) a_+(\tau)$ mit einem $\widetilde{p} \in \mathbb{C}[\tau]$ im Widerspruch zu $\deg a_+ = m$.

c) Falls das Gebiet und die Koeffizienten von (A, B) glatt sind, sind für festes $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$ die Koeffizienten von $L(x_0, \xi', \lambda)$ Symbole von Pseudodifferentialoperatoren auf der geschlossenen $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit ∂G.

c) Der Hauptsatz über parabolische Randwertprobleme

3.22 Satz (ein Satz über gewöhnliche Differentialgleichungen)**.** *Sei (A, B) parameterelliptisch und $(x_0, \xi', \lambda) \in \partial G \times (\mathbb{R}^{n-1} \times \overline{\mathbb{C}}_+) \setminus \{0\}$. Wähle eine geschlossene Kurve $\gamma = \gamma(x_0, \xi', \lambda)$ in $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, welche alle Nullstellen $\tau_1, \dots, \tau_m$ von a_+ einschließt. Es sei*

$$a_+(x_0, \xi', \lambda, \tau) = \sum_{\ell=0}^m p_\ell(x_0, \xi', \lambda) \tau^{m-\ell}.$$

Definiere $N_k(\tau) := N_k(x_0, \xi', \lambda, \tau) := \sum_{\ell=0}^m p_\ell(x_0, \xi', \lambda) \tau^{m-k-\ell}$ und

$$(M_1(\tau), \dots, M_m(\tau)) := \big(N_1(\tau), \dots, N_m(\tau)\big) L^{-1}.$$

Sei $w_k(x_n) = w_k(x_0, \xi', \lambda, x_n)$ $(x_n > 0)$ definiert durch

$$w_k(x_n) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{M_k(\tau)}{a_+(\tau)} e^{i x_n \tau} d\tau \quad (k = 1, \dots, m).$$

Dann bildet $\{w_1, \dots, w_m\}$ ein Fundamentalsystem von $a_0(D_n) w = 0$, $w(x_n) \to 0$ $\ (x_n \to \infty)$ mit den Randbedingungen

$$b_{j0}(x_0, \xi', \lambda, D_n) w_k(x_n)\big|_{x_n = 0} = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, \dots, m).$$

Beweis. (i) Wir zeigen zunächst, dass

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{N_k(\tau)\tau^{j-1}}{a_+(\tau)}d\tau = \delta_{kj} \quad (j,k=1,\dots,m).$$

Dazu ersetze γ durch einen großen Kreis $B(0,R)$. Für $j<k$ gilt $\deg\big(N_k(\tau)\tau^{j-1}\big) = m-k+j-1 \le m-2$, d.h. der Integrand ist $O(R^{-2})$ für $R\to\infty$ und somit ist das Integral 0.

Für $j=k$ ist der Integrand gleich $\frac{\tau^{m-1}+O(\tau^{m-2})}{(\tau-\tau_1)\cdot\ldots\cdot(\tau-\tau_m)}$, also ist das Integral nach dem Residuenkalkül gleich 1.

Für $j>k$ ist

$$\begin{aligned} Q(\tau) &:= -a_+(\tau)\tau^{j-k-1} + N_k(\tau)\tau^{j-1} \\ &= -\sum_{\ell=0}^{m} p_\ell \tau^{m-\ell+j-k-1} + \sum_{\ell=0}^{m-k} p_\ell\tau^{m-\ell+j-k-1}, \end{aligned}$$

also $\deg Q = j-2 \le m-2$. Also ist

$$\int_{B(0,R)} \frac{N_k(\tau)\tau^{j-1}}{a_+(\tau)}\,d\tau = \int_{B(0,R)} \frac{a_+(\tau)\tau^{j-k-1}+Q(\tau)}{a_+(\tau)}\,d\tau = \int_{B(0,R)}\frac{Q(\tau)}{a_+(\tau)}\,d\tau = 0.$$

(ii) Es gilt modulo a_+, d.h. als Gleichheit in $\mathbb{R}[\tau]/(a_+)$:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \overline{b}_{10}(\tau) \\ \vdots \\ \overline{b}_{m0}(\tau)\end{pmatrix} (\overline{M}_1(\tau),\dots,\overline{M}_m(\tau)) \\ &\qquad = \begin{pmatrix} \overline{b}_{10}(\tau) \\ \vdots \\ \overline{b}_{m0}(\tau)\end{pmatrix} \big(\overline{N}_1(\tau),\dots,\overline{N}_m(\tau)\big)L^{-1} \\ &\qquad = L\begin{pmatrix} \overline{1} \\ \vdots \\ \overline{\tau^{m-1}}\end{pmatrix} \big(\overline{N}_1(\tau),\dots,\overline{N}_m(\tau)\big)L^{-1}. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \Big(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{b_{j0}(\tau)M_k(\tau)}{a_+(\tau)}\,d\tau\Big)_{j,k=1,\dots,m} &= L\cdot\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\tau^{j-1}N_k(\tau)}{a_+(\tau)}\,d\tau\Big)_{j,k=1,\dots,m}\cdot L^{-1} \\ &= L\cdot I_m\cdot L^{-1} = I_m, \end{aligned}$$

d.h.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{b_{j0}(\tau)M_k(\tau)}{a_+(\tau)}\,d\tau = \delta_{jk} \quad (j,k=1,\dots,m).$$

(iii) Definiere w_k wie im Satz. Wegen $\gamma \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ gilt $w_k(x_n) \to 0$ für $x_n \to \infty$. Weiter ist

$$a_0(D_n)w(x_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{M_k(\tau)}{a_+(\tau)}\, a(\tau) e^{ix_n\tau} d\tau = 0,$$

da der Integrand holomorph ist. Schließlich ist

$$b_{j0}(D_n)w(x_n)\big|_{x_n=0} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{b_{j0}(\tau)M_k(\tau)}{a_+(\tau)}\, e^{ix_n\tau}\big|_{x_n=0} d\tau = \delta_{jk} \quad (j,k = 1,\dots,m),$$

was zu zeigen war. □

3.23 Bemerkung (Homogenitäten). a) Mit obigen Bezeichnungen sind die folgenden Ausdrücke quasi-homogen in (ξ', λ, τ), genauer positiv homogen in $(\xi', \lambda^{1/2m}, \tau)$:

- $a_+(x_0, \xi', \lambda, \tau)$ vom Grad m,
- $\tau_j(x_0, \xi', \lambda)$ vom Grad 1,
- $p_\ell(x_0, \xi', \lambda)$ vom Grad ℓ,
- $N_k(x_0, \xi', \lambda, \tau)$ vom Grad $m - k$,
- $b_{j0}(x_0, \xi', \tau)$ vom Grad m_j $(j = 1, \dots, m)$,
- $L_{ij}(x_0, \xi', \lambda)$ vom Grad $m_i - j + 1$,
- $M_k(x_0, \xi', \lambda, \tau)$ vom Grad $m - m_k - 1$,
- $\gamma(x_0, \xi', \lambda)$ vom Grad 1,
- $\frac{M_k(\tau)}{a_+(\tau)}$ vom Grad $-m_k - 1$.

b) Im folgenden sei C eine generische Konstante und

$$\langle \xi' \rangle_\lambda := |\xi'| + |\lambda|^{1/2m}.$$

Nach Teil a) lässt sich die Länge von $\gamma(x_0, \xi', \lambda)$ durch $C\langle \xi' \rangle_\lambda$ abschätzen. Für $\tau \in \gamma$ erhält man die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \tau &\geq C\langle \xi' \rangle_\lambda, \\ |\tau - \tau_j(x_0, \xi', \lambda)| &\geq C\langle \xi' \rangle_\lambda, \\ |e^{i\tau x_n}| &\leq \exp(-C\langle \xi' \rangle_\lambda\, x_n). \end{aligned}$$

Für $\gamma' \in \mathbb{N}_0^{n-1}$ und $\alpha_n \in \mathbb{N}_0$ erhält man

$$\left|D_n^{\alpha_n} D_{\xi'}^{\gamma'} w_k(x_0, \xi', \lambda, x_n)\right| \le C \langle \xi' \rangle_\lambda^{-m_k+\alpha_n-|\gamma'|} e^{-C\langle \xi' \rangle x_n}.$$

Damit ist w_k das Symbol eines Poisson-Operators; dies ist eine spezielle Klasse parameterabhängiger Pseudodifferentialoperatoren, welche bei Randwertproblemen auftreten.

Im folgenden betrachten wir das zu (A, B) gehörige Modellproblem im Halbraum $\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ mit Rand $\partial \mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1}$. Dazu fixieren wir $x_0' \in \partial G$ und wählen das zu x_0' gehörige Koordinatensystem. Wir erhalten das Randwertproblem

$$\begin{aligned} (A_0(D) - \lambda)u = f \quad & \text{in } \mathbb{R}_+^n, \\ B_{j0}(D)u = 0 \quad & (j = 1, \dots, m) \text{ auf } R^{n-1}. \end{aligned} \tag{3-7}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} A_0(D) &= \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x_0') D^\alpha, \\ B_{j0}(D) &= \sum_{|\beta|=m_j} b_{j\beta}(x_0') \gamma_0 D^\beta. \end{aligned}$$

3.24 Satz (Resolventendarstellung, Lösungsoperatoren). *Das Randwertproblem (A, B) sei parameterelliptisch im Sektor $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}$. Dann besitzt das Modellproblem (3-7) für jedes $f \in L^p(\mathbb{R}_+^n)$ und $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\}$ eine eindeutige Lösung $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}_+^n)$. Diese ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} u = R_+ R(\lambda) E_0 f &- \sum_{j=1}^m T_j(\lambda) \Lambda_{2m-m_j}(\lambda) \widetilde{B}_{j0}(D) R_+ R(\lambda) E_0 f \\ &- \sum_{j=1}^m \widetilde{T}_j(\lambda) \Lambda_{2m-m_j-1}(\lambda) \partial_n \widetilde{B}_{j0}(D) R_+ R(\lambda) E_0 f. \end{aligned}$$

Dabei sind die auftretenden Operatoren folgendermaßen definiert:

a) $E_0 \colon L^p(\mathbb{R}_+^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto E_0 f$ *mit*

$$E_0 f := \begin{cases} f, & \text{für } x_n > 0, \\ 0, & \text{für } x_n \le 0 \end{cases}$$

(triviale Erweiterung durch 0).

b) $R(\lambda) := (A_p - \lambda)^{-1} \in L(L^p(\mathbb{R}^n))$, *wobei* A_p *die* L^p*- Realisierung von* $A_0(D)$ *ist.*

c) $R_+ \colon L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}_+^n)$, $u \mapsto u|_{\mathbb{R}_+^n}$, *die Restriktion auf* $\mathbb{R}_+^n$.

d) $\widetilde{B}_{j0}(D) := \sum_{|\beta|=m_j} b_{j0}(x_0)D^\beta$, *die Randoperatoren ohne Spurbildung.*

e) $\Lambda_s(\lambda) := (\mathscr{F}')^{-1}(\lambda + |\xi'|^{2m})^{s/2m}\mathscr{F}' \in L(W_p^s(\mathbb{R}^n_+), L^p(\mathbb{R}^n_+))$ *für* $s \in \mathbb{N}_0$, *wobei* $\mathscr{F}'$ *die Fourier-Transformation in den tangentialen Variablen* $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ *bezeichnet.*

f) $T_j(\lambda)$ *ist gegeben durch*

$$(T_j(\lambda)\varphi)(x', x_n) := \int_0^\infty (\mathscr{F}')^{-1}(\partial_n w_j)(x_0, \xi', \lambda, x_n + y_n)\mathscr{F}'(\Lambda_{-2m+m_j}(\lambda)\varphi)(\xi', y_n)dy_n$$

für $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n_+)$.

g) $\widetilde{T}_j(\lambda)$ *ist gegeben durch*

$$(\widetilde{T}_j(\lambda)\varphi)(x', x_n) := \int_0^\infty (\mathscr{F}')^{-1} w_j(x_0, \xi', \lambda, x_n + y_n)\mathscr{F}'(\Lambda_{-2m+m_j+1}(\lambda)\varphi)(\xi', y_n)dy_n$$

für $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n_+)$.

Die Funktionen $w_j(x_0, \xi', \lambda, x_n)$ *sind in Satz 3.22 definiert.*

Beweis. Wir zeigen hier zunächst nur die Darstellung von u; die Eigenschaft $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n_+)$ wird später bewiesen.

Sei $u_1 \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n_+)$ die nach Satz 3.11 eindeutige Lösung von

$$(A_0(D) - \lambda)u_1 = E_0 f \quad \text{in } \mathbb{R}^n,$$

d.h. $u_1 = R(\lambda)E_0 f$. Wir wählen für u den Ansatz $u = u_1 + u_2$. Dann ist u genau dann eine Lösung von (3-7), falls u_2 eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} (A_0(D) - \lambda)u_2 &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n_+, \\ B_{j0}(D)u_2 &= g_j \quad (j = 1, \ldots, m) \text{ auf } \mathbb{R}^{n-1} \end{aligned}$$

mit

$$g_j := -B_{j0}(D)R_+ u_1$$

ist. Wir nehmen partielle Fouriertransformation $\mathscr{F}'$ in x' und erhalten

$$\begin{aligned} (a_0(x_0', \xi', D_n) - \lambda)v(x_n) &= 0 \quad (x_n > 0), \\ b_{j0}(x_0', \xi', D_n)v(x_n)\big|_{x_n=0} &= h_j(\xi') \quad (j = 1, \ldots, m) \end{aligned} \tag{3-8}$$

mit $v(x_n) := v(\xi', x_n) := (\mathscr{F}' u_2(\cdot, x_n))(\xi')$ und $h_j(\xi') := (\mathscr{F}' g_j)(\xi')$. Nach Satz 3.22 ist die eindeutige Lösung von (3-8) gegeben durch

$$v(\xi', x_n) = \sum_{j=1}^m w_j(x_0', \xi', \lambda, x_n)h_j(\xi').$$

Beachte, dass g_j zunächst nur auf $\mathbb{R}^{n-1}$ definiert ist. Durch

$$\widetilde{g}_j := \sum_{|\beta|=m_j} b_{j\beta}(x_0')D^\beta u_1 = \widetilde{B}_{j0}(D)u_1$$

wird jedoch eine Fortsetzung von g_j auf $\mathbb{R}^n_+$ definiert. Dann ist $\widetilde{h}_j := \mathscr{F}'\widetilde{g}_j(\cdot, x_n)$ eine Fortsetzung von h_j.

Für $j = 1, \dots, m$ schreiben wir („Volevich-Trick")

$$\begin{aligned}
w_j(x_0',&\xi', \lambda, x_n)h_j(\xi') \\
&= -\int_0^\infty \partial_n\big[w_j(x_0', \xi', \lambda, x_n + y_n)\widetilde{h}_j(\xi', y_n)\big]\,dy_n \\
&= -\int_0^\infty (\partial_n w_j)(x_0', \xi', \lambda, x_n + y_n)\widetilde{h}_j(\xi', y_n)dy_n \\
&\quad - \int_0^\infty w_j(x_0', \xi', \lambda, x_n + y_n)(\partial_n\widetilde{h}_j)(\xi', y_n)dy_n.
\end{aligned}$$

Für $\lambda \in \mathbb{C}_+ \setminus \{0\}$ gilt $\Lambda_{-s}(\lambda)\Lambda_s(\lambda) = \mathrm{id}_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Wir schreiben daher $\widetilde{g}_j = \Lambda_{-2m+m_j}(\lambda)\Lambda_{2m-m_j}(\lambda)\widetilde{g}_j$ bzw. $\partial_n\widetilde{g}_j = \Lambda_{-2m+m_j+1}(\lambda)\Lambda_{2m-m_j+1}(\lambda)\partial_n\widetilde{g}_j$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
u_2(x', x_n) &= \big((\mathscr{F}')^{-1}v(\cdot, x_n)\big)(x') \\
&= \sum_{j=1}^m \big(T_j(\lambda)\Lambda_{2m-m_j}(\lambda)\widetilde{g}_j + \widetilde{T}_j(\lambda)\Lambda_{2m-m_j+1}(\lambda)\partial_n\widetilde{g}_j\big).
\end{aligned}$$

Setzt man nun $\widetilde{g}_j = \widetilde{B}_{j0}(D)R_+u_1$ und $u = u_1 + u_2$ ein, so erhält man die Darstellung des Satzes.

Da sowohl das Ganzraumproblem als auch (3-8) für $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\}$ eindeutig lösbar ist und die Fourier-Transformation eine Bijektion in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n-1})$ ist, erhält man die eindeutige Lösbarkeit mit Lösung $u = u_1 + u_2$. □

3.25 Satz (Stetigkeit der Hilbert-Transformation)**.** *Durch*

$$(Hf)(x) := \int_0^\infty \frac{f(y)}{x+y}\,dy$$

wird ein stetiger Operator $H \in L(L^p(\mathbb{R}_+))$ definiert.

Beweis. Für $\varepsilon \in (0,1]$ sei $m_\varepsilon := \operatorname{sign}(\xi)e^{-\varepsilon\xi}$ $(\xi \in \mathbb{R})$. Dann gilt $|m_\varepsilon(\xi)| \le 1$ und $|\xi|\cdot|m_\varepsilon'(\xi)| = \varepsilon|\xi|e^{-\varepsilon|\xi|} \le 1$, wobei die Ungleichung $te^{-t} < 1$ $(t > 0)$ verwendet wurde. Nach dem Satz von Michlin ist $\|\mathscr{F}_1^{-1}m_\varepsilon\mathscr{F}_1\|_{L(L^p(\mathbb{R}_+))} \le C$ mit einer von ε unabhängigen Konstanten $C > 0$. Hier ist $\mathscr{F}_1$ die eindimensionale Fourier-Transformation.

Für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ ist

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}_1^{-1} m_\varepsilon \mathscr{F} f)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \operatorname{sign}(\xi) e^{-\varepsilon|\xi|} (\mathscr{F}_1)(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \Big[e^{ix\xi - \varepsilon\xi} \mathscr{F}_1 f(\xi) - e^{-ix\xi-\varepsilon\xi} \mathscr{F}_1 f(-\xi) \Big] d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \big(e^{ix\xi - \varepsilon\xi - iy\xi} - e^{-ix\xi - \varepsilon\xi + iy\xi} \big) f(y) dy \, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \Big(\frac{e^{i(x-y)\xi - \varepsilon\xi}}{i(x-y)-\varepsilon} \Big|_{\xi=0}^\infty - \frac{e^{-i(x-y)\xi-\varepsilon\xi}}{-i(x-y)-\varepsilon} \Big|_{\xi=0}^\infty \Big) f(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \Big(-\frac{1}{i(x-y)-\varepsilon} + \frac{1}{-i(x-y)-\varepsilon} \Big) f(y) dy \\ &= \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{x-y}{(x-y)^2+\varepsilon^2} \, f(y) \, dy.\end{aligned}$$

Definiere zu $\varepsilon \in (0,1]$

$$(H_\varepsilon f)(x) := \int_0^\infty \frac{x+y}{(x+y)^2+\varepsilon^2} \, f(y) \, dy \quad (f \in L^p(\mathbb{R}_+)).$$

Dann ist $H_\varepsilon f(x) = (-\frac{\pi}{i})(\mathscr{F}_1^{-1} m_\varepsilon \mathscr{F}_1 E_0 f)(-x)$ für $x \geq 0$, wobei $E_0 \colon L^p(\mathbb{R}_+) \to L^p(\mathbb{R})$ die triviale Fortsetzung durch 0 ist. Damit folgt

$$\|H_\varepsilon f\|_{L^p(\mathbb{R}_+)} \leq \pi \|\mathscr{F}_1^{-1} m_\varepsilon \mathscr{F} E_0 f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \|E_0 f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}_+)}.$$

Die Folge $H_{1/n}(|f|)$ konvergiert monoton steigend punktweise gegen $H(|f|)$. Nach dem Satz über monotone Konvergenz folgt

$$\begin{aligned}\|Hf\|_{L^p(\mathbb{R}_+)} \leq \|H(|f|)\|_{L^p(\mathbb{R}_+)} &= \lim_{n\to\infty} \|H_{1/n}(|f|)\|_{L^p(\mathbb{R}_+)} \\ &\leq C \| \, |f| \, \|_{L^p(\mathbb{R}_+)} = C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}_+)}.\end{aligned}$$

Somit ist $H \in L(L^p(\mathbb{R}_+))$. □

3.26 Satz ($\mathcal{R}$-Beschränktheit der Lösungsoperatoren). *Sei $\delta > 0$ fest. In der Situation von Satz 3.24 sind folgende Operatorfamilien in $L(L^p(\mathbb{R}^n_+))$ $\mathcal{R}$-beschränkt:*

a) $\{\Lambda_{2m-m_j}(\lambda) \widetilde{B}_{j0}(D) R_+ R(\lambda) E_0 : j = 1, \ldots, m, \; \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+, \; |\lambda| \geq \delta\}$,

b) $\{\Lambda_{2m-m_j-1}(\lambda) \partial_n \widetilde{B}_{j0}(D) R_+ R(\lambda) E_0 : j = 1, \ldots, m, \; \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+, \; |\lambda| \geq \delta\}$,

c) $\{\lambda T_j(\lambda) : j = 1, \ldots, m, \; \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+, \; |\lambda| \geq \delta\}$,

d) $\{\lambda \widetilde{T}_j(\lambda) : j = 1, \ldots, m, \; \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+, \; |\lambda| \geq \delta\}$.

Beweis. a) Da $\Lambda_{2m-m_j}(\lambda)\widetilde{B}_{j0}(D)R_+ = R_+\Lambda_{2m-m_j}(\lambda)\widetilde{B}_{j0}(D)$ und da $R_+ \in L(L^p(\mathbb{R}^n), L^p(\mathbb{R}^n_+))$ und $E_0 \in L(L^p(\mathbb{R}^n_+), L^p(\mathbb{R}^n))$, genügt es, die $\mathcal{R}$-Beschränktheit von

$$\{\Lambda_{2m-m_j}(\lambda)\widetilde{B}_{j0}(\lambda)R(\lambda) : j = 1,\dots,m,\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ |\lambda| \geq \delta\}$$

zu zeigen. Die zugehörige Familie von Symbolen (bezüglich der Fourier-Transformation im $\mathbb{R}^n$) ist gegeben durch

$$m(\xi,\lambda) := (\lambda + |\xi'|^{2m})^{\frac{2m-m_j}{2m}} b_{j0}(x_0',\xi)\big(a_0(x_0',\xi) - \lambda\big)^{-1}.$$

Da $m(\xi,\lambda)$ quasihomogen vom Grad 0 in (ξ,λ) und auf $|\lambda| + |\xi|^{2m} = 1$ beschränkt ist, folgt

$$|D^\alpha m(\xi,\lambda)| \leq C|\xi|^{-|\alpha|} \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ |\lambda| \geq \delta).$$

Nach Korollar 2.29 ist die Operatorfamilie von Teil a) $\mathcal{R}$-beschränkt.

b) wird analog bewiesen.

c) Wir schreiben für $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n_+)$

$$\lambda T_j(\lambda)\varphi = \int_0^\infty k_\lambda(x_n,y_n)\psi(y_n)dy_n$$

mit $\psi \in L^p(\mathbb{R}_+; L^p(\mathbb{R}^{n-1}))$, $\psi(y_n) := \varphi(\cdot, y_n)$ und dem operatorwertigen Integralkern

$$\begin{aligned} k_\lambda(x_n,y_n) &:= (\mathscr{F}')^{-1} m(\xi',\lambda,x_n+y_n)\mathscr{F}' \\ &:= (\mathscr{F}')^{-1}\lambda\partial_n w_j(x_0',\xi',\lambda,x_n+y_n)(\lambda+|\xi'|^{2m})^{-\frac{2m-m_j}{2m}}\mathscr{F}'. \end{aligned}$$

Nach Bemerkung 3.23 b) gilt

$$\begin{aligned} |D_{\xi'}^{\gamma'} m(\xi',\lambda,x_n+y_n) &\leq C(|\xi'| + |\lambda|^{1/2m} \exp\big(-C(|\xi'|+|\lambda|^{1/2m})(x_n+y_n)\big)|\xi'|^{-|\gamma'|} \\ &\leq \frac{C}{x_n+y_n}\,|\xi'|^{-|\gamma'|}. \end{aligned}$$

Hier wurde wieder die Ungleichung $te^{-t} < 1$ $(t > 0)$ benutzt. Wiederum nach Korollar 2.29 folgt $k_\lambda(x_n,y_n) \in L(L^p(\mathbb{R}_+; L^p(\mathbb{R}^{n-1})))$ mit

$$\mathcal{R}\big\{k_\lambda(x_n,y_n) : \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ |\lambda| \geq \delta\big\} \leq \frac{C}{x_n+y_n}\,.$$

Der zu $k_0(x_n,y_n) := \frac{1}{x_n+y_n}$ gehörige skalare Integraloperator

$$(K_0 g)(x_n) := \int_0^\infty \frac{g(y_n)}{x_n+y_n}\,dy_n \quad (g \in L^p(\mathbb{R}_+))$$

ist gerade die Hilbert-Transformation in $L^p(\mathbb{R}_+)$ und damit nach Satz 3.25 ein stetiger Operator $K_0 \in L(L^p(\mathbb{R}_+))$. Nach Satz 2.17 folgt

$$\mathcal{R}\big\{\lambda T_j(\lambda) : \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ |\lambda| \geq \delta\big\} \leq C\|K_0\|_{L(L^p(\mathbb{R}_+))} < \infty.$$

d) folgt analog zu c). $\square$

3.27 Satz ($\mathcal{R}$-Beschränktheit für das Modellproblem)**.** *Das Randwertproblem* (A, B) *sei parabolisch. Sei* $x_0' \in \partial G$ *fest und seien zu* x_0' *gehörige Koordinaten gewählt. Für die* L^p*-Realisierung* $A_B^{(0)}$ *des Modellproblems* $(A_0(x_0', D), B(x_0', D))$ *gilt* $\rho(A_B^{(0)}) \supset \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\}$*, und für jedes* $\delta > 0$ *ist die Familie*

$$\big\{\lambda(\lambda - A_B^{(0)})^{-1} : \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ |\lambda| \geq \delta\big\} \subset L(L^p(\mathbb{R}^n_+))$$

$\mathcal{R}$*-beschränkt. Insbesondere besitzt* $A_B^{(0)} - \delta$ *für jedes* $\delta > 0$ *maximale* L^q*-Regularität für alle* $1 < q < \infty$ *(und erzeugt eine holomorphe Halbgruppe).*

Beweis. Ersetzt man im Beweis von Satz 3.26 die Operatoren $\lambda T_j(\lambda)$ durch $D^\alpha T_j(\lambda)$ (und analog für $\widetilde{T}_j(\lambda)$) mit $|\alpha| = 2m$, so sieht man, dass die durch die Lösungsoperatoren eine Lösung $u \in W_p^{2m}(\mathbb{R}^n_+)$ definiert wird. Damit handelt es sich tatsächlich um die Resolvente.

Die $\mathcal{R}$-Beschränktheit folgt direkt aus der Resolventendarstellung von Satz 3.24 und der $\mathcal{R}$-Beschränktheits-Aussagen von Satz 3.26. □

Literatur

[1] Adams, R. A., Fournier, J.: *Sobolev spaces.* 2nd edition, Academic Press, Amsterdam etc., 2003.

[2] Amann, H.: *Linear and quasilinear parabolic problems I.* Birkhäuser, Basel etc., 1995.

[3] Amann, H., Escher, J.: *Analysis III.* Birkhäuser, Basel etc., 2001.

[4] Arendt, W., Batty, C. J. K., Hieber, M., Neubrander, F.: *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems.* Birkhäuser, Basel etc., 2001.

[5] Davies, E. B.: *One-parameter semigroups.* Academic Press London etc., 1980.

[6] Denk, R., Hieber, M., Prüss, J.: R-boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type. *Mem. Amer. Math. Soc.* **788** (2003), 114 pp.

[7] Engel, K.-J., Nagel, R.: *One-parameter semigroups for linear evolution equations.* Springer, New York etc., 2000.

[8] Gohberg, I., Goldberg, S., Kaashoek, M. A.: *Classes of linear operators. I.* Birkhäuser, Basel etc., 1990.

[9] Hörmander, L.: *The analysis of linear partial differential operators*, I-IV. Springer-Verlag Berlin 1976.

[10] Kunstmann, P., Weis, L.: Maximal L_p-regularity for parabolic equations, Fourier multiplier theorems and H^∞-functional calculus. *Lect. Notes Math.* **1855**, 65-312 (2004).

[11] Lunardi, A.: *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems.* Birkhäuser, Basel, 1995.

[12] Pazy, A.: *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer, New York etc., 1992.

[13] Tanabe, H.: *Equations of evolution.* Pitman, London etc., 1979.

[14] Wloka, J.: *Partielle Differentialgleichungen.* Teubner-Verlag Stuttgart 1982.

Index