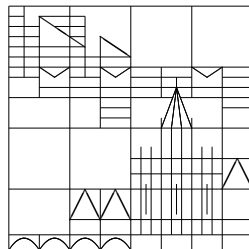


**Skript zum Theorie-Teil**  
**der Vorlesung**  
**Theorie und Numerik**  
**partieller Differentialgleichungen**

**Wintersemester 2011/12**

**Robert Denk**



Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 7. 11. 2011



## Inhaltsverzeichnis

1	Ein erster Überblick . . . . .	5
	a) Grundbegriffe und Beispiele . . . . .	5
	b) Lösungsansätze . . . . .	9
2	Elementare Lösungsmethoden . . . . .	16
	a) Gleichungen erster Ordnung . . . . .	16
	b) Typeinteilung bei linearen Gleichungen zweiter Ordnung . . . . .	20
3	Grundlösungen und elliptische Gleichungen . . . . .	25
	a) Faltung von Distributionen . . . . .	25
	b) Existenz einer Grundlösung . . . . .	28
	c) Maximum- und Minimumprinzip . . . . .	31
4	Parabolische Theorie . . . . .	33
	a) Grundlegendes zur Fourier-Transformation . . . . .	33
	b) Die Wärmeleitungsgleichung . . . . .	36
	c) Die Gleichung von Black und Scholes . . . . .	40
	d) Maximumprinzip . . . . .	44
	Literatur . . . . .	46
5	Hyperbolische Theorie . . . . .	47
	a) Die eindimensionale Wellengleichung . . . . .	47
	b) Die Wellengleichung im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	49
	c) Die Wellengleichung im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	51
	d) Sobolevräume . . . . .	53
	e) Die Wellengleichung im $\mathbb{R}^n$ , Energiegleichung . . . . .	56
6	Hilbertraum-Methoden: Dirichlet-Formen . . . . .	60
	a) Die Randwertaufgabe zu $-\Delta + 1$ . . . . .	60
	b) Allgemeinere Differentialoperatoren . . . . .	62
	Literatur . . . . .	65



# 1. Ein erster Überblick

**1.1 Worum geht's?** In diesem einleitenden Abschnitt sollen wichtige Beispiele partieller Differentialgleichungen vorgestellt werden und mögliche Ansätze zu ihrer Lösung diskutiert werden. Auch wenn nicht alle Ansätze im Laufe dieser Vorlesung vollständig diskutiert werden können, sollte man hier einen ersten Überblick erhalten. Auch sollte hier klar werden, wie komplex (und damit interessant) partielle Differentialgleichungen sind.

## a) Grundbegriffe und Beispiele

Ziel ist es, eine Einführung in die Theorie partieller Differentialgleichungen zu geben und sich dabei von Beispielen aus der mathematischen Physik leiten zu lassen, was auch aus historischer Sicht nicht ungerechtfertigt ist. Bekannt sind gewöhnliche Differentialgleichungen, etwa zum freien Fall: Gesucht wird eine Funktion  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , welche

$$y''(t) = -g, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1$$

erfüllt, dabei sind  $y_0$  und  $y_1$  sowie  $g$  vorgegebene reelle Werte.

Nun sind aber die meisten Phänomene von mehr als nur einer Variablen abhängig, das heißt es treten partielle Ableitungen bzw. partielle Differentialgleichungen auf.

Zunächst soll der Begriff der partiellen Differentialgleichung formal geklärt werden. Im folgenden sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig gegeben und  $G$  eine offene, nichtleere Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ .

**1.2 Definition.** Für  $m, l \in \mathbb{N}$  sei

$$F : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}^l$$

eine Abbildung, an welche zunächst keine weiteren „Anforderungen“ gestellt werden. Sei nun  $k \in \mathbb{N}_0$ . Für  $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$  heißt

$$F(x, (\partial^\alpha u(x))_{0 \leq |\alpha| \leq k}) = 0 \tag{1-1}$$

- (i) *partielle Differentialgleichung (PDGL) der Ordnung  $k$*  für eine Funktion  $u : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ , sofern  $l = 1$  gilt.
- (ii) *System von  $l$  partiellen Differentialgleichungen der Ordnung  $k$*  für eine Funktion  $u : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ , sofern  $l > 1$  gilt.

Dabei und im folgenden verwenden wir die Multiindex-Schreibweise: Es ist

$$\partial^\alpha u(x) := \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} u(x) \quad (\alpha \in \mathbb{N}_0^n).$$

Andere verwendete Schreibweisen sind

$$u_t := \partial_t u := \frac{\partial}{\partial t} u, \quad \partial_i u := u_{x_i} := \frac{\partial}{\partial x_i} u.$$

Ist  $n = 1$ , so handelt es sich bei (1-1) offenbar um ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen, mit welchen wir uns hier aber nicht weiter befassen werden.

Man sucht somit eine hinreichend differenzierbare Funktion  $u$ , so dass (1-1) für alle  $x \in G$  gilt. (z.B.  $u \in C^k(G, \mathbb{R}^m)$ ). Eine solche Funktion  $u$  heißt dann (klassische) *Lösung* oder *Integral* von (1-1). Da die Existenz einer klassischen Lösung in vielen Fällen nicht gesichert ist, gibt es viele weitere Lösungsbegriffe wie etwa schwache Lösungen. Diese werden später besprochen. Zur Gleichung (1-1) kommen in der Regel vorgegebene Werte - Anfangswerte und oder Randwerte - auf Untermannigfaltigkeiten in  $G$  hinzu, welche zumindest die Eindeutigkeit der Lösung sichern sollen.

**1.3 Beispiel.** Das folgende Beispiel zeigt, dass der Lösungsbegriff bei partiellen Differentialgleichungen sehr präzise definiert werden muss. Sei etwa  $G = (0, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$  und  $\varphi(x, y) := x^2$  ( $(x, y) \in \partial G$ ). Betrachte das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= 0 \quad ((x, y) \in G), \\ u(x, y) &= \varphi(x, y) \quad ((x, y) \in \partial G). \end{aligned}$$

Dieses Randwertproblem besitzt keine Lösung  $u \in C^2(\overline{G})$ . Denn falls es eine derartige Lösung gäbe, so wäre  $u_{xx}(x, 0) = \varphi_{xx}(x, 0) = 2$  für alle  $x \in [0, 1]$  und damit insbesondere  $u_{xx}(0, 0) = 2$ . Genauso gilt  $u_{yy}(0, 0) = \varphi_{yy}(0, 0) = 0$ , und man erhält  $\Delta u(0, 0) = u_{xx}(0, 0) + u_{yy}(0, 0) = 2$  im Widerspruch zu  $\Delta u = 0$ .

Die folgende Definition und viele weitere Aussagen werden nur für skalare PDGL (d.h. für  $m = 1$ ) formuliert; die Übertragung auf Systeme von PDGL ist aber ohne wesentliche Änderung möglich. Ebenso kann man komplexwertige Koeffizienten und Lösungen betrachten.

**1.4 Definition.** a) Die PDGL (1-1) heißt linear, falls sie die Gestalt

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x) = f(x)$$

hat, wobei  $f, a_\alpha: G \rightarrow \mathbb{R}$  gegebene Funktionen sind. Im Fall  $f = 0$  heißt obige Gleichung homogen.

b) Die PDGL (1-1) heißt semilinear, falls sie die Form

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x) + a_0(x, (\partial^\alpha u(x))_{0 \leq |\alpha| \leq k-1}) = 0$$

besitzt.

c) Die PDGL (1-1) heißt quasilinear, falls sie die Form

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, (\partial^\alpha u(x))_{0 \leq |\alpha| \leq k-1}) \partial^\alpha u(x) + a_0(x, (\partial^\alpha u(x))_{0 \leq |\alpha| \leq k-1}) = 0$$

besitzt.

d) Falls die PDGL (1-1) nichtlinear in den höchsten Ableitungen ist (d.h. falls keiner der Fälle a)-c) zutrifft), heißt die Gleichung stark nichtlinear oder voll nichtlinear.

**1.5 Beispiele.** a) (**Potentialgleichung**) Für eine Funktion  $u : G \rightarrow \mathbb{R}$  ist die Potentialgleichung oder Laplace-Gleichung gegeben durch

$$\Delta u(x) \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x) = 0.$$

Hier ist  $u$  etwa ein Potential, eine (stationäre) Temperatur, eine Konzentration oder ein Druck. Es handelt sich um eine sog. elliptische Dgl.

b) (**Wellengleichung**) Für eine Funktion  $u : \mathbb{R} \times G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G \subset \mathbb{R}^n$  ist die Wellengleichung gegeben durch

$$u_{tt}(t, x) - \Delta u(t, x) = 0 \quad (\text{linear}),$$

$$u_{tt} - \operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = 0 \quad (\text{nichtlinear}).$$

Hier beschreibt  $t$  die Zeit,  $x$  den Ort und  $u = u(t, x)$  etwa die Auslenkung eines Stabes ( $n = 1$ ), einer Membran ( $n = 2$ ) oder die Ausbreitung von Schall oder elektromagnetischen Wellen ( $n = 3$ ). Auf physikalische Konstanten wird soweit möglich verzichtet. Die Wellengleichung ist der Prototyp einer hyperbolischen Gleichung.

c) (**Wärmeleitungsgleichung**) Für eine Funktion  $u : \mathbb{R} \times G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G \subset \mathbb{R}^n$  ist die Wärmeleitungsgleichung gegeben durch

$$u_t(t, x) - \Delta u(t, x) = 0.$$

In Anwendungen beschreibt  $u = u(t, x)$  die Temperatur bzw. die Konzentration von Substanzen. Diese Gleichung ist der Mustervertreter einer parabolischen Gleichung.

d) (**Populations- bzw. Reaktionsdiffusionsgleichungen**)

Für Funktionen  $u_1, u_2 : \mathbb{R}_+ \times G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G \subset \mathbb{R}^n$  sind diese oft von der Gestalt

$$\begin{aligned} \partial_t u_1(t, x) - \Delta u_1(t, x) &= f_1(t, x, u_2(t, x)) \\ \partial_t u_2(t, x) - \Delta u_2(t, x) &= f_2(t, x, u_1(t, x)). \end{aligned}$$

Hierbei beschreiben  $u_1, u_2$  die Populationen bzw. Konzentrationen zum Zeitpunkt  $t$  am Ort  $x$ .

e) **Black-Scholes-Gleichung** Für eine Funktion  $V : (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , ist die Black-Scholes-Gleichung gegeben durch

$$V_t(t, s) + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 V_{ss}(t, s) + rsV_s(t, s) - rV(t, s) = 0.$$

Hierbei sind  $\sigma, r$  feste Parameter,  $V$  beschreibt den Wert der Option,  $s : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto s(t)$  den Wert des Papiers.

f) **(Schrödingergleichung)** Die Differentialgleichung

$$u_t - i\left(\Delta u + \frac{1}{|x|}u\right) = 0$$

heißt Schrödingergleichung und findet Anwendung etwa in der Quantenmechanik. Das Potential  $\frac{1}{|x|}$  kann je nach Modell auch entfallen oder durch eine anderes Potential ersetzt werden. Mit physikalischen Konstanten lautet die Schrödinger-Gleichung ohne Potential

$$i\hbar\partial_t u + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta u = 0,$$

wobei  $\hbar$  das Plancksche Wirkungsquantum und  $m$  die Masse ist.

g) **(Maxwell-Gleichungen)** Hierbei handelt es sich um ein System von PDGL für Funktionen  $E, H : \mathbb{R} \times G \rightarrow \mathbb{R}^3$ , welches in einfachster Form gegeben ist durch

$$E_t - \operatorname{rot}H = 0, \quad H_t + \operatorname{rot}E = 0.$$

Dabei ist  $E$  die elektrische Feldstärke und  $H$  die magnetische Feldstärke.

h) **Navier-Stokes-Gleichungen** Auch hierbei handelt es sich um ein System für Funktionen  $u : (0, \infty) \times G \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $p : (0, \infty) \times G \rightarrow \mathbb{R}$ , gegeben durch

$$u_t + (u \cdot \nabla)u - \Delta u = -\nabla p, \quad \operatorname{div} u = 0. \quad (1-2)$$

Dies ist eine nichtlineare Gleichung, ihre Linearisierung (d.h. ohne  $(u \cdot \nabla)u$ ) heißt Stokes-Gleichung.

Die Lösbarkeit der Navier-Stokes-Gleichung ist auch Gegenstand eines der sieben Millenium-Probleme, deren Lösung mit 1 Million \$ dotiert ist. Genauer geht es um folgende Fragestellung: Setzt man z.B.  $G = \mathbb{R}^3$  und fügt man dem System (1-2) noch die Anfangsbedingung

$$u|_{t=0} = u_0 \quad (1-3)$$

hinzu, so ist bekannt, dass für genügend reguläre Anfangswerte für das System (1-2)-(1-3) global schwache Lösungen (z.B. für  $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ ) bzw. zeitlich lokal klassische Lösungen (z.B. für  $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ ) existieren. Allerdings ist i.A. die Frage nach der Eindeutigkeit von schwachen Lösungen bzw. nach der Existenz von global klassischen Lösungen seit über 70 Jahren unbeantwortet. Die Aufgabe des Millenium-Problems liegt im Nachweis der Existenz global klassischer Lösungen bzw. in der Angabe eines Gegenbeispiels.



Damit sind nur wenige in möglichst einfacher Darstellung auftretende Beispiele gewählt. Viele weitere Beispiele kommen aus der Geometrie, der Chemie sowie der Biologie. An den Beispielen kann man aber bereits erkennen, dass die Theorie der Partiellen Differentialgleichungen sehr viele Aspekte haben muss, um alle diese verschiedenen Phänomene beschreiben zu können. Typische Fragen, die gestellt werden sind dann von der Art:

- (i) Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen
  - (a) Gibt es Lösungen und wenn ja, in welchem Sinn („klassisch“ oder „schwach“)?
  - (b) Gibt es lokale oder gar globale Lösungen?
  - (c) Welche Kriterien müssen erfüllt sein?
- (ii) Hängen die Lösungen stetig von den Daten ab??
- (iii) Wie können Lösungen dargestellt werden?
- (iv) Wie können Lösungen explizit berechnet werden?
- (v) Wie ist das „qualitative“ Verhalten von Lösungen?

## b) Lösungsansätze

Um PDGL zu lösen, gibt es keine Standardmethode, ebenso wenig wie es eine einheitliche Theorie von PDGL gibt (noch weniger als bei den gewöhnlichen Dgl.). Selbst bei linearen PDGL ist es im allgemeinen nicht möglich, eine Lösung direkt zu berechnen. In obigen Beispielen haben wir die einfachsten Beispiele parabolischer, elliptischer und hyperbolischer Gleichungen kennen gelernt. Das Lösungsverhalten, auch schon die Frage der Existenz und Eindeutigkeit, dieser drei Grundtypen von PDGL ist recht unterschiedlich. Aber es gibt auch viele Gleichungen, welche in keine der Klassen fallen und eine einzelne Betrachtung erfordern. Noch schwerer ist es, Aussagen über nichtlineare Gleichungen zu treffen, die Theorie nichtlinearer PDGL ist eines der größten Forschungsgebiete innerhalb der Mathematik.

Die genannten Typen von PDGL werden für lineare Gleichungen zweiter Ordnung in Abschnitt 2.2 definiert, allgemeinere Definitionen etwa parabolischer Gleichungen folgen später.

Nun sollen einige Lösungsansätze kurz vorgestellt und diskutiert werden. Dabei sind die Aussagen nicht mathematisch präzise formuliert und zum Teil auch recht subjektiv. Einige Ansätze werden wir im Verlauf dieser Vorlesung und ihren Fortsetzungen kennen lernen.

**(i) Gleichungen erster Ordnung.** Bei einfachen Beispielen von linearen PDGL erster Ordnung (etwa für Funktionen  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ) kann man Parametrisierungen betrachten, wodurch die Gleichungen im wesentlichen auf gewöhnliche Dgl. zurückgeführt werden. Dies ist die Methode der Charakteristiken, welche in Abschnitt 2 a) besprochen wird. Obwohl die Methode auch auf nichtlineare Gleichungen ausgeweitet werden kann, ist die Anwendbarkeit relativ eingeschränkt.

**(ii) Potenzreihenansatz bei analytischen Koeffizienten.** Wie bei gewöhnlichen Dgl. auch, kann man einen Lösungsansatz durch Potenzreihenentwicklung versuchen. Dabei handelt es sich jetzt um eine Potenzreihe in mehreren Variablen, Voraussetzung ist, dass die Koeffizienten reell analytisch sind. Der zugehörige Satz von Cauchy und Kovalevskaya wird in Abschnitt 2 b) besprochen.

**(iii) Potentialtheorie.** Bei diesem Ansatz wird auf klassische Differenzierbarkeit (zunächst) verzichtet, man betrachtet Lösungen in der Menge der Distributionen. Als Beispiel sei die Potentialgleichung

$$\Delta u = f$$

in  $\mathbb{R}^3$  genannt. Man sucht eine Grundlösung, d.h. eine distributionelle Lösung der Gleichung  $\Delta g = \delta$ , wobei  $\delta$  die Dirac-Distribution ist. Verwendet man wichtige Eigenschaften der Faltung, nämlich

$$\Delta(f * g) = f * (\Delta g)$$

und

$$u * \delta = u,$$

so erhält man für  $u := f * g$  die Gleichung

$$\Delta u = \Delta(f * g) = f * (\Delta g) = f * \delta = f.$$

Also ist  $u$  eine „Lösung“ der Potentialgleichung.

Es ist klar, dass man bei diesem Ansatz zunächst einige Begriffe klären muss, etwa den Begriff der Distribution. Eng verwandt mit diesem Ansatz ist der Begriff der Greenschen Funktion, der auch schon aus den gewöhnlichen Dgl. bekannt sein sollte. Auch dort wurde die Lösung als Integral geschrieben wie bei der Faltung.

Der Potentialansatz ist wesentlich allgemeiner als man im ersten Moment meinen möchte. Ein Nachteil dieses Ansatzes ist, dass man zunächst nicht auf klassische Lösungen kommt (die Differenzierbarkeit der Lösung muss separat untersucht werden), was allerdings bei fast allen wichtigen Lösungsansätzen der Fall ist. Ein weiterer Nachteil besteht darin, dass man die Grundlösung bzw. die Greensche Funktion finden muss, was sehr von der Gleichung abhängt. Es ist relativ schwer, allgemeine Aussagen über Klassen von PDGL mit dieser Methode zu beweisen. Wenn man allerdings die Greensche Funktion kennt, kann man recht präzise Aussagen über

die Lösung treffen. Dies liegt auch daran, dass die Lösung als Faltung, d.h. als Integral geschrieben wird und Integraloperatoren relativ gut zugänglich sind. Die Potentialmethode kann daher auch gut für nichtglatte Gebiete (d.h. im Fall eines nichtglaten Randes  $\partial G$ ) verwendet werden. Im konkreten Fall sind oft recht technische Abschätzungen zu beweisen (aber auch das ist bei fast allen Methoden der Fall).

Da die Grundlösungen im allgemeinen Singularitäten aufweisen, ist dieser Ansatz eng verbunden mit der Theorie singularer Integraloperatoren, einem großen Gebiet innerhalb der Operatortheorie. Wir werden die Potentialmethode exemplarisch in diesem Semester kennen lernen.

**(iv) Schwache Lösungen.** Eine Möglichkeit, auch die Lösbarkeit partieller Differentialgleichungen zu beweisen, verwendet den Begriff der schwachen Lösung. Dabei wird auf die klassische Differenzierbarkeit verzichtet und die Lösung in einem geeigneten Sobolevraum gesucht. Statt den Differentialoperator selbst zu betrachten, studiert man die zugehörige Bilinearform, die Dirichlet-Form. Dies hat den Vorteil, dass weniger Glattheitsbedingungen an die Lösung gestellt werden müssen. Bei einem Operator zweiter Ordnung ist die schwache Lösung nur im Sobolevraum erster Ordnung. Die Lösbarkeit folgt nun aus Sätzen über Bilinearformen in Hilberträumen, wie etwa den Satz von Riesz oder den Satz von Lax-Milgram.

**(v) Energieabschätzungen.** Wir betrachten man das sog. Anfangsrandwertproblem für die Wellengleichung in einem Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$ , gegeben durch

$$\begin{aligned} u_{tt}(t, x) - \Delta u(t, x) &= 0 \quad ((t, x) \in [0, \infty) \times G, \\ u(t, x) &= 0 \quad ((t, x) \in [0, \infty) \times \partial G), \\ u(0, x) &= u_0(x) \quad (x \in G), \\ u_t(0, x) &= u_1(x) \quad (x \in G). \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass für jede Lösung die Energie

$$E(t) := \|u_t(t, \cdot)\|_{L^2(G)}^2 + \|\nabla u(t, \cdot)\|_{L^2(G)}^2$$

unabhängig von  $t$ , also konstant ist. Dieser Ansatz der Energieabschätzungen kann (für allgemeinere Gleichungen) insbesondere dazu verwendet werden, um Aussagen über die Lebensdauer einer Lösung und die Stabilität zu gewinnen. Eng mit diesem Ansatz verbunden ist der Ansatz der Lyanpunov-Funktion, der auch schon für gewöhnliche Dgl. diskutiert wurde. Diese Methode ist auch gut geeignet für nichtlineare Gleichungen (insbesondere für hyperbolische Gleichungen). Der Nachteil bzw. der Aufwand hierbei ist es, einen geeigneten Energiebegriff zu finden und die Abschätzung der Energie zu beweisen, was wiederum oft an der speziellen Gleichung liegt.

**(vi) Ansatz durch Fourierreihen.** Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t + Au = 0$$

mit  $A := -\Delta$ . Der Reihenansatz betrachtet zunächst Lösungen, bei welchen die Variablen  $x$  und  $t$  separiert sind, d.h. Lösungen der Form

$$u(t, x) = \psi(t)\varphi(x).$$

Wenn nun  $\varphi$  eine Eigenfunktion von  $A$  ist, d.h. wenn ein Eigenwert  $\lambda$  existiert mit

$$A\varphi = \lambda\varphi,$$

so ist  $u(t, x) = e^{-\lambda t}\varphi(x)$  eine Lösung der Gleichung. Im allgemeinen wird diese Lösung noch nicht die richtigen Anfangs- und Randbedingungen (die oben weggelassen wurden) erfüllen. Daher wird man alle Eigenwerte  $\lambda_n$  von  $A$  suchen und einen Reihenansatz der Form

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\varphi_n(x)$$

wählen. Hierbei seien  $\varphi_n$  Eigenfunktionen zu  $\lambda_n$ .

Dieser hier nur sehr grob beschriebene Ansatz kann auch bei wesentlich allgemeineren Differentialoperatoren  $A$  funktionieren. Wichtige Fragen in diesem Zusammenhang sind:

- Wie ist der zu einer PDGL gehörige Differentialoperator  $A$  definiert?
- Besitzt  $A$  Eigenfunktionen, oder etwas allgemeiner: wie sieht das Spektrum von  $A$  aus?
- Ist jede Lösung durch obigen Reihenansatz darstellbar? Das ist die Frage nach der Vollständigkeit der Eigenfunktionen.
- Wie gut ist die Konvergenz in obiger Reihe? Für gute Konvergenz (etwa gleichmäßige Konvergenz) muss man oft aufwändige Abschätzungen beweisen.

Der Reihenansatz benutzt Operatortheorie, wie bereits an obigen Begriffen wie Spektrum klar wird. Er funktioniert im wesentlichen nur bei PDGL, welche in einem beschränkten Gebiet  $G$  (mit entsprechenden Randbedingungen) gegeben sind. In konkreten Fällen kann es schwer oder unmöglich sein, die Eigenfunktionen zu finden. Wenn eine explizite Angabe der Eigenfunktionen möglich ist (etwa in Rechteckgebieten oder Sektoren), kann man die Lösbarkeit und die Lösungen oft recht gut analysieren. Auch falls die Eigenfunktionen nicht explizit angegeben werden können, kann man mit diesem Ansatz eine ganze Reihe abstrakter Aussagen treffen. Damit eignet sich der Fourierreihen-Ansatz für viele Gleichungen.

**(vii) Ansatz durch Fourier-Transformation.** Als Beispiel betrachten wir eine Variante der Potentialgleichung

$$-\Delta u + u = f.$$

Zur Lösung verwendet man die Fourier-Transformation im  $\mathbb{R}^n$ , welche definiert ist durch

$$(\mathcal{F}u)(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Die Theorie der Fourier-Transformation besagt insbesondere, dass

$$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

ein isometrischer Isomorphismus ist (Satz von Plancherel). Außerdem kann die Fourier-Transformierte der Ableitung berechnet werden durch

$$[\mathcal{F}(\partial^\alpha u)](\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha (\mathcal{F}u)(\xi).$$

Eingesetzt erhält man in unserem Beispiel

$$\mathcal{F}(-\Delta u + u)(\xi) = (|\xi|^2 + 1)(\mathcal{F}u)(\xi),$$

und eine Lösung obiger Gleichung ist gegeben durch

$$u := \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{(\mathcal{F}f)(\xi)}{|\xi|^2 + 1} \right].$$

Tatsächlich funktioniert dieser Ansatz bei vielen PDGL sehr gut. Durch den Satz von Plancherel ist  $L^2(\mathbb{R}^n)$  ein kanonischer Grundraum für diesen Ansatz, und die daraus abgeleiteten Sobolevräume bilden einen zentralen Begriff in der Theorie PDGL.

Da die Fourier-Transformation nur im ganzen Raum  $\mathbb{R}^n$  definiert ist, muss man für Randwertprobleme diesen Ansatz modifizieren. Auch wenn die Koeffizienten der PDGL von  $x$  abhängen, wird der Ansatz komplizierter. Sei etwa

$$Au(x) := \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x)$$

ein partieller Differentialoperator mit ortsabhängigen Koeffizienten. Dann definiert man das Symbol von  $A$  durch

$$a(x, \xi) := \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) (i\xi)^\alpha.$$

Das Symbol obiger Gleichung ist somit  $|\xi|^2 + 1$ . In Anlehnung an die Formel der inversen Fourier-Transformation

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

definiert man zu obiger Gleichung den Lösungsansatz

$$u(x) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\mathcal{F}f)(\xi)}{a(x, \xi)} e^{ix\xi} d\xi.$$

Dies ist ein Beispiel eines sog. Pseudodifferentialoperators. Die Theorie derartiger Operatoren ist sehr kompliziert, aber auch sehr nützlich für PDGL.

Der Ansatz durch Fourier-Transformation und seine Varianten (etwa über Laplace-Transformation) ist einer der allgemeinsten Ansätze etwa für parabolische Gleichungen. Der zugrunde gelegte Lösungsbegriff ist die distributionelle Lösung, wobei die Distributionen Elemente gewisser Sobolevräume sind. Man kann damit Aussagen über Lösungen treffen, ohne die Lösung selbst berechnen zu müssen. Es besteht eine enge Verbindung zur Potentialtheorie. Ein Nachteil dieses Ansatzes ist auch seine Allgemeinheit: Für konkrete Gleichungen führen andere Ansätze oft auf stärkere Aussagen.

**(viii) Anwendung des Spektralsatzes und der Halbgruppentheorie.** Wir betrachten nochmals die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \Delta u = 0$$

im  $\mathbb{R}^n$  mit dem Anfangswert

$$u(0, x) = u_0(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Würde man den Operator  $\Delta$  durch eine Matrix  $A \in \mathbb{C}^{k \times k}$  ersetzen, wäre eine Fundamentalmatrix der entstehenden Dgl. gegeben durch

$$Z(t) := \exp(tA).$$

Es liegt also nahe, auch hier die Lösung  $u$  zu definieren durch

$$u(t, x) := \exp(t\Delta)u_0(x).$$

Damit stellt sich die Frage, wie  $\exp(t\Delta)$  definiert werden kann. In diesem Fall ist kein Reihenansatz wie bei Matrizen möglich (der Laplace-Operator besitzt keine endliche Operatornorm). Mit Hilfe des Spektralsatzes, einem zentralen Ergebnis der Funktionalanalysis, ist es jedoch möglich, Funktionen von selbstadjungierten Operatoren zu definieren. Insbesondere können Funktionen wie  $\exp(t\Delta)$  und  $\cos(t\sqrt{\Delta})$  definiert werden und damit Lösungen von Wärmeleitungs- und Wellengleichung angegeben werden.

Falls der Spektralsatz anwendbar ist, handelt es sich um die vielleicht beste Methode, PDGL zu lösen. Viele Eigenschaften der Lösung sind mit diesem Satz beweisbar, der in (v) beschriebene Ansatz durch Fourier-Reihen kann als Spezialfall des Spektralsatzes betrachtet werden. Selbst zur Fourier-Transformation, wie sie in (vi) beschrieben wurde, besteht eine Querverbindung.

Der Spektralsatz ist zunächst beschränkt auf selbstadjungierte Operatoren. Falls der Operator nicht selbstadjungiert ist, gibt es allgemeinere Zugänge zur Definition von  $\exp(t\Delta)$ , welche unter dem Begriff der Halbgruppentheorie zusammengefasst

werden. Die Halbgruppentheorie ist insbesondere wichtig, falls die PDGL statt in  $L^2$  in  $L^p$  mit  $p \neq 2$  betrachtet werden soll. In diesem Fall verliert man die Hilbertraum-Struktur ( $L^p(\mathbb{R}^n)$  ist nur noch Banachraum), und selbstadjungierte Operatoren sind nur in Hilberträumen definiert.

Selbst wenn der Spektralsatz anwendbar ist, wie es in vielen Beispielen aus der Physik der Fall ist, müssen die PDGL im Einzelfall noch recht genau untersucht werden, um wirklich gute Aussagen zu erhalten. Bei diesem wie auch bei allen anderen Ansätzen bleibt immer noch viel zu tun, und es gibt auf dem Gebiet der PDGL wesentlich mehr offene Fragen als Antworten.

## 2. Elementare Lösungsmethoden

**2.1 Worum geht's?** In diesem Abschnitt werden erste Lösungsmethoden für partielle Differentialgleichungen vorgestellt. Bei Gleichungen erster Ordnung im  $\mathbb{R}^2$  kann letztlich eine Reduktion auf gewöhnliche Differentialgleichung erfolgen; aus den entsprechenden Sätzen über die eindeutige Lösbarkeit gewöhnlicher Differentialgleichungen erhält man die *lokale* Lösbarkeit der PDGL. Ebenfalls eine lokale Lösbarkeit wird im Satz von Cauchy-Kovalevskaya bewiesen, bei welchem der Potenzreihenansatz verwendet wird. Ebenfalls in diesem Abschnitt findet sich eine erste Einteilung PDGL zweiter Ordnung, bei welchen die wichtigsten Typen vorgestellt werden.

### a) Gleichungen erster Ordnung

Wie bisher sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet. Nach dem vorigen Abschnitt verstehen wir unter einer linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung für eine Funktion  $u: G \rightarrow \mathbb{R}$  eine Gleichung der Art

$$a(x)^T \nabla u(x) = b(x)u(x) + c(x). \quad (2-1)$$

Wir setzen nun zusätzlich  $a \in C^1(G; \mathbb{R}^n)$ ;  $b, c \in C(G; \mathbb{R})$  und  $a(x) \neq 0$  für  $x \in G$  voraus. Wie schon erwähnt werden meist Anfangs- und oder Randbedingungen an die gesuchte Funktion  $u$  gestellt. Ein klassisches Problem mit dem wir uns befassen wollen ist die *Cauchysche Anfangswertaufgabe*:

$$\begin{aligned} a^T \nabla u &= bu + c, \\ u|_{\Gamma} &= f \end{aligned} \quad (2-2)$$

dabei ist  $\Gamma$  eine Hyperebene (Abb. 1) in  $G$  und  $f \in C^1(\Gamma, \mathbb{R})$  eine gegebene Funktion. Für das Verständnis ist es nun ausreichend, wenn wir uns auf den Fall  $n = 2$  beschränken. Demnach ist  $\Gamma$  eine glatte Kurve im  $\mathbb{R}^2$ , welche (etwa) durch  $t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$  für  $t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ , mit  $\gamma'(t) \neq 0$  für alle  $t \in [\alpha, \beta]$ , parametrisiert wird. Wir schreiben  $\Gamma = [\gamma]$ . Für eine Lösung  $u = u(x, y)$  von (2-2) gilt notwendigerweise  $u(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = f(\gamma(t))$  und durch Differenzieren erhält man weiter

$$u_x(\gamma(t))\gamma_1'(t) + u_y(\gamma(t))\gamma_2'(t) = \frac{d}{dt}f(\gamma(t)).$$

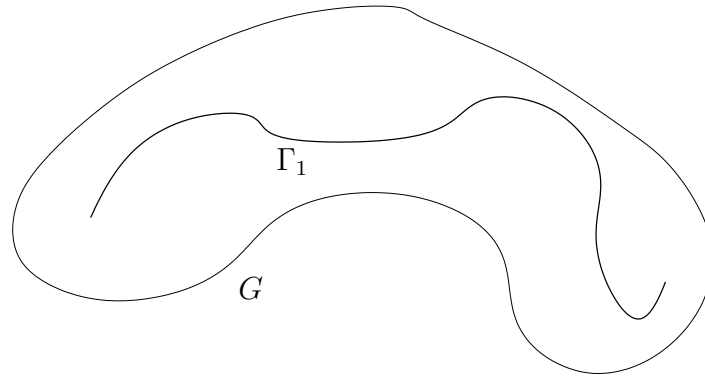
Nach Voraussetzung muss aber auch

$$u_x a_1 + u_y a_2 = bu + c = bf + c$$

auf  $\Gamma$  gelten. Damit haben wir ein Gleichungssystem für  $u_x(\gamma(t))$ ,  $u_y(\gamma(t))$  erhalten. Bekanntlich ist dieses eindeutig lösbar, falls die Determinante der zugehörigen Koeffizientenmatrix nicht verschwindet, also falls

$$\gamma_1' a_2 - \gamma_2' a_1 \neq 0$$



Abbildung 1: Beispiel für eine Hyperebene  $\Gamma_1$  in einem Gebiet  $G$ .

gilt.

**2.2 Definition.** Sei  $\Gamma = [\gamma]$  eine Kurve, die durch  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$  ( $t \in [\alpha, \beta]$ ) parametrisiert wird.  $\Gamma$  heißt dann Charakteristik der partiellen Differentialgleichung (2-1), falls

$$\gamma'_1(t)a_2(\gamma(t)) - \gamma'_2(t)a_1(\gamma(t)) = 0 \quad (t \in [\alpha, \beta]) \quad (2-3)$$

gilt. Sie heißt charakteristisch in  $t_0 \in [\alpha, \beta]$ , falls (2-3) an der Stelle  $t = t_0$  gilt.

**2.3 Beispiele.** (i) Gegeben sei die partielle Differentialgleichung  $u_x - u_y = 0$ . Offenbar ist diese äquivalent mit  $(1, -1)\nabla u(x, y) = 0$ . Also erhält man die Charakteristiken dieser partiellen Differentialgleichung, indem man  $-\gamma'_1 - \gamma'_2 = 0$  löst. Mittels Integration erhält man  $\gamma_2(t) = -\gamma_1(t) + \text{const}$ . Demnach sind die Charakteristiken parallele Geraden zur 2. Winkelhalbierenden im  $\mathbb{R}^2$  (Abb. 2).

(ii) Ist die Gleichung  $u_x + u_y = 0$  gegeben, so ergibt sich analog wie oben, dass die Charakteristiken parallele Geraden zur 1. Winkelhalbierenden sind (Abb. 3).

**2.4 Bemerkung.** Sei  $(x_0, y_0) \in G$  gegeben. Dann bietet es sich an, eine Charakteristik durch  $(x_0, y_0)$  zu suchen, indem wir das folgende System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu lösen versuchen:

$$\begin{aligned} \gamma'_1 &= a_1(\gamma_1, \gamma_2), & \gamma_1(0) &= x_0 \\ \gamma'_2 &= a_2(\gamma_1, \gamma_2), & \gamma_2(0) &= y_0 \end{aligned} \quad (2-4)$$

Die Voraussetzung an  $a_1, a_2$  und der Satz von Picard-Lindelöf implizieren die eindeutige Lösbarkeit dieses Systems. Es kann sogar gezeigt werden, dass jede Charakteristik durch  $(x_0, y_0)$  obiges System erfüllt.

**2.5 Satz.** Ist die Funktion  $u : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  im Punkt  $(x_0, y_0) \in G$  vorgegeben,

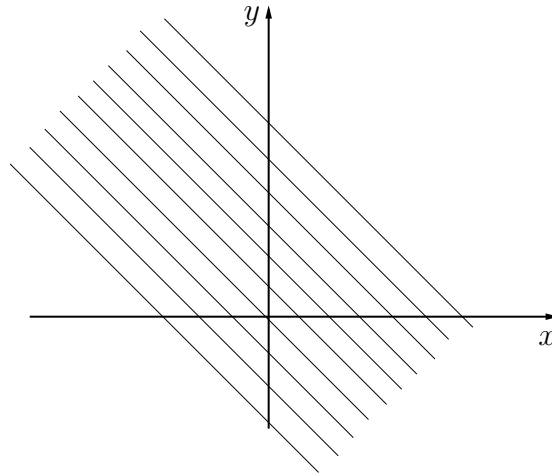


Abbildung 2: Charakteristiken

so ist jede Lösung  $u$  von (2-1) auf jeder Charakteristik  $\Gamma$  durch  $(x_0, y_0)$  eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Es sei  $\Gamma : \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  für  $t \in [\alpha, \beta]$  eine Charakteristik durch  $(x_0, y_0)$ . O.B.d.A. gelte  $0 \in [\alpha, \beta]$  und  $\gamma(0) = (x_0, y_0)$ . Ist  $u$  eine Lösung von (2-1), so setzen wir  $z(t) := u(\gamma(t))$ . Offensichtlich gilt dann

$$z' = \frac{d}{dt}z = u_x \gamma_1' + u_y \gamma_2' = u_x a_1 + u_y a_2 = bz + c$$

und  $z(0) = u(x_0, y_0)$  ist laut Voraussetzung gegeben. Demnach genügt  $z$  einer linearen, gewöhnlichen Differentialgleichung, welche eindeutig lösbar ist.  $\square$

Dieses Resultat gibt uns nun die Möglichkeit, die Cauchysche Anfangswertaufgabe (2-2) lokal zu lösen. Zu beachten ist, dass der Beweis des folgenden Satzes konstruktiv ist, d.h., dass wir durch analoges Vorgehen wie im Beweis Lösungen explizit konstruieren können.

**2.6 Satz.** *Es sei  $\Gamma = [\gamma]$  eine Kurve in  $G$ , welche durch  $\gamma(t) := \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$  ( $t \in [\alpha, \beta]$ ) parametrisiert wird. Weiter sei  $\Gamma$  im Punkt  $\gamma(s_0) =: (x_0, y_0)$  nicht charakteristisch, d.h.  $\gamma_1'(s_0)a_2(\gamma(s_0)) - \gamma_2'(s_0)a_1(\gamma(s_0)) \neq 0$ . Dann gibt es eine Umgebung  $U = U(x_0, y_0) \subset G$ , in welcher die Cauchysche Anfangswertaufgabe eindeutig lösbar ist.*

*Beweis.* Für festes  $s \in [\alpha, \beta]$  sei  $\chi_s(t)$  ( $t \in [\alpha_s, \beta_s]$ ),  $0 \in (\alpha_s, \beta_s)$ , eine Charakteristik, für die  $\chi_s(0) = \gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$  gilt. Wir definieren nun für eine Umgebung  $B$  von  $(s_0, 0)$  die Funktion  $\psi: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^2$  durch  $\psi(s, t) := \chi_s(t)$ . Die Funktion  $\psi$  ist stetig

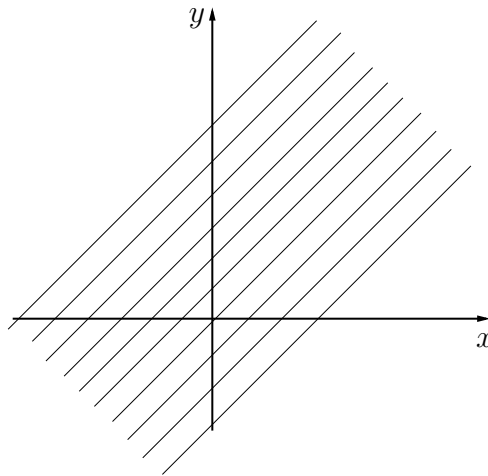


Abbildung 3: Charakteristiken

differenzierbar und es gilt  $\psi(s_0, 0) = (x_0, y_0)$ . Weiter gilt unter Verwendung von Bemerkung 2.4

$$\partial_t \psi(s, t) = \partial_t \chi_s(t) = (\chi'_{s,1}(t), \chi'_{s,2}(t)) = (a_1(\chi_s(t)), a_2(\chi_s(t)))$$

und

$$\partial_s \psi(s, 0) = \partial_s \gamma(s) = (\gamma'_1(s), \gamma'_2(s))^T.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \det \psi'(s_0, 0) &= \begin{vmatrix} \gamma'_1(s_0) & a_1(\chi_{s_0}(0)) \\ \gamma'_2(s_0) & a_2(\chi_{s_0}(0)) \end{vmatrix} \\ &= \gamma'_1(s_0) a_2(\chi_{s_0}(0)) - \gamma'_2(s_0) a_1(\chi_{s_0}(0)) \neq 0, \end{aligned}$$

was die lokale Umkehrbarkeit der Funktion  $\psi$  sichert. Es gibt also eine offene Umgebung  $V = V(s_0, 0)$  von  $(s_0, 0)$ , für die  $\psi|_V$  injektiv ist. Sei  $U := \psi(V)$ , dann ist  $U$  offen und  $\psi^{-1}: U \rightarrow V$  stetig differenzierbar. Sei nun  $z(s, \cdot)$  die nach vorigem Satz eindeutig bestimmte Lösung auf der Charakteristik  $\chi_s$  mit  $z(s, 0) = f(\gamma(s))$ , dann ist

$$u(x, y) := z(\psi^{-1}(x, y))$$

die gesuchte Lösung. □

Wir wollen uns den Beweis des obigen Satzes anhand eines Beispiels veranschaulichen.

**2.7 Beispiel.** Es seien  $\Gamma := \{(x, 1) | x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ . Wir versuchen das Problem

$$\left\{ \begin{array}{l} xu_x + yu_y = \alpha u \\ u|_{\Gamma} = \varphi \end{array} \right\}$$

zu lösen. Bekanntlich erhalten wir eine Charakteristik, welche durch den Punkt  $(s, 1)$  geht, durch Lösen der Differentialgleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x \\ x(0) = s \end{array} \right\} \text{ bzw. } \left\{ \begin{array}{l} y' = y \\ y(0) = 1 \end{array} \right\}$$

Wir erhalten also  $\chi_s(t) := (se^t, e^t)$  (Abb. 4) und definieren

$$\psi(s, t) := \chi_s(t)$$

Für die Umkehrabbildung von  $\psi$  ergibt sich:

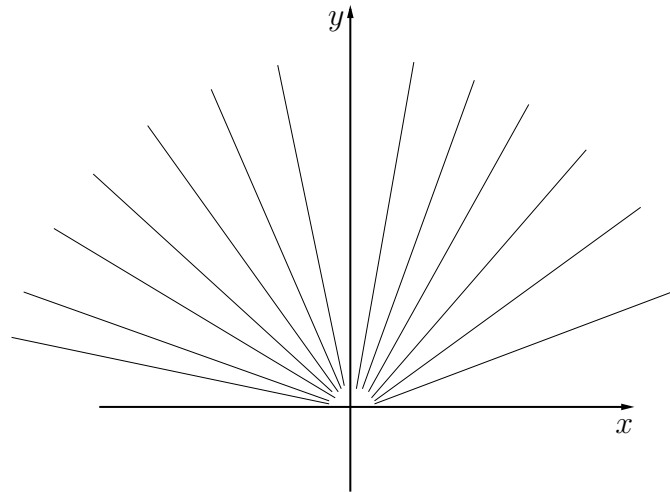


Abbildung 4: Charakteristiken

$$\psi^{-1}(x, y) = \left( \frac{x}{y}, \ln(y) \right)$$

Nun bleibt noch  $z(s, \cdot)$  zu bestimmen. Wir erhalten

$$z(s, t) = \varphi(s)e^{\alpha t}$$

und damit insgesamt

$$u(x, y) = z(\psi^{-1}(x, y)) = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)y^{\alpha}.$$

## b) Typeinteilung bei linearen Gleichungen zweiter Ordnung

Wie in den ersten Beispielen schon erwähnt, gibt es drei große Klassen von PDGL (elliptisch, parabolisch und hyperbolisch), wobei nicht jede PDGL zu einer der drei Klassen gehören muss. Hier soll eine erste Definition gegeben werden.

**2.8 Definition.** Gegeben sei eine semilineare PDGL zweiter Ordnung der Form

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x) + F(x, u(x), \nabla u(x)) = 0 \quad (2-5)$$

in einem Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$  mit Koeffizienten  $a_\alpha: G \rightarrow \mathbb{R}$  und  $F: G \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Der Ausdruck

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x) =: \sum_{j,k=1}^n A_{jk}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_k}$$

heißt der Hauptteil der Gleichung (2-5) oder des zugehörigen Differentialoperators. Die Matrix  $(A_{jk}(x))_{j,k=1,\dots,n}$  sei o.E. symmetrisch (da für die Lösungen  $\partial_j \partial_k u = \partial_k \partial_j u$  gelten soll).

- a) Die Gleichung (2-5) heißt elliptisch an der Stelle  $x \in G$ , falls  $A(x)$  nur positive oder nur negative Eigenwerte besitzt.
- b) Die Gleichung (2-5) heißt parabolisch an der Stelle  $x \in G$ , falls genau ein Eigenwert von  $A(x)$  verschwindet und alle anderen Eigenwerte dasselbe Vorzeichen haben.
- c) Die Gleichung (2-5) heißt hyperbolisch an der Stelle  $x \in G$ , falls genau  $n - 1$  Eigenwerte von  $A(x)$  dasselbe Vorzeichen haben und der verbleibende Eigenwert das entgegengesetzte Vorzeichen besitzt.
- d) Gelten die obigen Bedingungen für alle  $x \in G$ , so heißt die Gleichung elliptisch, parabolisch bzw. hyperbolisch.

Wir betrachten nun speziell den Fall  $n = 2$  und linearer Differentialoperatoren, d.h. Differentialgleichungen der Form

$$\begin{aligned} Lu &:= \sum_{0 \leq |\alpha| \leq 2} a_\alpha \partial^\alpha u \\ &= a_{20} u_{xx} + a_{11} u_{xy} + a_{02} u_{yy} + a_{10} u_x + a_{01} u_y + a_{00} u = f, \end{aligned} \quad (2-6)$$

wobei die  $a_\alpha$  und  $f$  gegebene reellwertige Funktionen sind. Bekanntlich werden zusätzliche Forderungen an die gesuchte Funktion  $u$  gestellt. Sei wieder  $\Gamma$  eine glatte Kurve im  $\mathbb{R}^2$ .

- (i) Sind  $u|_\Gamma$  oder  $\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}|_\Gamma$  vorgegeben, so handelt es sich um eine Cauchysche Randwertaufgabe.
- (ii) Handelt es sich bei  $\Gamma$  um eine geschlossene Kurve (insbesondere  $\Gamma = \partial G$ ), so spricht man
  - (a) von der Dirichletschen Randwertaufgabe, sofern  $u|_\Gamma$  vorgegeben ist und

(b) von der Neumannschen Randwertaufgabe, sofern  $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma}$  vorgegeben ist.

In vielen Fällen wird auch  $\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma}$  vorgegeben. Hierbei handelt es sich offenbar um eine Mischung aus (a) und (b). Man spricht von gemischten Randbedingungen oder Robin-Randbedingungen.

(iii) Sind Anfangs- und Randbedingungen vorgegeben, so sprechen wir von einer Anfangsrandwertaufgabe. Ein Beispiel für eine solche Aufgabe ist das Problem der schwingenden Saite.

Zunächst befassen wir uns mit der Cauchyschen Anfangswertaufgabe. Die Hyperlebene  $\Gamma$  sei durch  $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$  parametrisiert. Bekannt ist  $u|_{\Gamma}$  und  $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma}$ . Es ist aber auch  $\nabla u|_{\Gamma}$  bekannt, da die Tangentialableitung aus  $u|_{\Gamma}$  bestimmbar ist. Es bietet sich nun an, zu versuchen, höhere Ableitungen auf  $\Gamma$  zu bestimmen um möglicherweise mittels einer Taylorentwicklung auf die gesuchte Lösung schließen zu können. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}(u_x(\gamma(s)))' &= u_{xx}(\gamma(s))\gamma_1'(s) + u_{xy}(\gamma(s))\gamma_2'(s) \\ (u_y(\gamma(s)))' &= u_{yx}(\gamma(s))\gamma_1'(s) + u_{yy}(\gamma(s))\gamma_2'(s)\end{aligned}$$

und nach Voraussetzung

$$\begin{aligned}f(\gamma(s)) - (a_{10}u_x)(\gamma(s)) - (a_{01}u_y)(\gamma(s)) - (a_{00}u)(\gamma(s)) \\ = (a_{20}u_{xx})(\gamma(s)) + (a_{11}u_{xy})(\gamma(s)) + (a_{02}u_{yy})(\gamma(s))\end{aligned}$$

Es handelt sich hierbei um ein Gleichungssystem für  $u_{xx}$ ,  $u_{xy}$  und  $u_{yy}$  auf  $\Gamma$ :

$$\begin{pmatrix} \gamma_1' & \gamma_2' & 0 \\ 0 & \gamma_1' & \gamma_2' \\ a_{20} & a_{11} & a_{02} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xx} \\ u_{xy} \\ u_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x' \\ u_y' \\ f - a_{10}u_x - a_{01}u_y - a_{00}u \end{pmatrix}$$

Es wurden der Übersichtlichkeit halber die Argumente weggelassen. Dieses Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, sofern

$$0 \neq \begin{vmatrix} \gamma_1' & \gamma_2' & 0 \\ 0 & \gamma_1' & \gamma_2' \\ a_{20} & a_{11} & a_{02} \end{vmatrix} = a_{02}(\gamma_1')^2 - a_{11}\gamma_1'\gamma_2' + a_{20}(\gamma_2')^2 \quad (2-7)$$

gilt. Sei o.B.d.A.  $\gamma_1' \neq 0$ , dann kann bekanntlich  $\gamma_2$  als Funktion in  $\gamma_1$  dargestellt werden und es gilt  $\frac{\gamma_2'}{\gamma_1'} = \frac{d\gamma_2}{d\gamma_1}$ .  $\Gamma$  heißt Charakteristik zu dem Differentialoperator  $L$  (welcher in (2-6) definiert wurde), falls die rechte Seite von (2-7) verschwindet, d.h. falls

$$a_{20} \left( \frac{\gamma_2'}{\gamma_1'} \right)^2 - a_{11} \left( \frac{\gamma_2'}{\gamma_1'} \right) + a_{02} = 0.$$

Dies ist im Fall  $a_{20} \neq 0$  mit

$$\frac{d\gamma_2(\gamma_1)}{d\gamma_1} = \left( \frac{a_{11}}{2a_{20}} \pm \frac{1}{2a_{20}} \sqrt{a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02}} \right) (\gamma_1, \gamma_2(\gamma_1))$$

und im verbleibenden Fall mit

$$\frac{d\gamma_2}{d\gamma_1} = \frac{a_{02}}{a_{11}}(\gamma_1, \gamma_2(\gamma_1))$$

äquivalent. Es ist zu beachten, dass in diesem Fall sicher  $a_{11} \neq 0$  gelten muss, denn ansonsten wäre  $\gamma_1' = 0$ .

Man beachte, dass die rechte Seite von (2-7) genau dann verschwindet, falls

$$(\gamma_2'(s), -\gamma_1'(s)) \begin{pmatrix} a_{20}(\gamma(s)) & \frac{a_{11}(\gamma(s))}{2} \\ \frac{a_{11}(\gamma(s))}{2} & a_{02}(\gamma(s)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_2'(s) \\ -\gamma_1'(s) \end{pmatrix} = 0.$$

Die Matrix  $A(\gamma(s))$  in dieser Gleichheit entspricht genau dem Hauptteil des Differentialoperators  $L$  im Sinne von Definition 2.8.

Wir wollen nun eine Typeinteilung für diese Differentialgleichungen anhand der Zahl der reellen Charakteristiken vornehmen.

- (i) Ist  $D := a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02} < 0$ , gibt es keine Charakteristiken. Diese Bedingung ist genau dann erfüllt, falls  $\det A(x) > 0$  mit  $x = \gamma(s)$ . In diesem Fall ist  $A(x)$  positiv definit oder negativ definit, und die Gleichung (2-6) ist nach Definition 2.8 elliptisch.
- (ii) Ist  $a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02} = 0$ , gibt es eine Charakteristikenschar. In diesem Fall ist  $\det A(x) = 0$ , und genau ein Eigenwert der Matrix  $A(x)$  ist 0. Die Gleichung ist also parabolisch.
- (iii) Ist schließlich  $a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02} > 0$ , gibt es zwei Charakteristikenscharen. Wegen  $\det A(x) < 0$  haben die zwei Eigenwerte von  $A(x)$  verschiedenes Vorzeichen, die Gleichung (2-6) ist hyperbolisch.

**2.9 Beispiele.** a) Ist  $L = \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ , so folgt unmittelbar  $a_{20} = a_{02} = 1$  und  $a_{11} = 0$ , womit man schnell erkennt, dass  $D = -4 < 0$  gilt und es sich bei  $L$  um einen elliptischen Differentialoperator handelt.

b) Ist dagegen  $L = \partial_y - \partial_x^2$ , so erkennt man, dass  $D = 0$  gilt und somit, dass  $L$  ein parabolischer Differentialoperator ist.

c) Ein hyperbolischer Operator ist, wie man leicht nachrechnet, durch  $L = \partial_y^2 - \partial_x^2$  gegeben.

Im allgemeinen werden wir den sog. „Hadamardschen“ Lösungsbegriff zugrundelegen (Jacques Hadamard, 8.12.1865 - 17.10.1963), d.h. es sollten die folgenden Forderungen erfüllt werden:

(H1) Existenz einer Lösung

(H2) Eindeutigkeit

(H3) Stetige Abhängigkeit von den Daten (Anfangswerte, Randwerte,...)



## 3. Grundlösungen und elliptische Gleichungen

**3.1 Worum geht's?** In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen ist es oftmals sinnvoll, den Begriff der bekannten klassischen Differenzierbarkeit aufzulockern. Dies ermöglicht es etwa, Lösungsbegriffe zu definieren, die zwar schwächer sind als bereits bekannte, trotzdem aber für manche Anwendungen ausreichend sind. Dazu dient die Theorie der Distributionen, die uns schon aus der Funktionalanalysis bekannt ist. Nun werden die Faltung von Distributionen und der Begriff der Grundlösung behandelt. Darüber hinaus sollen anhand der Laplace- oder Potentialgleichung einige Grundbegriffe der Potentialtheorie vorgestellt werden. Dabei geht es vor allem um den Existenznachweis einer Grundlösung, Randwertaufgaben werden kurz angesprochen.

Die Lösungen der Laplace-Gleichung heißen auch harmonische Funktionen. Es gelten viele Eigenschaften, welche für eine große Klasse elliptischer Gleichung zutreffen, wie etwa das Maximumprinzip. Auch gibt es eine Querverbindung zur Funktionentheorie: Der Realteil einer holomorphen Funktion ist eine harmonische Funktion.

### a) Faltung von Distributionen

Wir verwenden das Konzept der Distribution, wie es in der Funktionalanalysis behandelt wurde. Zunächst wollen wir die Faltung von Distributionen mit glatten Funktionen definieren.

**Erinnerung:** Für  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  und  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  ist die Faltung

$$(f * \varphi)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(x-y)dy$$

wohldefiniert (Hölderungleichung). Wir setzen

$$\tilde{\varphi}(x) := \varphi(-x) \quad \text{und} \quad \tau_x \varphi(y) := \varphi(y-x), \quad \text{d.h.} \quad \tau_x \tilde{\varphi}(y) = \varphi(x-y).$$

Dann gilt

$$(f * g)(x) = [f](\tau_x \tilde{\varphi}).$$

Die motiviert folgende Definition.

**3.2 Definition.** Sei  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  und  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Die Faltung von  $T$  und  $\varphi$  ist definiert durch

$$(T * \varphi)(x) := T(\tau_x \tilde{\varphi}).$$

**3.3 Beispiel.** Für die Dirac-Distribution  $\delta_0$  gilt

$$(\delta_0 * \varphi)(x) = \delta_0(\tau_x \tilde{\varphi}) = \tau_x \tilde{\varphi}(0) = \varphi(x), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

d.h.  $\delta_0 * \varphi = \varphi$  für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .

**3.4 Satz.** Sei  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Es gilt

- (i)  $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , d.h. insbesondere  $T * \varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  (als reguläre Distribution).
- (ii)  $\partial^\alpha(T * \varphi) = (\partial^\alpha T) * \varphi = T * (\partial^\alpha \varphi)$  ( $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ).

*Beweis. 1. Schritt:*  $T * \varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ .

Wir haben

$$\tau_x \tilde{\varphi}(y) - \tau_{x_0} \tilde{\varphi}(y) = \varphi(x - y) - \varphi(x_0 - y).$$

Sei  $\text{supp } \varphi \subseteq K \subset\subset \mathbb{R}^n$ , d.h.  $\text{supp } \varphi(x_0 - \cdot) \subseteq \{x_0\} - K$  ( $A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$ ). O.B.d.A. können wir  $x \in B(x_0, 1)$  annehmen. Somit erhalten wir  $\text{supp } \tau_x \tilde{\varphi} \subseteq B(x_0, 1) - K =: \tilde{K}$  ( $x \in B(x_0, 1)$ ) mit kompaktem  $\tilde{K}$ . Weiterhin gilt

$$\partial_y^\alpha (\tau_x \tilde{\varphi}(y) - \tau_{x_0} \tilde{\varphi}(y)) = (-1)^{|\alpha|} ((\partial^\alpha \varphi)(x - y) - (\partial^\alpha \varphi)(x_0 - y)).$$

Aus der gleichmäßigen Stetigkeit von  $\partial^\alpha \varphi$  auf  $\tilde{K}$  folgt deshalb

$$\sup_{y \in \tilde{K}} |\partial_y^\alpha (\tau_x \tilde{\varphi}(y) - \tau_{x_0} \tilde{\varphi}(y))| \rightarrow 0, \quad \text{falls } x \rightarrow x_0.$$

Die Stetigkeit von  $T$  impliziert nun

$$|(T * \varphi)(x) - (T * \varphi)(x_0)| = |T(\tau_x \tilde{\varphi}) - T(\tau_{x_0} \tilde{\varphi})| \rightarrow 0, \quad \text{falls } x \rightarrow x_0.$$

**2. Schritt:**  $T * \varphi$  ist differenzierbar.

Sei  $h \in (-1, 1) \setminus \{0\}$  und  $e_j := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  der  $j$ -te Einheitsvektor. Dann folgt unter Anwendung des Mittelwertsatzes, dass

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \frac{1}{h} (\tau_{x+he_j} \tilde{\varphi} - \tau_x \tilde{\varphi}) &= (-1)^{|\alpha|} \frac{1}{h} ((\partial^\alpha \varphi)(x + he_j - y) - (\partial^\alpha \varphi)(x - y)) \\ &= (-1)^{|\alpha|} (\partial_j \partial^\alpha \varphi)(x + \lambda e_j - y) \end{aligned}$$

mit einem  $\lambda \in (0, h)$ . Die gleichmäßige Stetigkeit von  $\partial_j \partial^\alpha \varphi$  liefert deshalb

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \left| \partial^\alpha \frac{1}{h} (\tau_{x+he_j} \tilde{\varphi} - \tau_x \tilde{\varphi})(y) - \partial^\alpha \tau_x (\widetilde{\partial_j \varphi})(y) \right| \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0, \alpha \in \mathbb{N}_0^n)$$

und damit

$$\frac{1}{h} (\tau_{x+he_j} \tilde{\varphi} - \tau_x \tilde{\varphi}) \rightarrow_{\mathcal{D}} \tau_x \widetilde{\partial_j \varphi} \quad \text{für } h \rightarrow 0.$$

Die Linearität und die Stetigkeit von  $T$  implizieren dann

$$[\partial_j (T * \varphi)](x) = \lim_{h \rightarrow 0} T \left( \frac{1}{h} (\tau_{x+he_j} \tilde{\varphi} - \tau_x \tilde{\varphi}) \right)$$

$$= T(\tau_x \widetilde{\partial_j \varphi}) = (T * \partial_j \varphi)(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Wegen des 1. Schritts wissen wir außerdem, dass  $T * \partial_j \varphi$  stetig ist, und es folgt  $T * \varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ . Induktion über den Grad der Ableitung liefert somit  $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  und  $\partial^\alpha(T * \varphi) = T * \partial^\alpha \varphi$ .

**3. Schritt:**  $\partial^\alpha(T * \varphi) = (\partial^\alpha T) * \varphi$ .

Aus  $\frac{\partial \varphi}{\partial y_j}(x-y) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x-y)$  folgt  $\partial_{y_j} \tau_x \widetilde{\varphi} = -\tau_x \widetilde{\partial_j \varphi}$  und damit unter Ausnutzung des 2. Schritts, dass

$$\begin{aligned} \partial_j(T * \varphi)(x) &= (T * \partial_j \varphi)(x) = T(\tau_x \widetilde{\partial_j \varphi}) = -T(\partial_{y_j} \tau_x \widetilde{\varphi}) \\ &= (\partial_j T)(\tau_x \widetilde{\varphi}) = ((\partial_j T) * \varphi)(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Mit Induktion über den Grad der Ableitung folgt die Behauptung. □

Wir kommen nun zum entscheidenden Resultat über Grundlösungen von Differentialgleichung, die wir zunächst definieren wollen.

**3.5 Definition.** Sei  $N \in \mathbb{N}$  und

$$L := \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha \partial^\alpha$$

ein linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten  $a_\alpha \in \mathbb{C}$ .  $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  heißt Grundlösung (oder Fundamentallösung) zu  $L$ , falls

$$Lg = \delta_0$$

gilt, wobei dies als Gleichheit in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  zu verstehen ist.

Eine Grundlösung ist nicht eindeutig bestimmt. Gilt z.B.  $Lu = 0$ , dann ist mit  $g$  auch  $g + u$  eine Grundlösung zu  $L$ .

**3.6 Satz.** Sei  $L := \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha \partial^\alpha$  ein linearer Differentialoperator mit  $a_\alpha \in \mathbb{C}$  und sei  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . Sei weiterhin  $g$  Grundlösung zu  $L$ . Dann ist

$$u := g * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

eine Lösung der Gleichung  $Lu = f$  (im Sinne von Distributionen).

*Beweis.* Mit Satz 3.4 und Beispiel 3.3 folgt

$$Lu = L(g * f) = (Lg) * f = \delta_0 * f = f.$$

□

Beachte, dass keineswegs klar ist, dass zu jedem Differentialoperator  $L$  immer eine Grundlösung existiert. Im nächsten Abschnitt wollen wir dies für die Potentialgleichung nachweisen.

## b) Existenz einer Grundlösung

Im folgenden sei wieder  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet. Wir betrachten die Laplace- oder Potentialgleichung

$$-\Delta u = f. \quad (3-1)$$

**3.7 Definition.** Eine Funktion  $u \in C^2(G)$  heißt harmonisch, falls  $\Delta u = 0$  in  $G$  gilt.

Bei PDGL muss man häufig auf die Glattheit des Gebietes  $G$  achten. Sei dazu  $m \in \mathbb{N}$ . Ein Gebiet heißt ein  $C^m$ -Gebiet oder ein Gebiet mit  $C^m$ -Rand, falls der Rand lokal als Graph einer  $C^m$ -Funktion darstellbar ist. Äquivalent dazu ist, dass der Rand eine  $C^m$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  ist. Für Funktion  $u: G \rightarrow \mathbb{C}$  schreiben wir  $u \in C^m(\overline{G})$ , falls  $u \in C^m(G)$  gilt und eine Fortsetzung  $\tilde{u}: \tilde{G} \rightarrow \mathbb{C}$  von  $u$  existiert mit  $\tilde{u} \in C^m(\tilde{G})$  und einem Gebiet  $\tilde{G} \supset \overline{G}$ .

Im folgenden sei an die Greenschen Formeln erinnert. Für ein beschränktes  $C^1$ -Gebiet  $G$  und für  $u, v \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$  gilt die erste Greensche Formel

$$\int_G u(x) \Delta v(x) dx + \int_G \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle = \int_{\partial G} u(x) \frac{\partial v}{\partial n}(x) dS(x). \quad (3-2)$$

Dabei ist  $n: \partial G \rightarrow \mathbb{R}^n$  der äußere Normaleneinheitsvektor, und  $dS(x)$  steht für das  $(n-1)$ -dimensionale Flächenmaß.

Durch Rollentausch von  $u$  und  $v$  und Subtraktion erhält man die zweite Greensche Formel

$$\int_G (u(x) \Delta v(x) - v(x) \Delta u(x)) dx = \int_{\partial G} \left( u(x) \frac{\partial v}{\partial n}(x) - v(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) \right) dS(x). \quad (3-3)$$

**3.8 Bemerkung.** a) Sei  $\omega_n := \lambda_{n-1}(\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\})$  der  $(n-1)$ -dimensionale Flächeninhalt der Einheitskugel. Für  $k \in \mathbb{N}$  und  $r > 0$  gilt dann die Gleichheit

$$\begin{aligned} \int_{B(0,r)} |x|^{-k} dx &= \int_0^r \int_{|x|=\rho} |x|^{-k} dS(x) d\rho \\ &= \int_0^r \rho^{-k} \int_{|x|=\rho} dS(x) d\rho = \int_0^r \rho^{-k} \lambda_{n-1}(\partial B(0, \rho)) d\rho \\ &= \lambda_{n-1}(\partial B(0, 1)) \int_0^r \rho^{n-1-k} d\rho = \omega_n \int_0^r \rho^{n-1-k} d\rho. \end{aligned}$$

Damit ist  $|x|^{-k}$  genau dann auf  $B(0, r)$  integrierbar, falls  $k \leq n - 1$ .

b) Es gilt

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})},$$

wobei  $\Gamma$  die Gamma-Funktion ist.

c) Speziell im  $\mathbb{R}^3$  sei  $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto |x|^{-1}$ . Dann gilt

$$\partial_i f(x) = -\frac{x_i}{|x|^3}, \quad \partial_j \partial_i f(x) = -\frac{1}{|x|^3} \delta_{ij} + 3\frac{x_i x_j}{|x|^5}.$$

Damit ist  $f$  harmonisch in  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Weiter gilt

$$|\nabla f(x)| = |x|^{-2}, \quad \left\langle \nabla f(x), \frac{x}{|x|} \right\rangle = -|x|^{-2}.$$

Es gilt  $f \in L^1(B(0, r))$ ,  $\partial_i f \in L^1(B(0, r))$  und  $\partial_i \partial_j f \notin L^1(B(0, r))$  für alle  $i, j$ .

**3.9 Satz.** Die zur Funktion  $g: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) := \frac{1}{4\pi|x|}$  gehörige reguläre Distribution  $[g]$  ist eine Grundlösung zum Laplaceoperator  $-\Delta$ .

*Beweis.* Sei  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ , dann gilt für beliebiges  $\varepsilon > 0$  zunächst

$$\Delta \left[ \frac{1}{|x|} \right] (\varphi) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|} \Delta \varphi(x) dx = \int_{|x| < \varepsilon} \frac{1}{|x|} \Delta \varphi(x) dx + \int_{|x| > \varepsilon} \frac{1}{|x|} \Delta \varphi(x) dx.$$

Wir erhalten mit geeigneten Konstanten  $C = C(\varphi) > 0$  und  $\tilde{C} > 0$

$$\left| \int_{|x| < \varepsilon} \frac{1}{|x|} \Delta \varphi(x) dx \right| \leq \left| C \cdot \int_{|x| < \varepsilon} \frac{1}{|x|} dx \right| \leq \tilde{C} \int_0^\varepsilon r dr = \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Weiter ergibt sich unter Verwendung der zweiten Greenschen Formel und Bemerkung 3.8c), dass

$$\begin{aligned} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{1}{|x|} \Delta \varphi(x) dx &= \int_{|x| = \varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x) \frac{1}{|x|} dS(x) - \int_{|x| = \varepsilon} \varphi(x) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x|} dS(x) \\ &\quad + \int_{|x| > \varepsilon} \varphi(x) \Delta \frac{1}{|x|} dx \\ &= \int_{|x| = \varepsilon} \varphi(x) \left\langle \nabla \frac{1}{|x|}, \frac{x}{\varepsilon} \right\rangle dS(x) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= - \int_{|x| = \varepsilon} \varphi(x) \frac{1}{\varepsilon^2} dS(x) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Man beachte hier, dass der äußere Normaleneinheitsvektor gegeben ist durch  $n(x) = -\frac{x}{\varepsilon}$ . Wir erhalten insgesamt:

$$\begin{aligned}\Delta \frac{1}{|x|}(\varphi) &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|x|=\varepsilon} \varphi(x) dS(x) + \mathcal{O}(\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= -4\pi\varphi(0) - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|x|=\varepsilon} (\varphi(x) - \varphi(0)) dS(x) + \mathcal{O}(\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &\rightarrow -4\pi\varphi(0) \quad (\varepsilon \rightarrow 0),\end{aligned}$$

und das war zu zeigen.  $\square$

**3.10 Satz.** Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$ . Dann gilt  $u := g * f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$  und  $-\Delta u = f$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ .

*Beweis.* Sei  $K \subset \mathbb{R}^3$  kompakt, dann folgt mit einer von  $K$  abhängigen Konstanten  $C > 0$ , dass

$$\int_K |u(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} |f(y)| \left( \int_K \frac{1}{|x-y|} dx \right) dy \leq C \|f\|_{L^1} < \infty.$$

Des weitern ist wegen Satz 3.6 die Behauptung klar für  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ . Mit dem Satz von Fubini und Satz 3.4(ii) folgt dann

$$\begin{aligned}[-\Delta u](\varphi) &= -[u](\Delta\varphi) = -\int_{\mathbb{R}^3} u(x) \Delta\varphi(x) dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^3} f(y) \int_{\mathbb{R}^3} g(x-y) \Delta\varphi(x) dx dy \\ &= -\int_{\mathbb{R}^3} f(y) \Delta(g * \tilde{\varphi})(-y) dy = f(\varphi),\end{aligned}$$

und damit ist alles gezeigt.  $\square$

**3.11 Bemerkung.** (i) Zu bemerken ist in diesem Zusammenhang, dass wir sogar  $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$  erhalten, sofern  $f$  hölderstetig ist. Insbesondere gilt dann auch  $-\Delta u = f$  im klassischen Sinn. Dies ist nicht richtig, wenn „nur“  $f \in C(\mathbb{R}^3)$  ist.

(ii) Eine Grundlösung hilft auch bei der Konstruktion von Lösungen zu Randwertproblemen der Form

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } G, \\ u|_{\partial G} = h_1 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial G} = h_2, \end{cases}$$

wobei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  ein genügend glattes Gebiet. Hierbei wählt man die Grundleösung geschickt, d.h.  $\tilde{g} = g + u$  mit  $Lu = 0$ , so dass die Randbedingung erfüllt ist. Dies führt zum Begriff der Greenschen Funktion. Die explizite Angabe einer Greenschen Funktion ist i.a. nur für Gebiete  $G$  mit hoher Symmetrie möglich, wie z.B. für  $G = B(0, R)$  oder  $G = \mathbb{R}_+^n$ .

(iii) Im  $\mathbb{R}^n$  ist durch die zur Funktion

$$g_n: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\omega_n |x|^{n-2}} & \text{für } n \geq 3 \\ -\frac{1}{2\pi} \ln(|x|) & \text{für } n = 2 \end{cases}$$

gehörige reguläre Distribution eine Grundleösung zum Laplace-Operator  $-\Delta$  gegeben (Beweis verläuft ähnlich wie in Satz 3.9).

### c) Maximum- und Minimumprinzip

**3.12 Satz.** Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes  $C^1$ -Gebiet und  $u \in C(\overline{G}) \cap C^2(G)$ .

- (1) Gilt  $\Delta u \geq 0$  in  $G$ , dann nimmt  $u$  sein Maximum auf  $\partial G$  an.
- (2) Gilt  $\Delta u \leq 0$  in  $G$ , dann nimmt  $u$  sein Minimum auf  $\partial G$  an.

*Beweis.* Wir beweisen den Satz o.B.d.A. für ein Maximum.

**1. Schritt:**  $\Delta u > 0$ . Angenommen  $u$  nimmt sein Maximum in  $x_0 \in G$  an. Dann ist  $(\partial_{x_j} \partial_{x_k} u)_{j,k=1}^n(x_0)$  negativ semidefinit, was  $\Delta u(x_0) \leq 0$  impliziert, aber wegen der Annahme nicht sein kann. Also ist in diesem Fall  $\max_{x \in \overline{G}} u(x) = \max_{x \in \partial G} u(x)$ .

**2. Schritt:**  $\Delta u \geq 0$ . Wir betrachten für  $\varepsilon > 0$  die Funktion  $u_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon e^{-x_1}$ . Dann gilt

$$\Delta u_\varepsilon(x) = \Delta u(x) + \varepsilon e^{-x_1} > 0 \quad (x \in G).$$

Aus dem 1. Schritt folgt somit  $\max_{x \in \overline{G}} u_\varepsilon(x) = \max_{x \in \partial G} u_\varepsilon(x)$ . Wegen

$$\max_{x \in \overline{G}} u_\varepsilon(x) \rightarrow \max_{x \in \partial G} u(x)$$

für  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt die Behauptung. □

**3.13 Korollar.** Sei  $u \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$  mit  $\Delta u = 0$  in  $G$  und  $u|_{\partial G} = 0$ . Dann gilt  $u = 0$ .

*Beweis.* Aus  $\Delta u = 0$  folgt mit Satz 3.12, dass  $u$  Minimum und Maximum auf  $\partial G$  annimmt. Wegen  $u|_{\partial G} = 0$  muss daher  $u = 0$  gelten. □

**3.14 Korollar.** Die Dirichletsche Randwertaufgabe  $-\Delta u = f$ ,  $u|_{\partial G} = g$  besitzt höchstens eine Lösung  $u \in C^2(G) \cap C(\bar{G})$ .

*Beweis.* Seien  $u_1, u_2 \in C^2(G) \cap C(\bar{G})$  zwei Lösungen. Wegen  $\Delta(u_1 - u_2) = 0$  und  $(u_1 - u_2)|_{\partial G} = 0$  impliziert Korollar 3.13 die Behauptung.  $\square$

**3.15 Bemerkung.** Harmonische Funktionen, d.h.  $\Delta u = 0$ , besitzen neben dem Maximumprinzip noch viele weitere Eigenschaften, die auch holomorphe Funktionen besitzen, wie z.B. die Mittelwerteigenschaft: Ist  $u \in C^2(G)$ , dann gilt

$$\begin{aligned} & \Delta u = 0 \quad \text{in } G \\ \Leftrightarrow & \quad u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) \quad (x \in G, r > 0), \end{aligned}$$

wobei  $\overline{B(x,r)} \subseteq G$ .



## 4. Parabolische Theorie

**4.1 Worum geht's?** Die Fourier-Transformation ist eines der wichtigsten Hilfsmittel in der Theorie partieller Differentialgleichungen. Dies liegt vor allem daran, dass die Fourier-Transformation eine partielle Ableitung in eine punktweise Multiplikation verwandelt. So gilt z.B. für den Laplace-Operator  $-\Delta u(x) = [\mathcal{F}^{-1}|\xi|^2 \mathcal{F}u](x)$ . Dies erlaubt bei geeigneten Gleichungen auch eine direktes Invertieren des Operators und damit eine Berechnung der Lösung.

Bei parabolischen PDGL wie etwa der Wärmeleitungsgleichung führt die Anwendung der Fourier-Transformation auf eine gewöhnliche Differentialgleichung, welche explizit lösbar ist. Wir erhalten eine Lösungsdarstellung als Integral. Eine der berühmtesten Gleichungen der Finanzmathematik ist die Black-Scholes-Gleichung, welche sich durch geeignete Transformationen auf die Wärmeleitungsgleichung reduzieren lässt.

### a) Grundlegendes zur Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation ist besonders günstig auf dem Schwartz-Raum zu betrachten. Dieser ist folgendermaßen definiert. Die Fourier-Transformierte verwandelt partielle Ableitungen in punktweise Multiplikation mit den Koordinatenfunktionen. Dies ist einer der Gründe, warum die Fourier-Transformation für PDGL so wichtig ist.

**4.2 Definition und Satz (Schwartz-Raum).** Der Vektorraum  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  besteht aus allen Funktionen  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , für welche gilt:

$$p_{\alpha,\beta}(\varphi) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < \infty \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n).$$

Durch die abzählbare Familie  $L = \{p_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n\}$  von Normen auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  wird eine metrisierbare lokalkonvexe Topologie definiert, welche  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  zu einem Fréchetraum macht. Der Raum  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , versehen mit dieser Topologie, heißt Raum der schnell fallenden Funktionen oder Schwartz-Raum. Übersetzt man die eben angegebene lokalkonvexe Topologie in Konvergenz von Folgen, so erhält man, dass eine Folge  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  genau dann gegen 0 konvergiert, falls für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$  gilt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi_k(x)| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Dies ist äquivalent zur Bedingung

$$\forall N \in \mathbb{N}_0 : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{|\beta| \leq N} |x|^\beta |\partial^\beta \varphi_k(x)| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

**4.3 Bemerkung.** a) Offensichtlich gilt  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Die Identität  $i: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\varphi \mapsto \varphi$ , ist aber auch stetig. Denn falls  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\varphi_k \rightarrow_{\mathcal{D}} 0$ , so folgt nach Definition der Konvergenz in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  insbesondere  $\text{supp } \varphi_k \subset K$  für ein Kompaktum  $K$ . Wir erhalten für alle  $N \in \mathbb{N}_0$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^N |\partial^\beta \varphi_k(x)| \leq C_{K,N} \sup_{x \in K} |\partial^\beta \varphi_k(x)| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

d.h. es gilt auch  $\varphi_k \rightarrow 0$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Damit ist  $i$  folgenstetig, und nach Definition der lokalkonvexen Topologien in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  und  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  auch stetig. Man schreibt  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Da  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  dicht in  $L^p(\mathbb{R}^n)$  liegt, ist somit auch  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dicht in  $L^p(\mathbb{R}^n)$  für  $1 \leq p < \infty$ .

b) Sei  $a > 0$  und  $f(x) := e^{-a|x|^2}$ . Dann gilt  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

Im Folgenden werden die wichtigsten Eigenschaften der Faltung und der Fourier-Transformation ohne Beweis angegeben.

**4.4 Definition (Faltung).** Seien  $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  messbar. Definiere

$$N_{f,g} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \int |f(y)| \cdot |g(x-y)| dy = \infty \right\}$$

und das Faltungsprodukt  $f * g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$(f * g)(x) := \begin{cases} \int f(y)g(x-y)dy, & x \notin N_{f,g}, \\ 0, & x \in N_{f,g}. \end{cases}$$

**4.5 Bemerkung.** a) Falls  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , so ist  $\lambda(N_{f,g}) = 0$  und  $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  mit

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

b) Sei  $1 \leq p, q \leq \infty$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Für  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  und  $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$  ist dann  $\lambda(N_{f,g}) = 0$  und  $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

c) Falls  $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , so ist  $(f * g) * h = f * (g * h)$ , d.h. die Faltung ist assoziativ.

d) Sei  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  und  $g \in C^k_c(\mathbb{R}^n)$  mit  $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ . Dann ist  $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ , und es gilt

$$\partial^\alpha (f * g) = f * (\partial^\alpha g) \quad (|\alpha| \leq k).$$

Insbesondere ist  $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , falls  $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .

**4.6 Definition (Fourier-Transformation).** Zu  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ist die Fourier-Transformierte  $\mathcal{F}f$  definiert durch

$$\mathcal{F}f(\xi) := \hat{f}(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} dx \quad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

Hierbei ist  $x\xi := \langle x, \xi \rangle$  das Standard-Skalarprodukt.

**4.7 Lemma (Eigenschaften).** Seien  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $s > 0$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$  und  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ .

a) Für  $g(x) := f(x)e^{iax}$  gilt  $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - a)$ .

b) Für  $g(x) := f(x - a)$  gilt  $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-ia\xi}$ .

c) Für  $g(x) := \overline{f(-x)}$  gilt  $\hat{g}(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$ .

d) Für  $g(x) := f(\frac{x}{s})$  gilt  $\hat{g}(\xi) = s^n \hat{f}(s\xi)$ .

e)  $\mathcal{F}f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  und  $\partial^\alpha(\mathcal{F}f) = (-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}g$ , wobei  $g(x) := x^\alpha f(x)$ .

f)  $\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha (\mathcal{F}f)(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}^n)$ .

g) Die Fourier-Transformation  $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ist stetig und bijektiv mit Inverser

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

h) (Satz von Plancherel.) Es gilt

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad (f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

Somit ist  $\mathcal{F}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$  eine Isometrie und damit eindeutig zu einem isometrischen Isomorphismus  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  fortsetzbar, der ebenfalls Fourier-Transformation genannt wird. Insbesondere gilt

$$\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2 \quad (f \in L^2(\mathbb{R}^n)).$$

i) Ist  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , dann ist  $\hat{g}$  wohldefiniert und es gilt

$$\|\hat{g}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

j) Seien  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  und  $h := f * g$ . Dann gilt  $\hat{h}(\xi) = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi)$ .

**4.8 Definition.** a) Eine temperierte Distribution ist eine stetige lineare Abbildung  $u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ . Der Raum der temperierten Distributionen wird mit  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  bezeichnet.

b) Für  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  wird die Fourier-Transformierte  $\mathcal{F}u$  definiert durch

$$(\mathcal{F}u)(\varphi) := u(\mathcal{F}\varphi) \quad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

**4.9 Bemerkung.** a) Nach Lemma 4.7g) ist  $\mathcal{F}u: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$  wieder stetig als Komposition stetiger Abbildungen. Damit ist

$$\mathcal{F}: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

linear und bijektiv mit  $\mathcal{F}^4 = \text{id}_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)}$ .

b) Für  $1 \leq p \leq \infty$  gelten die Einbettungen

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Die erste Einbettung ist Inhalt von Bemerkung 4.3a). Die zweite Einbettung ist Übungsaufgabe. Die letzten beiden Einbettungen folgen dann mittels Dualität und wegen  $(L^{p'})' = L^p$  für  $1/p + 1/p' = 1$  aus den ersten beiden Einbettungen, wobei wir hier  $p > 1$  voraussetzen müssen. Die dritte Einbettung für  $p = 1$  ist ebenfalls Übungsaufgabe.

c) Es gilt  $\delta_{x_0} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , denn  $\delta_{x_0}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi \mapsto \delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0)$  ist wohldefiniert, linear und wegen

$$|\delta_{x_0}(\varphi_k)| = |\varphi_k(x_0)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi_k(x)| = p_{0,0}(\varphi_k) \rightarrow 0 \quad (\varphi_k \rightarrow_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} 0)$$

stetig.

d) Wie in Definition 3.2 ist die Faltung definiert durch

$$(T * \varphi)(x) := T(\tau_x \tilde{\varphi}), \quad T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

und es gilt  $\partial^\alpha(T * \varphi) = (\partial^\alpha T) * \varphi = T * (\partial^\alpha \varphi)$  ( $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ).

## b) Die Wärmeleitungsgleichung

Die Wärmeleitungsgleichung, oder allgemeiner: eine Diffusionsgleichung, beschreibt in den Anwendungen die zeitliche Entwicklung der Dichte  $u$  einer Einheit wie zum Beispiel Wärme oder eine chemische Konzentration. Ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und  $V \subset \Omega$  eine beliebige glatt berandete Teilmenge, so sollte die Veränderungsrate in  $V$  gleich dem Negativen des Nettodurchflusses („von innen nach außen“) durch den Rand  $\partial V$  sein:

$$\frac{d}{dt} \int_V u dx = - \int_{\partial V} \langle F, \nu \rangle dx = - \int_V \text{div } F$$

wobei  $F$  die Flußdichte ist. Damit ergibt sich nun

$$u_t = - \text{div } F$$

Vielfach hat  $F$  die Gestalt  $F = -a \nabla u$  für eine Konstante  $a > 0$ . Dann erhält man

$$u_t = a \Delta u$$

Interessant ist auch der Fall, dass die Koeffizienten nicht nur von  $x$  sondern von  $t$  und  $x$  abhängig sind. Verallgemeinerte Probleme sind:

$$u_t - \sum_{i,k=1}^n \partial_i a_{ik} \partial_k u = 0$$

oder

$$u_t - \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) \partial_i \partial_k u + \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_i u + c(x) = 0$$

Zunächst befassen wir uns mit der klassischen Theorie.

Wir suchen eine Funktion  $u \in C^1(0, \infty) \times \mathbb{R}^n \cap C([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$  mit  $u(t, \cdot) \in C^2(\mathbb{R}^n)$  für  $t > 0$ , die das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0, & (t, x) &\in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(0, x) &= u_0(x), & x &\in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

bei gegebenem beschränktem  $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$  löst. Die Anfangsbedingung ist so zu verstehen, dass

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \xi}} u(t, x) = u_0(\xi)$$

gleichmäßig in Kompakta bezüglich  $\xi$  gilt.

**4.10 Bemerkung.** Wir werden später sehen, dass die Lösung sogar in  $C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$  liegt.

Um auf eine Lösung und deren Gestalt schließen zu können, nehmen wir an, dass wir bereits eine glatte Lösung gegeben haben. Wir definieren

$$\hat{u}(t, \xi) := (\mathcal{F}u(t, \cdot))(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u(t, x) dx$$

Es ist  $\hat{u}_t(t, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u_t(t, x) dx$  und weiter nach Lemma 4.7(f)

$$(\mathcal{F}\Delta u(t, \cdot))(\xi) = -|\xi|^2 \hat{u}(t, \xi)$$

Wir erhalten also die folgende Differentialgleichung

$$\begin{cases} \hat{u}_t(t, \xi) + |\xi|^2 \hat{u}(t, \xi) = 0, & (t, \xi) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \\ \hat{u}(0, \xi) = \hat{u}_0(\xi), & \xi \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Bei festem  $\xi$  handelt es sich also um eine gewöhnliche Differentialgleichung. Diese wird durch

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{-t|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi)$$

gelöst. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
 u(t, x) &= (\mathcal{F}^{-1}\hat{u}(t, \cdot))(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \hat{u}(t, \xi) d\xi \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} e^{-t|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi) d\xi \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} e^{-t|\xi|^2} e^{-iy\xi} u_0(y) dy d\xi \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi - t|\xi|^2} d\xi \right) u_0(y) dy
 \end{aligned}$$

Wir definieren

$$K(t, x, y) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi - t|\xi|^2} d\xi$$

und formen  $K$  für  $t > 0$  um. Hierzu definieren wir  $\eta := \sqrt{t}\xi - \frac{i(x-y)}{2t}\sqrt{t}$ , dann ist  $\xi = \frac{i(x-y)}{2t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\eta$ . Es folgt

$$t|\xi|^2 - i(x-y)\xi = |\sqrt{t}\xi|^2 - 2\sqrt{t}\xi \frac{i(x-y)}{2\sqrt{t}} + \frac{|x-y|^2}{4t} - \frac{|x-y|^2}{4t} = |\eta|^2 + \frac{|x-y|^2}{4t}$$

und damit

$$\begin{aligned}
 K(t, x, y) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} t^{-\frac{n}{2}} d\eta \\
 &= (2\pi)^{-n} t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} d\eta \\
 &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}
 \end{aligned}$$

Wir erhalten also für  $t > 0$

$$u(t, x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy$$

**4.11 Satz.** Sei  $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n)$ . Dann gilt für

$$u(t, x) := (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy \quad (4-1)$$

$u \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ ,  $u_t - \Delta u = 0$  für  $t > 0$  und

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x_0}} u(t, x) = u_0(x_0)$$

gleichmäßig bezüglich Kompakta in  $x_0$ .

*Beweis.* Offenbar ist die Abbildung  $u$  wohldefiniert. Weiter ist

$$K(\cdot, \cdot, \cdot) \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

und es gilt

$$(\partial_t - \Delta_x)K(\cdot, \cdot, y) = 0 \quad \text{für beliebiges } y \in \mathbb{R}^n$$

wie man leicht nachrechnet. Setzen wir  $\eta = \frac{x-y}{\sqrt{4t}}$ , so ergibt sich

$$\int_{|x-y|>\delta} K(t, x, y) dy = \pi^{-\frac{n}{2}} \int_{|\eta|>\frac{\delta}{\sqrt{4t}}} e^{-|\eta|^2} d\eta$$

Damit folgt

$$(i) \int_{\mathbb{R}^n} K(t, x, y) dy = 1.$$

$$(ii) \forall \delta > 0 : \lim_{t \rightarrow 0} \int_{|y-x|>\delta} K(t, x, y) dy = 0 \text{ gleichmäßig in } x \in \mathbb{R}^n.$$

und wir folgern  $u \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$  mit  $(\partial_t - \Delta)u = 0$ . Sei nun  $\varepsilon > 0$  beliebig gewählt und  $\delta = \delta(\varepsilon)$  so, dass

$$|u_0(y) - u_0(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für } |y - x_0| < 2\delta$$

gilt. Sei  $M := \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |u_0(y)| < \infty$ . Dann folgt für  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $|x - x_0| < \delta$

$$\begin{aligned} & |u(t, x) - u_0(x_0)| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} K(t, x, y)(u_0(y) - u_0(x_0)) dy \right| \\ &\leq \int_{|y-x|<\delta} |K(t, x, y)(u_0(y) - u_0(x_0))| dy + \int_{|y-x|>\delta} |K(t, x, y)(u_0(y) - u_0(x_0))| dy \\ &\leq \int_{|y-x_0|<2\delta} |K(t, x, y)(u_0(y) - u_0(x_0))| dy + 2M \int_{|y-x|>\delta} K(t, x, y) dy \\ &\leq \varepsilon + 2M \int_{|y-x|>\delta} K(t, x, y) dy \\ &< 2\varepsilon \end{aligned}$$

falls  $t < t_0$ . □

**4.12 Bemerkung.** Der Lösungsformel (4-1) sieht man an, dass unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit vorliegt, denn  $u(t, \cdot)$  hängt für  $t > 0$  von allen Werten von

$u_0$  ab, bzw.  $u_0(\cdot)$  beeinflusst für  $t > 0$  sofort alle  $u(t, x)$  für beliebige  $x \in \mathbb{R}^n$ . Aus (4-1) folgt auch

$$u(t, x) \leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(t, x, y) dy \right) \sup_{z \in \mathbb{R}^n} u_0(z) \leq \|u_0\|_\infty$$

sowie

$$\inf_{z \in \mathbb{R}^n} u_0(z) \leq u(t, x) \leq \sup_{z \in \mathbb{R}^n} u_0(z).$$

Hierbei handelt es sich offenbar um eine Art „Maximumprinzip“.

### c) Die Gleichung von Black und Scholes

**4.13 Bemerkung.** Die Formel von Black und Scholes behandelt die Optionspreisbewertung. Zur Beschreibung des Modells verwenden wir innerhalb dieser Bemerkung die in der Stochastik übliche Schreibweise  $S_t$  statt  $S(t)$ , d.h. vorübergehend ist  $S_t$  nicht die partielle Ableitung.

Sei  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  der Kurs eines Basiswerts. Dann genügt  $S_t$  nach einem Standardmodell der Finanzmathematik der stochastischen Differentialgleichung

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Dabei sind  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $\sigma \geq 0$  konstante Parameter, und  $W_t$  ist die Brownsche Bewegung.

Gesucht ist der Wert  $V(S_t, t)$  einer Option auf den Basiswert zum Zeitpunkt  $t$ . Eine festverzinsliche Anlage (Bond) mit Zinssatz  $r \geq 0$  erfüllt die Gleichung

$$dB_t = rB_t dt.$$

Wir bilden ein Portfolio aus  $c_1(t)$  Anteilen des Bonds,  $c_2(t)$  Anteilen des Basiswerts und einer verkauften Option, d.h. für den zugehörigen Wert  $Y_t$  gilt

$$Y_t = c_1(t)B_t + c_2(t)S_t - V(S_t, t). \quad (4-2)$$

Wir nehmen an, dass das Portfolio  $Y_t$  risikolos ist und der Markt keine Arbitrage zulässt. In diesem Fall kann das Portfolio nur soviel erwirtschaften wie eine risikolose Anleihe. Wir erhalten

$$dY_t = rY_t dt. \quad (4-3)$$

Falls das Portfolio selbstfinanzierend ist, gilt

$$dY_t = c_1(t)dB_t + c_2(t)dS_t - dV(S_t, t). \quad (4-4)$$



Um den letzten Term zu berechnen, wenden wir das Lemma von Itô an und erhalten

$$\begin{aligned} dV(S_t, t) &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dS_t^2 \\ &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S} dW_t. \end{aligned} \quad (4-5)$$

Wir können die Differentialgleichungen für  $B_t$ ,  $S_t$  und die Gleichung (4-5) in (4-4) einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned} dY_t &= \left[ c_1(t)rB_t + c_2(t)\mu S_t - \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \right] dt \\ &\quad + \left( c_2(t)\sigma S_t - \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S} \right) dW_t. \end{aligned} \quad (4-6)$$

Falls das Portfolio keine zufälligen Schwankungen enthält, muss die letzte Klammer verschwinden, d.h. es gilt  $\frac{\partial V}{\partial S}(S_t, t) = c_2(t)$ . Setzt man (4-2) und (4-6) in (4-3) ein ergibt sich die Gleichheit

$$\begin{aligned} r \left( c_1(t)B_t + S_t \frac{\partial V}{\partial S}(S_t, t) - V(S_t, t) \right) dt &= rY_t dt = dY_t \\ &= \left[ c_1(t)rB_t - \frac{\partial V}{\partial t}(S_t, t) - \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_t, t) \right] dt. \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen der Koeffizienten erhalten wir eine partielle Differentialgleichung für die Funktion  $V = V(S, t)$ , wobei wir  $S$  als unabhängige Variable ansehen:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) + rS \frac{\partial V}{\partial S}(S, t) - V(S, t) = 0.$$

Dies ist eine Gleichung in  $(S, t) \in (0, \infty) \times (0, T)$ , welche noch mit Randbedingungen versehen werden muss. Da eine Option auf einen wertlosen Basiswert selbst wertlos ist, schreiben wir  $V(0, t) = 0$  ( $t \in [0, T]$ ) vor. Bei einem europäischen Call ist die Endbedingung gegeben durch

$$V(S, T) = (S - E)_+ := \max\{S - E, 0\},$$

wobei  $E$  der Ausübungspreis der Option ist. Für  $S \rightarrow \infty$  ist die Option annähernd soviel wert wie der Basiswert selbst, d.h. man verlangt

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{V(S, t)}{S} = 1 \quad (t \in [0, T]).$$

Insgesamt erhalten wir folgende Differentialgleichung von Black und Scholes, welche wir jetzt wieder in der üblichen Schreibweise  $V = V(t, s)$  aufschreiben.

$$\begin{aligned} V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 V_{ss} + rsV_s - rV &= 0 && ((t, s) \in (0, T) \times (0, \infty)), \\ V(T, s) &= \max(s - E, 0) && (s \in (0, \infty)), \\ V(t, 0) &= 0 && (t \in [0, T]), \\ \lim_{s \rightarrow \infty} V(t, s)/s &= 1 && (t \in [0, T]). \end{aligned} \quad (4-7)$$

Die folgende Black-Scholes-Formel erschien am 15. 10. 1997 in der New York Times.

**4.14 Satz (Black-Scholes-Formel).** Zu  $d \in \mathbb{R}$  sei

$$N(d) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d}^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho.$$

Definiere

$$d_{1,2}(t, s) := \frac{\ln\left(\frac{s}{E}\right) + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

und

$$V(t, s) := sN(d_1(t, s)) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2(t, s)) \quad ((t, s) \in (0, T) \times (0, \infty)).$$

Dann löst  $V$  die Black-Scholes-Gleichung (4-7).

*Beweis.* Wir beginnen mit einer Variablentransformation: Für  $s > 0$  sei  $x := \ln\left(\frac{s}{E}\right)$  bzw.  $s = Ee^x$  und  $\tau := \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)$  bzw.  $t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}$ . Ferner sei

$$v(\tau, x) := \frac{V(t, s)}{E} = \frac{V\left(T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}, Ee^x\right)}{E}$$

Damit geht unser Problem in

$$\begin{aligned} v_\tau &= v_{xx} + (k_1 - 1)v_x - k_1v, & (\tau, x) &\in [0, \frac{1}{2}\sigma^2T] \times \mathbb{R}, \\ v(0, x) &= \max(e^x - 1, 0), & x &\in \mathbb{R}, \\ v(\tau, -\infty) &= 0, & \tau &\in [0, \frac{1}{2}\sigma^2T], \\ v(\tau, x)/e^x &\rightarrow 1 \quad (x \rightarrow \infty), & \tau &\in [0, \frac{1}{2}\sigma^2T], \end{aligned}$$

über. Um dieses Problem zu lösen, wählen wir den folgenden Ansatz:

$$u(\tau, x) := e^{-(\alpha x + \beta \tau)}v(\tau, x) \quad \text{bzw.} \quad v(\tau, x) = e^{\alpha x + \beta \tau}u(\tau, x)$$

für gewisse, noch zu wählende  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} v_\tau &= \beta v + e^{\alpha x + \beta \tau}u_\tau = \beta e^{\alpha x + \beta \tau}u + e^{\alpha x + \beta \tau}u_\tau, \\ v_x &= \alpha v + e^{\alpha x + \beta \tau}u_x = \alpha e^{\alpha x + \beta \tau}u + e^{\alpha x + \beta \tau}u_x, \\ v_{xx} &= \alpha v_x + \alpha e^{\alpha x + \beta \tau}u_x + e^{\alpha x + \beta \tau}u_{xx} = \alpha^2 e^{\alpha x + \beta \tau}u + 2\alpha e^{\alpha x + \beta \tau}u_x + e^{\alpha x + \beta \tau}u_{xx} \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} 0 &= v_\tau - v_{xx} - (k_1 - 1)v_x + k_1v \\ &= e^{\alpha x + \beta \tau} \{ \beta u + u_\tau - \alpha^2 u - 2\alpha u_x - u_{xx} - (k_1 - 1)(\alpha u + u_x) + k_1 u \} \end{aligned}$$

also

$$u_\tau = u_{xx} + (2\alpha + (k_1 - 1)) u_x + (-\beta + \alpha^2 + \alpha(k_1 - 1) - k_1) u$$

Sinnigerweise wählen wir nun

$$\alpha := -\frac{k_1 - 1}{2}, \quad \beta := \frac{(k_1 - 1)^2}{4} - \frac{(k_1 - 1)^2}{2} - k_1 = -\frac{(k_1 + 1)^2}{4}$$

und damit erfüllt die Funktion

$$u(\tau, x) := e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x + \frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} v(\tau, x)$$

das folgende System:

$$\begin{aligned} u_\tau &= u_{xx}, & (\tau, x) &\in [0, \frac{1}{2}\sigma^2 T] \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= \max\left(e^{\frac{k_1+1}{2}x} - e^{\frac{k_1-1}{2}x}, 0\right) =: u_0(x), & x &\in \mathbb{R}, \\ u(\tau, x)e^{-\frac{1}{2}(k_1-1)x} &\rightarrow 0, & (x \rightarrow -\infty), & \tau \in [0, \frac{1}{2}\sigma^2 T], \\ u(\tau, x)e^{-\frac{1}{2}(k_1-1)x} / e^{\frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} e^x &\rightarrow 1 & (x \rightarrow \infty), & \tau \in [0, \frac{1}{2}\sigma^2 T]. \end{aligned}$$

Nach dem vorigen Abschnitt ist aber

$$u(\tau, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\tau}} u_0(y) dy$$

eine Lösung zu obigem Problem mit

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \xi}} u(\tau, x) = u_0(\xi).$$

Mit  $z := \frac{y-x}{\sqrt{2\tau}}$  folgt

$$u(\tau, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x + \sqrt{2\tau}z) e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Es gilt

$$u_0(x + \sqrt{2\tau}z) = \max\left(e^{\frac{k_1+1}{2}x + \frac{k_1+1}{2}\sqrt{2\tau}z} - e^{\frac{k_1-1}{2}x + \frac{k_1-1}{2}\sqrt{2\tau}z}, 0\right).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} u(\tau, x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1+1)(x+\sqrt{2\tau}z)} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1-1)(x+\sqrt{2\tau}z)} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1+1)(x+\sqrt{2\tau}z)} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}(z-\frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau})^2} dz \\
&= e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x + \frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho \\
&= e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x + \frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} N(d_1)
\end{aligned}$$

mit  $d_1 := \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau}$  und  $N(d_1) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_1}^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho$ . Wir erhalten

$$u(\tau, x) = e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x + \frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x + \frac{1}{4}(k_1-1)^2\tau} N(d_2)$$

mit  $d_2 := \frac{x}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2}(k_1-1)\sqrt{2\tau}$ . Rückwärts ergibt sich nun

$$v(\tau, x) = e^x N(d_1) - e^{-k_1\tau} N(d_2)$$

und

$$V(t, s) = sN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$$

mit  $d_{1,2} = \frac{\ln(\frac{s}{E}) + (r \pm \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ . □

## d) Maximumprinzip

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit einem Maximumprinzip für parabolische Differentialoperatoren von der Form

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \partial_{x_i} u + c(t, x)u - u_t = f(t, x)$$

für  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $\Omega$  Gebiet im  $\mathbb{R}^n$ ,  $t \in [0, T]$  beschäftigen. Sei  $D := (0, T] \times \Omega$ ,  $Q := (0, T) \times \Omega$ ,  $\Sigma := [0, T] \times \partial\Omega \cup (\{0\} \times \Omega)$ . Vorausgesetzt sei  $a_{ij}, b_i, c \in C(\bar{D})$  und  $(a_{ij})$  sei gleichmäßig positiv definit. Wir wollen das schwache Maximumprinzip beweisen:

**4.15 Satz.** *Sei  $\Omega$  beschränkt und  $u \in C^2(\bar{Q})$  mit  $Lu \geq 0$  in  $Q$ , sowie  $c = 0$ . Dann nimmt  $u$  sein Maximum auf  $\Sigma$  an.*

*Beweis.* (i) Sei  $Lu > 0$  in  $Q$ . Wir beweisen, dass  $u$  sein Maximum nicht in  $Q$  annimmt. Sei dazu angenommen, dass  $u$  sein Maximum in  $(t_0, x_0) \in Q$  annimmt. Offenbar gilt dann  $u_t(t_0, x_0) = 0$  und  $\partial_i u(t_0, x_0) = 0$ . Weiter ist  $(\partial_{x_i} \partial_{x_j} u(t_0, x_0))_{i,j}$  negativ semidefinit. Wegen der positiven Definitheit von  $(a_{ij})_{i,j=1}^n$  folgt damit

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t_0, x_0) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(t_0, x_0) \leq 0$$

und also folgt  $Lu(t_0, x_0) \leq 0$ , was aber im Widerspruch zur Voraussetzung steht.

(ii) Sei nun  $Lu \geq 0$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $u_\varepsilon(t, x) := u(t, x) + \varepsilon e^{\gamma x_1}$ , wobei die Konstante  $\gamma$  noch zu bestimmen ist. Es ist  $Lu_\varepsilon = Lu + \varepsilon(\gamma^2 a_{11} + \gamma b_1)e^{\gamma x_1} > 0$  in  $Q$ , falls  $\gamma = \gamma(a_{11}, b_1)$  groß genug ist. Nach (i) folgt

$$\max_{\bar{Q}} u_\varepsilon = \max_{\partial D} u_\varepsilon \quad (\varepsilon > 0) \quad \implies \quad \max_{\bar{D}} u = \max_{\partial D} u$$

(iii) Sei  $Lu > 0$ . Wir zeigen, dass  $u$  sein Maximum nicht auf  $\{T\} \times \Omega$  annimmt. Es sei  $x_0 \in \Omega$  mit  $u(T, x_0) = \max_{y \in \Omega} u(T, y)$ . Es folgt

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(T, x_0) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(T, x_0) + \sum_{i=1}^n b_i(T, x_0) \partial_{x_i} u(T, x_0) \leq 0$$

Ferner gilt  $u_t(T, x_0) \geq 0$  und also folgt  $Lu(T, x_0) \leq 0$  was nicht sein kann.

(iv) Sei  $Lu \geq 0$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $u_\varepsilon(t, x) := u(t, x) + \varepsilon e^{-t}$ . Es folgt  $Lu_\varepsilon = Lu + \varepsilon e^{-t} > 0$ . Wegen (i), (iii) folgt mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  die Behauptung.  $\square$

**4.16 Korollar.** *Es sei  $c = 0$ ,  $Lu = Lv$ ,  $u(0, x) = v(0, x)$ ,  $u(t, x) = v(t, x)$  für  $x \in \partial\Omega$ . Dann gilt schon  $u = v$ .*

Es gilt auch das starke Maximumprinzip:

**4.17 Satz.** *Gelte  $Lu \geq 0$  und sei  $M := \sup_D u$ . Sei  $u(t_0, x_0) = M$  für ein  $(t_0, x_0) \in D$  und es gelte eine der folgenden Bedingungen:*

(i)  $c = 0$

(ii)  $c \leq 0$  und  $M \geq 0$

(iii)  $M = 0$

Dann gilt  $u = M$  in  $[0, t_0] \times \bar{\Omega}$ .

## Literatur

- [1] Adams, R. A., Fournier, J.: Sobolev spaces. 2nd edition, Academic Press, Amsterdam etc., 2003.
- [2] Evans, L. C.: Partial Differential Equations. American Mathematical Society, Providence, R. I., 2002.
- [3] Hörmander, L.: The analysis of linear partial differential operators, Band I-IV. Springer-Verlag Berlin 1976.
- [4] John, F: Partial differential equations. Springer-Verlag New York 1991.
- [5] Jost, J.: Partielle Differentialgleichungen. Berlin 1998.
- [6] Lions, J.-L.: Non-homogeneous boundary value problems and applications (3 Bände). Springer-Verlag Berlin 1972.
- [7] Racke, R.: Lectures on nonlinear evolution equations. Initial value problems. Vieweg-Verlag Braunschweig 1992.
- [8] Strauss, W. A.: Partielle Differentialgleichungen. Vieweg-Verlag Braunschweig 1995.
- [9] Wloka, J.: Partielle Differentialgleichungen. Teubner-Verlag Stuttgart 1982.

## 5. Hyperbolische Theorie

**5.1 Worum geht's?** Als Standardvertreter für hyperbolische Gleichungen wollen wir uns in diesem Abschnitt mit der Wellengleichung beschäftigen. Der Reihe nach werden wir Lösungsdarstellungen für die Wellengleichung in einer, dann in drei und schließlich in zwei Dimensionen konstruieren. An den expliziten Formeln lässt sich ein völlig anderes Verhalten der Lösungen ablesen, als es bei elliptischen oder parabolischen Gleichungen der Fall ist. Nach einem kurzen Ausflug in die Sobolevraumtheorie werden wir am Ende des Kapitels auf allgemeine Lösungsmethoden mittels Fouriertransformation und auf Energieabschätzungen eingehen.

### a) Die eindimensionale Wellengleichung

Die eindimensionale Wellengleichung modelliert z.B. die Auslenkung einer schwingenden Saite oder eines Stabes. Sie ergibt sich aus dem Newton'schen Kraftgesetz

$$F = m \cdot a.$$

Hierbei bezeichnet  $F$  die auf einen Körper wirkende Kraft,  $m$  seine Masse und  $a$  die Beschleunigung. Ist  $u(t, x)$  die Auslenkung einer homogenen Saite aus dem Ruhezustand, ergibt sich aus diesem Gesetz zwischen den Punkten  $x_0$  und  $x$  in Transversalrichtung die Kraftdifferenz

$$F_x^t - F_{x_0}^t = m \int_{x_0}^x u_{tt}(t, s) ds.$$

Der Kraftvektor an der Stelle  $x$  ist gegeben durch  $F_x := T\nu/|\nu|$ , wobei

$$\nu(t, x) = \partial_x \begin{pmatrix} x \\ u(t, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ u_x(t, x) \end{pmatrix}$$

und  $T$  den (materialabhängigen) Spannungskoeffizienten bezeichnet. Setzt man dies in obige Kraftgleichung ein und leitet anschließend nach  $x$  ab, erhält man die nicht-lineare Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2 \partial_x \frac{u_x}{\sqrt{1 + |u_x|^2}} = 0,$$

wobei  $c := \sqrt{T/m}$  die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle bezeichnet. Unter der weiteren Annahme, dass  $|u_x|$  sehr klein ist, liefert die Taylorentwicklung, dass  $\sqrt{1 + |u_x|^2} \approx 1$ . Dies führt zur linearen eindimensionalen Wellengleichung, die zusammen mit Anfangsbedingungen die Gestalt

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^2, \\ u|_{t=0} = u_0, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t|_{t=0} = u_1, & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (5-1)$$

annimmt. Zur Lösung nehmen wir zunächst eine Variablentransformation vor. Wir setzen  $\zeta := x + ct$  und  $\eta := x - ct$  bzw.  $x = \frac{\zeta + \eta}{2}$  und  $t = \frac{\zeta - \eta}{2c}$ . Weiter sei  $v(\zeta, \eta) := u(\frac{\zeta - \eta}{2c}, \frac{\zeta + \eta}{2})$ , dann ergibt sich für die quadratischen partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (v_\zeta + v_\eta)_x = v_{\zeta\zeta} + 2v_{\zeta\eta} + v_{\eta\eta} \\ u_{tt} &= c(v_\zeta - v_\eta)_t = c^2v_{\zeta\zeta} - 2cv_{\zeta\eta} + c^2v_{\eta\eta} \end{aligned}$$

Mithilfe der Differentialgleichung erhält man  $v_{\zeta\eta} = 0$ . Damit ist klar, dass für geeignete Funktionen  $f$  und  $g$

$$v(\zeta, \eta) = f(\zeta) + g(\eta)$$

gilt. Durch Rücktransformation ergibt sich nun unmittelbar

$$u(t, x) = f(x + ct) + g(x - ct).$$

Unser Ziel ist natürlich, die Funktionen  $f$  und  $g$  explizit anzugeben. Das ist unter Verwendung der Anfangsbedingungen auch tatsächlich möglich. Es soll ja  $u(0, x) = f(x) + g(x) = u_0(x)$  und  $\partial_t u(0, x) = c(f'(x) - g'(x)) = u_1(x)$  gelten. Aus der zweiten Bedingung folgern wir zunächst durch Integration  $f(x) - g(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x u_1(s) ds + k$  und erhalten dann:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2} \left\{ u_0(x + ct) + k + \frac{1}{c} \int_{x_0}^{x+ct} u_1(s) ds \right. \\ &\quad \left. + u_0(x - ct) - k - \frac{1}{c} \int_{x_0}^{x-ct} u_1(s) ds \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ u_0(x + ct) + u_0(x - ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds \right\}. \end{aligned} \quad (5-2)$$

Diese „Lösungsformel“ wird auch als d'Alembertsche<sup>1</sup> Formel bezeichnet. Bei dieser Formel ist die Beziehung zwischen Daten und Lösung schön zu erkennen. Wir haben somit bewiesen:

**5.2 Satz.** Sei  $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$  und  $u$  definiert wie in (5-2). Dann gilt  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  ist eindeutige Lösung von (5-1).

Als Nächstes wollen wir das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & (t, x) \in (0, \infty)^2, \\ u(t, 0) = 0, & t \in (0, \infty), \\ u(0, x) = u_0, & x \in (0, \infty), \\ u_t(0, x) = u_1, & x \in (0, \infty), \end{cases} \quad (5-3)$$

betrachten. Dies gibt die Situation einer schwingenden Saite die an einem Ende festgehalten wird (Dirichletrandbedingungen) wieder. Es handelt sich also um eine

<sup>1</sup>Jean Baptiste Le Rond d'Alembert, 16.11.1717 - 29.10.1783



reflektierte Welle. Diese, anschaulich sehr einleuchtende, Tatsache macht man sich auch zunutze, um eine Lösung zu konstruieren. Man reflektiert hierzu einfach die Anfangsdaten antisymmetrisch, d.h. man setzt

$$\tilde{u}_0(x) := \begin{cases} u_0(x), & x \geq 0, \\ -u_0(-x), & x < 0, \end{cases}$$

und  $\tilde{u}_1$  entsprechend. Dann erhält man durch die d'Alembert'sche Formel eine Lösung auf ganz  $\mathbb{R}$ , die gegeben ist durch

$$\tilde{u}(t, x) = \frac{1}{2} \left\{ \tilde{u}_0(x + ct) + \tilde{u}_0(x - ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{u}_1(s) ds \right\}.$$

Setzt man  $x = 0$  ergibt sich aus der Definition von  $\tilde{u}_0$  und  $\tilde{u}_1$  sofort  $\tilde{u}(t, 0) = 0$  für alle  $t \in (0, \infty)$ . Damit löst die Funktion

$$u(t, x) := \tilde{u}|_{[0, \infty)^2}(t, x) \quad (5-4)$$

das Problem (5-3). Wir erhalten somit:

**5.3 Satz.** Sei  $u_0 \in C^2([0, \infty))$ ,  $u_1 \in C^1([0, \infty))$  und  $u$  definiert wie in (5-4). Dann gilt  $u \in C^2((0, \infty)^2) \cap C^1([0, \infty) \times (0, \infty))$  ist eindeutige Lösung von (5-3) und es gilt

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \left\{ u_0(ct + x) + u_0(ct - x) + \frac{1}{c} \int_{ct-x}^{ct+x} u_1(s) ds \right\}, \quad x \leq ct. \quad (5-5)$$

An Darstellung (5-5) lässt sich schön die reflektierte Welle ablesen.

## b) Die Wellengleichung im $\mathbb{R}^3$

Sie beschreibt etwa die Ausbreitung von Schall oder elektromagnetischen Wellen und ist gegeben durch

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^3, \\ u(0, x) = u_0, & x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(0, x) = u_1, & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (5-6)$$

**5.4 Satz.** Sei  $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^3)$ ,  $u_1 \in C^1(\mathbb{R}^3)$ . Dann existiert eine eindeutige Lösung  $u \in C^2((0, \infty) \times \mathbb{R}^3) \cap C^1([0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$  von (5-6) die gegeben ist durch

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y|=ct} u_1(x + y) dS(y) + \partial_t \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y|=ct} u_0(x + y) dS(y). \quad (5-7)$$

Darstellung (5-7) heißt Kirchhoff'sche Formel.

*Beweis.* Wir werden mit Hilfe der Methode des sphärischen Mittels (5-6) auf eine eindimensionale Wellengleichung reduzieren. Ist hierzu  $u$  Lösung, dann gilt mit dem Satz von Gauß

$$\int_{B(0,r)} u_{tt} \, dx = c^2 \int_{B(0,r)} \operatorname{div} \nabla u \, dx = c^2 \int_{\partial B(0,r)} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, dS(x),$$

wobei  $B(0, r)$  die Kugel um 0 mit Radius  $r$  und  $\vec{n}$  den äußeren Normalenvektor an  $\partial B(0, r)$  bezeichnet. Wir führen Kugelkoordinaten ein, setzen  $\tilde{u}(t, r, \varphi, \theta) := u(t, x(r, \varphi, \theta))$  und definieren das sphärische Mittel durch

$$\bar{u}(t, r) := \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \tilde{u}(t, r, \varphi, \theta) \sin(\theta) \, d\theta d\varphi.$$

Dann ergibt sich  $\partial u / \partial \vec{n} = \partial \tilde{u} / \partial r$  und aus obiger Gleichung wird

$$\int_0^r \rho^2 \bar{u}_{tt}(t, \rho) \, d\rho = c^2 r^2 \bar{u}_r(t, r).$$

Ableiten nach  $r$  und anschließendes teilen durch  $r^2$  liefert

$$\bar{u}_{tt} = c^2 \left( \bar{u}_{rr} + \frac{2}{r} \bar{u}_r \right).$$

Setzt man nun  $v(t, r) := r \bar{u}(t, r)$  lässt sich leicht nachrechnen, dass  $v$  das folgende Anfangsrandwertproblem löst:

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{rr} = 0, & (t, r) \in (0, \infty)^2, \\ v(t, 0) = 0, & t \in (0, \infty), \\ v(0, r) = r \bar{u}_0, & r \in (0, \infty), \\ v_t(0, r) = r \bar{u}_1, & r \in (0, \infty), \end{cases}$$

wobei  $\bar{u}_0$  und  $\bar{u}_1$  die sphärischen Mittel der Anfangswerte bezeichnen. Nach Satz 5.3 und Formel (5-5) ist  $v$  gegeben durch

$$v(t, r) = \frac{1}{2c} \left\{ \int_{ct-r}^{ct+r} s \bar{u}_1(s) \, ds + \partial_t \int_{ct-r}^{ct+r} s \bar{u}_0(s) \, ds \right\}, \quad r \leq ct. \quad (5-8)$$

Mit  $v$  ist auch  $\bar{u}$  bestimmt. Es bleibt die Frage, wie sich aus  $\bar{u}$  die Funktion  $u$  zurückgewinnen lässt. Hierzu wollen wir uns zunächst den Fall  $r = 0$  betrachten. Eine einfache Anwendung des Satzes von der dominierten Konvergenz zeigt, dass

$$\bar{u}(t, 0) = \lim_{r \rightarrow 0} \bar{u}(t, r) = u(t, 0), \quad t \in (0, \infty).$$

Andererseits gilt aber auch

$$\bar{u}(t, 0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{v(t, r)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{v(t, r) - v(t, 0)}{r} = v_r(t, 0).$$

Mit der expliziten Formel (5-8) lässt sich  $v_r(t, 0)$  berechnen. Genauer erhält man

$$v_r(t, 0) = t\bar{u}_1(ct) + \partial_t t\bar{u}_0(ct).$$

Die Rücktransformation auf kartesische Koordinaten liefert somit

$$u(t, 0) = v_r(t, 0) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y|=ct} u_1(y) dS(y) + \partial_t \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y|=ct} u_0(y) dS(y), \quad (5-9)$$

was genau Formel (5-7) im Punkt  $x = 0$  entspricht. Um auf die allgemeine Darstellung zu kommen nutzen wir aus, dass die betrachtete Wellengleichung (5-6) translationsinvariant ist. Setzt man nämlich für beliebiges  $x_0 \in \mathbb{R}^3$ ,

$$w(t, x) := u(t, x + x_0),$$

dann sieht man ohne Schwierigkeiten, dass  $w$  Gleichung (5-6) löst zu den Anfangswerten

$$w_0(x) = u_0(x + x_0) \quad \text{und} \quad w_1(x) = u_1(x + x_0).$$

Die Anwendung von Formel (5-9) auf  $w(t, 0) = u(t, x_0)$  liefert schließlich Darstellung (5-7).  $\square$

**5.5 Bemerkung.** An Formel (5-7) lässt sich ablesen, dass  $u(t_0, x_0)$  nur von Werten von  $u_0(x)$  und  $u_1(x)$  auf der Kugeloberfläche  $\partial B(x_0, ct_0)$  abhängt und nicht von Werten im Inneren der Kugel  $B(x_0, ct_0)$ . Dieser Sachverhalt wird *Huygens'sches Prinzip* genannt und ist der Grund dafür, dass wir Klänge scharf hören und Gegenstände scharf sehen können. D.h. physikalisch interpretiert sagt das Huygens'sche Prinzip, dass eine Person die sich im Abstand  $d$  zu einer zweiten Person befindet zum Zeitpunkt  $t_0$  genau das hört, was die zweite Person zum Zeitpunkt  $t - d/c$  gesagt hat.

### c) Die Wellengleichung im $\mathbb{R}^2$

Sie ist z.B. ein Modell für die Schwingung einer Membran (Trommel). Wir werden sehen, dass im zweidimensionalen Raum das Huygens'sche Prinzip nicht gilt. Wir betrachten

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^2, \\ u(0, x) = u_0, & x \in \mathbb{R}^2, \\ u_t(0, x) = u_1, & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (5-10)$$

**5.6 Satz.** Sei  $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ ,  $u_1 \in C^1(\mathbb{R}^2)$ . Dann existiert eine eindeutige Lösung  $u \in C^2((0, \infty) \times \mathbb{R}^2) \cap C^1([0, \infty) \times \mathbb{R}^2)$  von (5-10) die gegeben ist durch

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi c} \int_{|y| \leq ct} \frac{u_1(x+y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y|^2}} dS(y) + \partial_t \frac{1}{2\pi c} \int_{|y| \leq ct} \frac{u_0(x+y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y|^2}} dS(y). \quad (5-11)$$

*Beweis.* Wir setzen O.B.d.A.  $u_0 = 0$  voraus und fassen  $u$  als Lösung von (5-6) auf. Dies ist ohne Probleme möglich, wenn wir die auftretenden Funktionen einfach als konstant in  $x_3$  auffassen. Satz 5.4 liefert dann

$$u(t, 0, 0) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|(y_1, y_2, y_3)|=ct} u_1(y_1, y_2) dS(y_1, y_2, y_3).$$

Da  $u_1$  nur von  $(y_1, y_2)$  abhängt, kann die Integration über die  $y_3$ -Koordinate berechnet werden. Sei hierzu  $V := \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1^2 + y_2^2 \leq c^2 t^2\}$  und die obere Halbkugelschale  $\partial B^+(0, ct)$  parametrisiert durch

$$\Phi : V \rightarrow \partial B^+(0, ct), \quad (y_1, y_2)^T \mapsto \Phi(y_1, y_2) := \left( y_1, y_2, \sqrt{c^2 t^2 - y_1^2 - y_2^2} \right)^T.$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass

$$|\partial_{y_1} \Phi(y_1, y_2) \times \partial_{y_2} \Phi(y_1, y_2)| = \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - y_1^2 - y_2^2}}.$$

Da sich für die entsprechende Parametrisierung für die untere Halbkugelschale das gleiche ergibt, erhält man für das Oberflächenintegral

$$\begin{aligned} u(t, 0, 0) &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|(y_1, y_2, y_3)|=ct} u_1(y_1, y_2) dS(y_1, y_2, y_3) \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|(y_1, y_2)| \leq ct} u_1(y_1, y_2) |\partial_{y_1} \Phi(y_1, y_2) \times \partial_{y_2} \Phi(y_1, y_2)| d(y_1, y_2) \\ &= \frac{1}{2\pi c} \int_{|(y_1, y_2)| \leq ct} \frac{u_1(y_1, y_2)}{\sqrt{c^2 t^2 - y_1^2 - y_2^2}} d(y_1, y_2) \end{aligned}$$

Da wie (5-6) auch Gleichung (5-10) translationsunabhängig ist, folgt mit dem gleichen Translationsargument wie am Ende des Beweises von Satz 5.4 die Behauptung.  $\square$

**5.7 Bemerkung.** (a) Formel (5-11) zeigt, dass in zwei Dimensionen die Lösung  $u(t_0, x_0)$  auch von Werten von  $u_0(x)$  und  $u_1(x)$  im Inneren der Kugel  $B(x_0, ct)$  abhängt, im Gegensatz zur Situation in drei Dimensionen. Damit gilt hier das Huygens'sche Prinzip nicht. Als alltägliches Beispiel stelle man sich z.B. einen Stein vor, der ins Wasser fällt. Hier wird nicht nur eine Welle erzeugt, die sich auf der zweidimensionalen Wasseroberfläche ausbreitet, sondern es bilden sich weitere mit der Zeit abklingende Wellen, die der ersten in einem bestimmten Abstand hinterherlaufen.

(b) Man kann zeigen, dass das Huygens'sche Prinzip in allen ungeraden Dimensionen gilt, und in allen geraden Dimensionen nicht. Es sei bemerkt, dass somit Dimension drei die kleinste ist, in der das Prinzip gilt.

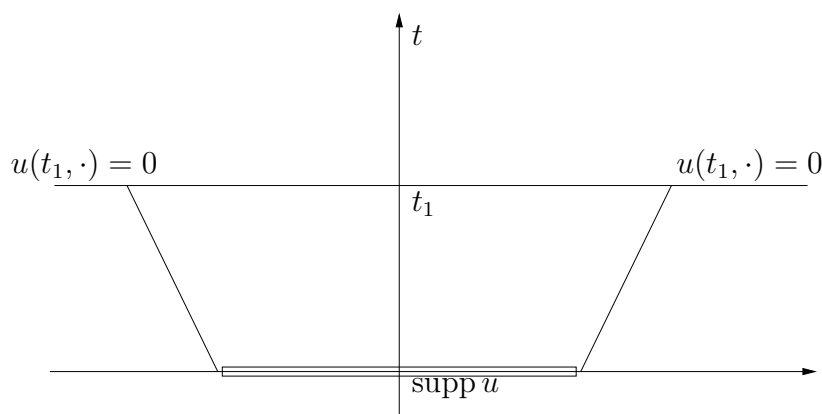


Abbildung 5: Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit

(c) Die Darstellungen für die Lösung der Wellengleichung implizieren die für hyperbolische Gleichungen typische endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit (Abb. 5). Hat  $u_0$  kompakten Träger, so auch  $u(t, \cdot)$  für jedes  $t \geq 0$ . Im Gegensatz dazu hatten wir bei parabolischen Gleichungen unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit.

## d) Sobolevräume

**5.8 Worum geht's?** Bevor wir zur Lösung der Wellengleichung im  $\mathbb{R}^n$  und der Energiegleichung kommen, bietet es sich an Sobolevräume einzuführen. Das anschließende Kapitel über Hilbertraumtheorie wird deren Wichtigkeit für die Behandlung partieller Differentialgleichungen nochmals verdeutlichen. Die Sobolevräume werden hier allgemein eingeführt, wobei wir uns im weiteren Verlauf zur Behandlung von PDGL allerdings auf den Hilbertraumfall ( $p = 2$ ) beschränken werden.

Im folgenden sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $1 \leq p \leq \infty$ .

Für eine Distribution  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  und einen Multiindex  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  schreiben wir

$$\partial^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

falls eine Funktion  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  existiert mit  $\partial^\alpha u = [f]$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Hier ist  $[f]$  wieder die zu  $f$  gehörige reguläre Distribution (Dies macht Sinn, da die Einbettung  $L^p(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  injektiv ist).

**5.9 Definition.** a) (Sobolevraum) Zu  $k \in \mathbb{N}_0$  definiere

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad (0 \leq |\alpha| \leq k)\}.$$

Als Norm in  $W^{k,p}(\Omega)$  definiert man

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \|u\|_{k,p} := \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

b) Zu  $k \in \mathbb{N}_0$  definiere  $H_0^{k,p}(\Omega)$  als den Abschluss von  $C_c^\infty(\Omega)$  im Raum  $H^{k,p}(\Omega)$ .

c) (Besselpotentialraum) Für  $s \in \mathbb{R}$  sei

$$H^{s,p}(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \mathcal{F}^{-1}(1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}u \in L^p(\mathbb{R}^n)\}.$$

. Die Norm in  $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$  ist definiert durch

$$\|u\|_{s,p} := \|u\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} := \|\mathcal{F}^{-1}[(1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{u}(\xi)]\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

**5.10 Bemerkung.** a) Im Hilbertraumfall, d.h. falls  $p = 2$ , schreibt man

$$H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega), \quad H_0^k(\Omega) := W_0^{k,2}(\Omega).$$

b) Klar ist, dass für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $1 \leq p \leq \infty$  gilt:

$$\begin{aligned} W^{0,p}(\Omega) &= L^p(\Omega), \\ W^{k,p}(\Omega) &\hookrightarrow L^p(\Omega), \\ W_0^{k,p}(\Omega) &\subseteq W^{k,p}(\Omega). \end{aligned}$$

Die Umkehrung gilt für die letzte Inklusion i.A. nicht, aber man hat für  $p < \infty$ , dass

$$C_c^\infty(\overline{\Omega}) := C_c^\infty(\mathbb{R}^n)|_{\overline{\Omega}} \xrightarrow{d} W^{k,p}(\Omega),$$

d.h. insbesondere gilt  $W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$  (ohne Beweis).

c) Ist  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein  $C^1$ -Gebiet, dann gilt

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ und } u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Beachte, dass hier  $u|_{\partial\Omega}$  zunächst geeignet definiert werden muss, da  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  i.A. keine stetige Funktion sein muss. Die Forderung  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  kann somit als eine Art verallgemeinerte Nullrandbedingung aufgefasst werden (ohne Beweis).

d) Für  $k \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$H^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$$

mit äquivalenten Normen.

*Beweis.* Nur für  $p = 2$  (sonst schwierig). Mit  $|(i\xi)^\alpha| \leq |\xi|^{|\alpha|}$  folgt

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq k} |(i\xi)^\alpha|^2 &\leq \sum_{|\alpha| \leq k} (|\xi|^2)^{|\alpha|} \leq (1 + |\xi|^2)^k \underbrace{\sum_{|\alpha| \leq k} 1}_{=: C_1} \\ &= C_1(1 + |i\xi_1|^2 + |i\xi_2|^2 + \dots + |i\xi_n|^2)^k \\ &\leq C_2 \sum_{|\alpha| \leq k} |(i\xi)^\alpha|^2, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Binomische Formel benutzt haben und die auftretenden Binomialkoeffizienten gegen ihr Maximum (das also  $C_2/C_1$  entspricht), sowie die dann resultierende Summe grob gegen alle Summanden mit  $|\alpha| \leq k$  abgeschätzt haben (da alle Summanden positiv sind wird die Summe ja dadurch nur größer). Aus der dreimaligen Anwendung des Satzes von Plancherel folgt nun mit obiger Abschätzung, dass

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)}^2 &= \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\mathbb{R}^n} |(i\xi)^\alpha \widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha| \leq k} |(i\xi)^\alpha|^2 |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^k |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= C_1 \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}^{-1}(1 + |\xi|^2)^{k/2} \widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= C_1 \|u\|_{H^{k,2}(\mathbb{R}^n)}^2 \\ &= C_1 \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^k |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq C_2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha| \leq k} |(i\xi)^\alpha|^2 |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= C_2 \|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)}^2 \quad (u \in H^k(\mathbb{R}^n)). \end{aligned}$$

Damit sind die Normen von  $H^k(\mathbb{R}^n)$  und  $H^{k,2}(\mathbb{R}^n)$  äquivalent, womit alles gezeigt ist.  $\square$

**5.11 Lemma.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet,  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $1 \leq p \leq \infty$ . Es gelten:

- (i)  $W^{k,p}(\Omega)$  und  $W_0^{k,p}(\Omega)$  sind Banachräume.
- (ii)  $H^k(\Omega)$  und  $H_0^k(\Omega)$  sind Hilberträume mit dem (kanonischen) Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{H^k} := \sum_{|\alpha| \leq k} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v \rangle_{L^2} \quad (u, v \in H^k(\Omega) \text{ bzw. } u, v \in H_0^k(\Omega)).$$

*Beweis.* Sei  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W^{k,p}(\Omega)$  eine Cauchyfolge. Nach Definition der Norm ist für  $0 \leq |\alpha| \leq k$  auch  $(\partial^\alpha u_n)_n \subset L^p(\Omega)$  eine Cauchyfolge, daher existiert ein  $u_\alpha \in L^p(\Omega)$  mit  $\partial^\alpha u_n \rightarrow u_\alpha$  in  $L^p(\Omega)$ . Setze  $u := u_{(0,\dots,0)}$ .

Für die zugehörigen regulären Distributionen gilt mit der Hölder-Ungleichung für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\begin{aligned} |[\partial^\alpha u_n](\varphi) - [u_\alpha](\varphi)| &= \left| \int_{\Omega} (\partial^\alpha u_n - u_\alpha)(x) \varphi(x) dx \right| \\ &\leq \|\partial^\alpha u_n - u_\alpha\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

wobei  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  ist. Also gilt

$$\begin{aligned} (\partial^\alpha [u])(\varphi) &= (-1)^{|\alpha|} [u](\partial^\alpha \varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} [u_n](\partial^\alpha \varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\partial^\alpha u_n](\varphi) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\partial^\alpha u_n](\varphi) = [u_\alpha](\varphi) \end{aligned}$$

für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Somit ist  $\partial^\alpha u = u_\alpha$  in  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , d.h.  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ .

Es folgt

$$\|u_n - u\|_{k,p}^p \leq \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u_n - \partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

also haben wir  $u_n \rightarrow u$  in  $W^{k,p}(\Omega)$ , und  $W^{k,p}(\Omega)$  ist ein Banachraum. Als abgeschlossener Unterraum ist  $W_0^{k,p}(\Omega)$  auch wieder ein Banachraum. Dass  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^k}$  ein Skalarprodukt ist, folgt aus den Skalarprodukteigenschaften von  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ . Damit sind  $H^k(\Omega)$  und  $H_0^k(\Omega)$  Hilberträume.  $\square$

## e) Die Wellengleichung im $\mathbb{R}^n$ , Energiegleichung

Mit Hilfe von Fouriertransformation wollen wir in diesem Abschnitt die Wellengleichung im  $\mathbb{R}^n$  lösen. Geht es einem um die bloße Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen kommt man auf diese Weise wesentlich schneller zum Ziel als durch die direkten Methoden in den vorherigen Abschnitten. Allerdings erhält man damit nicht die schönen expliziten Darstellungen.

Wir betrachten also die Gleichung

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - \Delta u(t, x) = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(0, x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (5-12)$$

Fouriertransformation nach  $x$  liefert die (zunächst formal) äquivalente Gleichung

$$\begin{cases} \widehat{u}_{tt}(t, \xi) + |\xi|^2 \widehat{u}(t, \xi) = 0, & t \in (0, \infty), \\ \widehat{u}(0, \xi) = u_0(\xi), \\ \widehat{u}_t(0, \xi) = u_1(\xi). \end{cases} \quad (5-13)$$



Hier wird  $\xi$  wieder als Parameter aufgefasst, d.h. (5-13) ist eine gewöhnliche DGL zweiter Ordnung in  $t$ , deren eindeutige Lösung gegeben ist durch

$$\widehat{u}(t, \xi) = \widehat{u}_0(\xi) \cos(|\xi|t) + \widehat{u}_1(\xi) \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}, \quad (t, \xi) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n. \quad (5-14)$$

**5.12 Satz.** (*Existenz und Eindeutigkeit*) Sei  $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$  und  $u_1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Dann existiert eine eindeutige Lösung

$$u \in C^1([0, \infty), L^2(\mathbb{R}^n)) \cap C([0, \infty), H^1(\mathbb{R}^n))$$

von (5-12) (Beachte, dass in diesem Fall die erste Zeile in (5-12) nur in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  erfüllt ist).

Gilt weiter  $u_0 \in H^k(\mathbb{R}^n)$  und  $u_1 \in H^{k-1}(\mathbb{R}^n)$  für  $k \in \mathbb{N}$ , dann folgt

$$u \in \bigcap_{\ell=0}^k C^{k-\ell}([0, \infty), H^\ell(\mathbb{R}^n)).$$

*Beweis.* Seien  $t, t_0 \geq 0$ . Mit dem Satz von Plancherel erhalten wir

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot) - u(t_0, \cdot)\|_2 &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |(\cos(|\xi|t) - \cos(|\xi|t_0))\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &\quad + \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left| \left( \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|} - \frac{\sin(|\xi|t_0)}{|\xi|} \right) \widehat{u}_1(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der Beschränktheit von  $\cos(|\xi|t)$  und  $\sin(|\xi|t)/t|\xi|$  sieht man, dass die Integranden beschränkt sind durch  $C|u_0(\xi)|$  bzw.  $C|u_1(\xi)|$  mit einer Konstanten  $C > 0$  unabhängig von  $t, t_0$  und  $\xi$ . Es ist auch klar, dass die Integranden punktweise (in  $\xi$ ) gegen 0 gehen für  $t \rightarrow t_0$ . Somit existieren obige Integrale und der Satz von der dominierten Konvergenz liefert

$$\|u(t, \cdot) - u(t_0, \cdot)\|_2 \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow t_0).$$

Dies zeigt  $u \in C([0, \infty), L^2(\mathbb{R}^n))$ . Sei nun  $m \in \mathbb{N}_0$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  mit  $1 \leq m + |\alpha| \leq k$ . Wir erhalten weiter

$$\begin{aligned} \|\partial_t^m \partial^\alpha u(t, \cdot)\|_2 &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\cos^{(m)}(|\xi|t)|\xi|^m (i\xi)^\alpha \widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &\quad + \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\sin^{(m)}(|\xi|t)|\xi|^{m-1} (i\xi)^\alpha \widehat{u}_1(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &\leq \|\mathcal{F}^{-1} [(1 + |\xi|^2)^{(m+|\alpha|)/2} \widehat{u}_0(\xi)]\|_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|\mathcal{F}^{-1} [(1 + |\xi|^2)^{(m+|\alpha|-1)/2} \widehat{u}_1(\xi)]\|_2 \\
& \leq \|u_0\|_{H^{m+|\alpha|,2}(\mathbb{R}^n)} + \|u_1\|_{H^{m+|\alpha|-1,2}(\mathbb{R}^n)} \\
& \leq \|u_0\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} + \|u_1\|_{H^{k-1}(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

wobei wir von den Abschätzungen  $\|\xi\|^m (i\xi)^\alpha \leq (1 + |\xi|^2)^{(m+|\alpha|)/2}$ ,  $|\cos^{(m)}(|\xi|t)| \leq 1$  und  $|\sin^{(m)}(|\xi|t)| \leq 1$  für  $(t, \xi) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$  Gebrauch machten. Dies impliziert für beliebiges  $T > 0$ , dass

$$u \in W^{m,\infty}([0, T], H^{k-m}(\mathbb{R}^n)) \quad (0 \leq m \leq k).$$

Die behauptete Stetigkeit von  $u$  und der Ableitungen erhält man analog zu oben als eine Folgerung des Satzes von Lebesgue. Die Einzelheiten seien hier dem Leser als Übungsaufgabe überlassen. Die Eindeutigkeit ergibt sich aus der Eindeutigkeit der Lösung der transformierten Gleichung (5-13) und der Bijektivität der Fouriertransformation auf  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

Zum Schluss wollen wir noch die Energiegleichung für die allgemeine Wellengleichung herleiten. Für ein beliebiges Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  betrachten wir hierzu

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } (0, \infty) \times \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } (0, \infty) \times \partial\Omega, \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{in } \Omega, \\ u_t|_{t=0} = u_1 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (5-15)$$

**5.13 Satz.** Sei  $u \in C^2((0, \infty), L^2(\Omega)) \cap C([0, \infty), H^2(\Omega)) \cap C^1([0, \infty), H_0^1(\Omega))$  Lösung von (5-15) und

$$E(0) := \frac{1}{2} \left( \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) < \infty.$$

Dann gilt

$$E(t) := \frac{1}{2} \|u_t(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 = E(0) \quad (t \geq 0). \quad (5-16)$$

*Beweis.* Multiplizieren der ersten Zeile in (5-15) mit  $u_t$  und anschließendes integrieren über  $x$  liefert

$$\langle u_{tt}(t), u_t(t) \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \Delta u(t), u_t(t) \rangle_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Nun gilt

$$\int_{\Omega} (\partial_t u_t) u_t dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \partial_t (u_t)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Außerdem liefern

$$u_t \Delta u = \operatorname{div}(u_t \nabla u) - \nabla u_t \cdot \nabla u$$

und der Satz von Gauß, dass

$$\langle \Delta u, u_t \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\partial\Omega} u_t \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS(x) - \langle \nabla u_t, \nabla u \rangle_{L^2(\Omega)} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Das Oberflächenintegral verschwindet, da wir  $u(t) \in H_0^1(\Omega)$  vorausgesetzt haben, wobei der zweite Term wie zuvor umgeformt wurde. Oben eingesetzt ergibt dies

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0 \quad (t \geq 0).$$

Integration über  $t$  liefert schließlich die Behauptung. □

**5.14 Bemerkung.** a)  $E(t)$  repräsentiert das Energiefunktional zur Gleichung (5-15). Der erste Term entspricht hierbei der kinetischen und der zweite der potentiellen Energie. Gleichung (5-16) besagt somit, dass die Gesamtenergie des Systems erhalten bleibt.

b) I.A., insbesondere für nichtlineare Gleichungen, erhält man nur  $E(t) \leq E(0)$ , was dann als Energieungleichung bezeichnet wird. Diese kann eine wichtige Rolle bei der Konstruktion von (schwachen) Lösungen sowie bei Stabilitätsuntersuchungen spielen.

## 6. Hilbertraum-Methoden: Dirichlet-Formen

**6.1 Worum geht's?** In diesem Abschnitt werden abstrakte Methoden verwendet, um die Lösbarkeit von Randwertproblemen zu beweisen. Dabei wird das Randwertproblem nicht im klassischen Sinn aufgefasst, sondern schwach formuliert. Die zugrunde liegenden Hilberträume sind Sobolevräume, und eine wesentliche Beweiszutat ist der Satz von Lax-Milgram, welcher sich mit Bilinearformen beschäftigt.

Zunächst wird der Laplace-Operator als einfachstes Beispiel für die Anwendbarkeit von Hilbertraum-Methoden untersucht, danach werden die Ergebnisse auf allgemeine koerzitive Operatoren zweiter Ordnung übertragen.

Die folgenden zwei Zutaten aus der Hilbertraumtheorie werden hier wesentlich eingehen:

Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$  ein Hilbertraum über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

- (1) Satz von Riesz: Sei  $L \in H'$ , d.h.  $L : H \rightarrow \mathbb{K}$  ist linear und stetig, d.h.  $\exists C > 0 \forall x \in H : |Lx| \leq C\|x\|_H$ . Dann existiert ein eindeutig bestimmtes  $x_L \in H$  mit

$$Lx = \langle x_L, x \rangle_H \quad (x \in H).$$

Insbesondere gilt  $\|L\|_{H'} = \|x_L\|_H$ , d.h.  $L \mapsto x_L$  ist eine Isometrie. Dies erlaubt es (bzgl.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ )  $H'$  mit  $H$  zu identifizieren (Bsp:  $(L^2)' = L^2$ ).

- (2) Orthogonales Komplement: Ist  $H_1 \subseteq H$  ein abgeschlossener Unterraum von  $H$ , dann existiert ein abgeschlossener Unterraum  $H_1^\perp \subseteq H$ , so dass

$$H = H_1 \oplus_\perp H_1^\perp,$$

d.h.  $H$  ist die orthogonale Summe von  $H_1$  und  $H_1^\perp$ , d.h.  $\forall x \in H \exists_1 x_1 \in H_1, \exists_1 x_2 \in H_1^\perp : x = x_1 + x_2$  und  $\langle x_1, x_2 \rangle_H = 0$ .

### a) Die Randwertaufgabe zu $-\Delta + 1$

Wir demonstrieren zunächst an einem einfachen Fall, wie Hilbertraummethoden zur Lösung führen. Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet. Die klassische Dirichletsche Randwertaufgabe lautet

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= 0 && \text{in } G, \\ u|_{\partial G} &= f && \text{auf } \partial G. \end{aligned}$$

Die Randbedingung wird in der Sprache der Sobolevräume interpretiert als  $u - f \in H_0^1(G)$ . Gesucht ist ein  $u \in H^1(G)$ , welches bei gegebenem  $f \in H^1 = H^1(G) = W^{1,2}(G)$

(i)  $u - f \in H_0^1(G)$  und

(ii)  $-\Delta u + u = 0$  im distributionellen Sinne erfüllt.

Eine solche Lösung bezeichnet man auch als schwache Lösung des Randwertproblems.

**6.2 Bemerkung.** Sei  $u \in H^1(G)$ . Dann gilt  $-\Delta u + u = 0$  im distributionellen Sinn genau dann, falls

$$\langle u, \varphi \rangle_{H^1(G)} = 0 \quad (\varphi \in H_0^1(G)).$$

Dem die folgenden Bedingungen sind alle äquivalent:

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= 0 && \text{in } \mathcal{D}'(G), \\ \langle u, -\Delta \varphi + \varphi \rangle_{L^2} &= 0 && (\varphi \in \mathcal{D}(G)), \\ \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_{L^2} + \langle u, \varphi \rangle_{L^2} &= 0 && (\varphi \in \mathcal{D}(G)), \\ \langle u, \varphi \rangle_{H^1} &= 0 && (\varphi \in \mathcal{D}(G)), \\ \langle u, \varphi \rangle_{H^1} &= 0 && (\varphi \in H_0^1(G)). \end{aligned}$$

**6.3 Satz.** Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet. Für alle  $f \in H^1(G)$  existiert genau ein  $u \in H^1(G)$  mit

$$\begin{aligned} u - f &\in H_0^1(G) \\ \langle u, \varphi \rangle_{H^1(G)} &= 0 \quad (\varphi \in H_0^1(G)). \end{aligned}$$

*Beweis.* (i) Existenz: Nach dem Projektionssatz gilt  $H^1(G) = H_0^1(G) \oplus (H_0^1(G))^\perp$ . Jedes beliebige  $f \in H^1(G)$  kann also für gewisse  $f_1 \in H_0^1(G)$ ,  $f_2 \in (H_0^1(G))^\perp$  wie folgt geschrieben werden:

$$f = f_1 + f_2$$

Wir setzen  $u := f_2$ . Dann gilt offensichtlich  $u \in H^1(G)$  und  $u - f = -f_1 \in H_0^1(G)$ , sowie

$$\langle u, \varphi \rangle_{H^1} = \langle f_2, \varphi \rangle_{H^1} = 0 \quad (\varphi \in H_0^1(G)).$$

(ii) Eindeutigkeit: Sei  $u_1$  eine weitere solche Lösung, dann betrachten wir  $w := u - u_1$ . Wir erhalten einerseits  $w = (u - f) - (u_1 - f) \in H_0^1(G)$  und andererseits  $w \in (H_0^1(G))^\perp$ , da  $u, u_1 \in (H_0^1(G))^\perp$ . Damit folgt schon  $w = 0$ , also die eindeutige Lösbarkeit.  $\square$

Wir wenden uns nun der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f, \\ u|_{\partial G} &= 0. \end{aligned}$$

zu. Schwach formuliert bedeutet das, dass wir nach einem  $u \in H_0^1(G)$  mit  $-\Delta u + u = f$  im distributionellen Sinn suchen. Die folgenden Bedingungen sind wieder äquivalent:

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f \quad \text{in } \mathcal{D}'(G), \\ \langle u, (-\Delta + 1)\varphi \rangle_{L^2} &= \langle f, \varphi \rangle_{L^2} \quad (\varphi \in \mathcal{D}(G)), \\ \langle u, \varphi \rangle_{H^1(G)} &= \langle f, \varphi \rangle_{L^2} \quad (\varphi \in H_0^1(G)). \end{aligned}$$

**6.4 Satz.** Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet. Dann existiert zu jedem  $f \in L^2(G)$  genau ein  $u \in H_0^1(G)$  mit

$$\langle u, \varphi \rangle_{H^1(G)} = \langle f, \varphi \rangle_{L^2} \quad (\varphi \in H_0^1(G)).$$

*Beweis.* Wir definieren

$$\begin{aligned} F : H_0^1(G) &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ \varphi &\longmapsto F\varphi := \langle f, \varphi \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

Wegen

$$|F\varphi| \leq \|f\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|\varphi\|_{H^1(G)}$$

handelt es sich bei  $F$  um ein stetiges lineares Funktional. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz existiert genau ein  $u \in H_0^1(G)$  mit

$$\langle u, \varphi \rangle_{H^1(G)} = F\varphi = \langle f, \varphi \rangle_{L^2} \quad (\varphi \in H_0^1(G)).$$

Dies zeigt die Existenz und Eindeutigkeit. □

## b) Allgemeinere Differentialoperatoren

In diesem Abschnitt wollen wir den Laplace-Operator von Teil a) durch einen allgemeineren Operator ersetzen. Dazu benötigen wir ein weiteres Hilfsmittel aus der Hilbertraumtheorie. Im folgenden sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

**6.5 Definition.** Sei  $\mathcal{H}$  ein  $\mathbb{K}$ -Hilbertraum.

a) Eine Abbildung  $B: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$  heißt eine Bilinearform (genauer Sesquilinearform) auf  $\mathcal{H}$ , falls  $B$  linear im ersten Argument und konjugiert linear im zweiten Argument ist.

b) Eine Bilinearform  $B: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$  heißt stetig, falls eine Konstante  $c > 0$  existiert mit

$$|B(u, v)| \leq c \|u\| \cdot \|v\| \quad (u, v \in \mathcal{H}).$$

c) Eine stetige Bilinearform  $B$  auf  $\mathcal{H}$  heißt koerzitiv, falls eine Konstante  $p > 0$  existiert mit

$$\operatorname{Re} B(u, u) \geq p \|u\|^2 \quad (u \in \mathcal{H}).$$

**6.6 Satz (Satz von Lax–Milgram).** Es sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum und  $B(\cdot, \cdot)$  eine stetige Bilinearform auf  $\mathcal{H}$ . Weiter existiere ein  $p > 0$  mit

$$|B(u, u)| \geq p \|u\|^2 \quad (u \in \mathcal{H}). \quad (6-1)$$

Dann existiert für alle  $F \in \mathcal{H}'$  genau ein  $u \in \mathcal{H}$ , so dass

$$Fv = B(v, u) \quad (v \in \mathcal{H})$$

gilt.

*Beweis.* Es sei  $u \in \mathcal{H}$  beliebig aber fest gewählt. Da  $B$  stetig ist, ist  $x \mapsto B(x, u)$  ein Element von  $\mathcal{H}'$ . Das bedeutet, dass es nach dem Satz von Riesz genau ein  $f_u \in \mathcal{H}$  existiert, so dass  $B(x, u) = \langle x, f_u \rangle$  für alle  $x \in \mathcal{H}$  gilt. Dies bestimmt eine lineare Abbildung  $S: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , mit  $u \mapsto Su := f_u$ . Es folgt

$$\|Su\|^2 = \langle Su, Su \rangle = B(Su, u) \leq c \|Su\| \|u\|$$

und das impliziert die Stetigkeit von  $S$ . Ferner gilt

$$p \|u\|^2 \leq |B(u, u)| = |\langle u, Su \rangle| \leq \|u\| \|Su\|$$

was einerseits die Injektivität und andererseits die Stetigkeit von  $S^{-1}: R(S) \rightarrow \mathcal{H}$  impliziert.

Weiter ist  $R(S) =: M$  abgeschlossen. Ist nämlich  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $R(S)$  mit  $y_n \rightarrow y \in \mathcal{H}$ , so erkennen wir zunächst, dass zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in \mathcal{H}$  existiert mit  $y_n = Sx_n$ . Wegen der Stetigkeit von  $S^{-1}$  ist nun auch  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$  eine konvergente Folge. Es existiert also ein  $x \in \mathcal{H}$  mit  $x_n \rightarrow x$ . Wegen der Stetigkeit von  $S$  folgt nun wieder, dass  $Sx_n \rightarrow Sx$  gilt. Damit ist aber  $Sx = y$ .

Wegen der Abgeschlossenheit von  $M$  folgt aus dem Projektionssatz  $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$ . Ist nun  $w \in M^\perp$ , so schließen wir

$$0 = |\langle w, Sw \rangle| = |B(w, w)| \geq p\|w\|^2$$

und damit  $w = 0$ . Also ist  $R(S) = \mathcal{H}$ .

Sei nun  $F \in \mathcal{H}'$  beliebig gewählt. Nach Riesz existiert ein  $f \in \mathcal{H}$  mit  $Fv = \langle v, f \rangle$  für alle  $v \in \mathcal{H}$ . Sei  $u := S^{-1}f$ . Dann folgt  $B(v, u) = \langle v, Su \rangle = \langle v, f \rangle = Fv$ .

Sei nun noch  $B(v, u_1) = B(v, u_2)$  für alle  $v \in \mathcal{H}$ . Dann folgt zunächst  $B(v, u_1 - u_2) = 0$  und weiter  $B(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$  was wegen (6-1) schon  $u_1 - u_2 = 0$  impliziert.  $\square$

**6.7 Definition.** Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet. Gegeben sei ein Differentialoperator der Form

$$A := - \sum_{i,k=1}^n \partial_i a_{ik}(x) \partial_k + \lambda.$$

Dabei sei  $\lambda > 0$ ,  $a_{ik} \in L^\infty(G; \mathbb{R})$  und  $(a_{i,k})_{i,k=1}^n$  positiv definit, d.h.  $a_{ik} = a_{ki}$ , und es existiert ein  $p > 0$  mit

$$\sum_{i,k=1}^n \xi_i a_{ik}(x) \xi_k \geq p|\xi|^2 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n, x \in G). \quad (6-2)$$

Dann ist die zu  $A$  gehörige Dirichlet-Form  $B: H_0^1(G) \times H_0^1(G) \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch

$$B(v, u) := \sum_{i,k=1}^n \langle a_{ik} \partial_k u, \partial_i v \rangle_{L^2} + \lambda \langle u, v \rangle \quad (u, v \in H_0^1(G)).$$

**6.8 Lemma.** a) Die zu  $A$  gehörige Dirichlet-Form  $B$  ist eine stetige Sesquilinearform auf  $H_0^1(G)$ .

b) Die Dirichlet-Form  $B$  ist koerzitiv auf  $H_0^1(G)$ .

*Beweis.* a) Die Sesquilinearität von  $B$  ist klar. Die Stetigkeit folgt aus

$$\begin{aligned} |B(u, v)| &\leq |\langle a_{ik} \partial_k u, \partial_i v \rangle_{L^2}| + \lambda |\langle u, v \rangle_{L^2}| \\ &\leq C \left( \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \lambda \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \right) \\ &\leq C \|u\|_{H^1(G)} \|v\|_{H^1(G)} \end{aligned}$$

mit  $C := \max\{\|a_{ik}\|_\infty, \lambda\}$ .



b) Wir schreiben  $u \in H_0^1(G)$  in der Form  $u = u_1 + iu_2$  mit reellwertigen  $u_1, u_2$ . Damit folgt

$$\operatorname{Re}(B(u, u)) = \langle \partial_i u_1, a_{ij} \partial_j u_1 \rangle_{L^2} + \langle \partial_i u_2, a_{ij} \partial_j u_2 \rangle_{L^2}.$$

Unter Verwendung von (6-2) schliesen wir

$$\operatorname{Re} B(u, u) \geq p \|\nabla u\|_{L^2}^2.$$

□

Wir wollen eine schwache Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe

$$\begin{cases} Au = f & \text{in } G, \\ u|_{\partial G} = 0, \end{cases} \quad (6-3)$$

finden. Die Randbedingung bedeutet wieder  $u \in H_0^1(G)$ , und  $Au = f$  im Distributionssinn ist äquivalent zu

$$B(u, v) = \langle f, v \rangle_{L^2(G)} \quad (v \in H_0^1(G)).$$

**6.9 Satz.** Die Dirichlet-Form  $B$  zu  $A$  sei streng koerzitiv. Dann existiert zu jedem  $f \in L^2(G)$  genau ein  $u \in H_0^1(G)$  mit

$$B(u, v) = \langle f, v \rangle_{L^2(G)} \quad (v \in H_0^1(G)),$$

d.h.  $u$  ist die eindeutige schwache Lösung von (6-3)

*Beweis.* Es gilt  $v \mapsto \langle f, v \rangle \in (H_0^1(G))'$ , denn  $|\langle f, v \rangle| \leq \|f\|_{L^2(G)} \|v\|_{H^1}$ . Damit folgt die Behauptung aus dem Satz von Lax-Milgram und Lemma 6.8. □

## Literatur

- [1] Adams, R. A., Fournier, J.: Sobolev spaces. 2nd edition, Academic Press, Amsterdam etc., 2003.
- [2] Evans, L. C.: Partial Differential Equations. American Mathematical Society, Providence, R. I., 2002.
- [3] Hörmander, L.: The analysis of linear partial differential operators, Band I-IV. Springer-Verlag Berlin 1976.
- [4] John, F: Partial differential equations. Springer-Verlag New York 1991.
- [5] Jost, J.: Partielle Differentialgleichungen. Berlin 1998.

- [6] Lions, J.-L.: Non-homogeneous boundary value problems and applications (3 Bände). Springer-Verlag Berlin 1972.
- [7] Racke, R.: Lectures on nonlinear evolution equations. Initial value problems. Vieweg-Verlag Braunschweig 1992.
- [8] Strauss, W. A.: Partielle Differentialgleichungen. Vieweg-Verlag Braunschweig 1995.
- [9] Wloka, J.: Partielle Differentialgleichungen. Teubner-Verlag Stuttgart 1982.