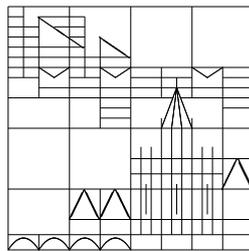


Skript zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen I

Wintersemester 2006/07

Robert Denk



Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik und Statistik

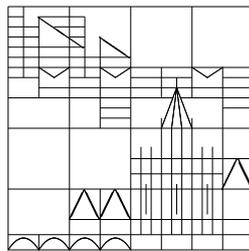
Stand: 15. 2. 2007

Skript zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen I

Wintersemester 2006/07

Robert Denk



Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Stand: 15. 2. 2007

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	1
1 Ein erster Überblick	3
a) Grundbegriffe und Beispiele	3
b) Lösungsansätze	7
2 Elementare Lösungsmethoden	13
a) Gleichungen erster Ordnung	13
b) Der Satz von Cauchy–Kovalevskaya	17
c) Typeinteilung bei linearen Gleichungen zweiter Ordnung	22
3 Distributionen	26
4 Elliptische Theorie I: Potentialtheorie für die Laplace-Gleichung	31
a) Grundlösungen	31
b) Darstellungsformeln	34
c) Die Greensche Funktion für das Dirichlet-Problem	38
5 Parabolische Theorie I: Fourier-Methoden	45
a) Grundlegendes zur Fourier-Transformation	45
b) Die Wärmeleitungsgleichung	48
c) Die Gleichung von Black und Scholes	51
d) Maximumprinzip	56
6 Sobolevräume	58
a) Sobolevräume mit natürlicher Differenzierbarkeitsordnung	58
b) Sobolevräume mit reeller Differenzierbarkeitsordnung	61
c) Wichtige Sätze aus der Theorie der Sobolevräume	64
7 Hyperbolische Theorie I: Wellengleichungen	67
a) Energieabschätzungen	67
b) Sobolevraumtheorie: Ein globaler Existenzsatz	75
8 Hilbertraum-Methoden: Dirichlet-Formen	80
a) Die Randwertaufgabe zu $-\Delta + 1$	80

b) Allgemeinere Differentialoperatoren	82
9 Parabolische Theorie II: Anwendung des Spektralsatzes	88
10 Hyperbolische Theorie II: Anwendung des Spektralsatzes	93
11 Elliptische Theorie II: Nichtglatte Gebiete	100
a) Harnacksche Sätze	100
b) Die Perronsche Methode	103
c) Dirichletsche Gebiete	108
d) Regularität der Lösung	115
A Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis	117
a) Hilbertraumtheorie	117
b) Unbeschränkte Operatoren und der Spektralsatz	118
Literatur	121

Vorwort

Das vorliegende Skript gibt den Inhalt der vierstündigen Vorlesung Partielle Differentialgleichungen I vom Wintersemester 2006/07 an der Universität Konstanz wieder. Es handelt sich dabei um eine fast wörtliche Darstellung des präsentierten Stoffes.

Die Vorlesung richtete sich an Studierende Hauptstudiums, insbesondere des fünften Semesters, in den Diplomstudiengängen Mathematik, Mathematische Finanzökonomie und Physik. Es handelt sich dabei um die erste Vorlesung eines mehrsemestrigen Zyklus über partielle Differentialgleichungen.

Das Ziel dieser Vorlesung war es insbesondere, einen Überblick über Methoden zur Analyse partieller Differentialgleichungen zu geben, zugleich aber auch wichtige Klassen von Gleichungen und ihre Vertreter kennen zu lernen. So finden sich hier Abschnitte über die elliptische, parabolische und hyperbolische Gleichungen, zum größten Teil nur am Beispiel der Laplace-Gleichung, Wärmeleitungsgleichung bzw. Wellengleichung. Als Anwendung in Finanzmathematik wurde ein Abschnitt über die Black-Scholes-Gleichung eingefügt.

Für das Studium partieller Differentialgleichungen sind eine Reihe von Theorien und Begriffen nützlich, welche ebenfalls zum Teil in der Vorlesung behandelt oder zumindest zitiert wurden. Zu nennen wären hier etwa Distributionen und Sobolevräume, Hilbertraummethode (unter anderem der Satz von Lax-Milgram) und die Anwendung des Spektralsatzes. Speziell die Distributionstheorie wird ein Stück weit in dieser Vorlesung behandelt, weil ihre Kenntnis bei den Studierenden nicht vorausgesetzt werden konnte. Der Spektralsatz, welcher üblicherweise in der Funktionalanalysis diskutiert wird, wird in einem kurzen Anhang nur zitiert.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Jürgen Saal herzlich für die ausgezeichnete Betreuung und Organisation des Übungsbetriebs bedanken. Ich hoffe, dass das vorliegende Skript den Studierenden bei der Nachbereitung des Stoffes hilft, und bitte alle Leser, die sicher zahlreichen Fehler im Skript zu entdecken und mir mitzuteilen.

Konstanz, den 15. 2. 2007

Robert Denk

1. Ein erster Überblick

1.1 Worum geht's? In diesem einleitenden Abschnitt sollen wichtige Beispiele partieller Differentialgleichungen vorgestellt werden und mögliche Ansätze zu ihrer Lösung diskutiert werden. Auch wenn nicht alle Ansätze im Laufe dieser Vorlesung vollständig diskutiert werden können, sollte man hier einen ersten Überblick erhalten. Auch sollte hier klar werden, wie komplex (und damit interessant) partielle Differentialgleichungen sind.

a) Grundbegriffe und Beispiele

Ziel ist es, eine Einführung in die Theorie partieller Differentialgleichungen zu geben und sich dabei von Beispielen aus der mathematischen Physik leiten zu lassen, was auch aus historischer Sicht nicht ungerechtfertigt ist. Bekannt sind gewöhnliche Differentialgleichungen, etwa zum freien Fall: Gesucht wird eine Funktion $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, welche

$$y''(t) = -g, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1$$

erfüllt, dabei sind y_0 und y_1 sowie g vorgegebene reelle Werte.

Nun sind aber die meisten Phänomene von mehr als nur einer Variablen abhängig, das heißt es treten partielle Ableitungen bzw. partielle Differentialgleichungen auf.

Zunächst soll der Begriff der partiellen Differentialgleichung formal geklärt werden. Im folgenden sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig gegeben und G eine offene, nichtleere Teilmenge des \mathbb{R}^n .

1.2 Definition. Für $m, l \in \mathbb{N}$ sei

$$F : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}^l$$

eine Abbildung, an welche zunächst keine weiteren „Anforderungen“ gestellt werden. Sei nun $k \in \mathbb{N}_0$. Für $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ heißt

$$F(x, (\partial^\alpha u(x))_{0 \leq |\alpha| \leq k}) = 0 \tag{1-1}$$

- (i) *partielle Differentialgleichung (PDGL) der Ordnung k* für eine Funktion $u : G \rightarrow \mathbb{R}^m$, sofern $l = 1$ gilt.
- (ii) *System von l partiellen Differentialgleichungen der Ordnung k* für eine Funktion $u : G \rightarrow \mathbb{R}^m$, sofern $l > 1$ gilt.

Dabei und im folgenden verwenden wir die Multiindex-Schreibweise: Es ist

$$\partial^\alpha u(x) := \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} u(x) \quad (\alpha \in \mathbb{N}_0^n).$$

Andere verwendete Schreibweisen sind

$$u_t := \partial_t u := \frac{\partial}{\partial t} u, \quad \partial_i u := u_{x_i} := \frac{\partial}{\partial x_i} u.$$

Ist $n = 1$, so handelt es sich bei (1-1) offenbar um ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen, mit welchen wir uns hier aber nicht weiter befassen werden.

Man sucht somit eine hinreichend differenzierbare Funktion u , so dass (1-1) für alle $x \in G$ gilt. (z.B. $u \in C^k(G, \mathbb{R}^m)$). Eine solche Funktion u heißt dann (klassische) *Lösung* oder *Integral* von (1-1). Da die Existenz einer klassischen Lösung in vielen Fällen nicht gesichert ist, gibt es viele weitere Lösungsbegriffe wie etwa schwache Lösungen. Diese werden später besprochen. Zur Gleichung (1-1) kommen in der Regel vorgegebene Werte - Anfangswerte und oder Randwerte - auf Untermannigfaltigkeiten in G hinzu, welche zumindest die Eindeutigkeit der Lösung sichern sollen.

1.3 Beispiel. Das folgende Beispiel zeigt, dass der Lösungsbegriff bei partiellen Differentialgleichungen sehr präzise definiert werden muss. Sei etwa $G = (0, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$ und $\varphi(x, y) := x^2$ ($(x, y) \in \partial G$). Betrachte das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= 0 \quad ((x, y) \in G), \\ u(x, y) &= \varphi(x, y) \quad ((x, y) \in \partial G). \end{aligned}$$

Dieses Randwertproblem besitzt keine Lösung $u \in C^2(\overline{G})$. Denn falls es eine derartige Lösung gäbe, so wäre $u_{xx}(x, 0) = \varphi_{xx}(x, 0) = 2$ für alle $x \in [0, 1]$ und damit insbesondere $u_{xx}(0, 0) = 2$. Genauso gilt $u_{yy}(0, 0) = \varphi_{yy}(0, 0) = 0$, und man erhält $\Delta u(0, 0) = u_{xx}(0, 0) + u_{yy}(0, 0) = 2$ im Widerspruch zu $\Delta u = 0$.

Die folgende Definition und viele weitere Aussagen werden nur für skalare PDGL (d.h. für $m = 1$) formuliert; die Übertragung auf Systeme von PDGL ist aber ohne wesentliche Änderung möglich. Ebenso kann man komplexwertige Koeffizienten und Lösungen betrachten.

1.4 Definition. a) Die PDGL (1-1) heißt linear, falls sie die Gestalt

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x) = f(x)$$

hat, wobei $f, a_\alpha: G \rightarrow \mathbb{R}$ gegebene Funktionen sind. Im Fall $f = 0$ heißt obige Gleichung homogen.

b) Die PDGL (1-1) heißt semilinear, falls sie die Form

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x) + a_0(x, (\partial^\alpha u(x))_{0 \leq |\alpha| \leq k-1}) = 0$$

besitzt.

c) Die PDGL (1-1) heißt quasilinear, falls sie die Form

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, (\partial^\alpha u(x))_{0 \leq |\alpha| \leq k-1}) \partial^\alpha u(x) + a_0(x, (\partial^\alpha u(x))_{0 \leq |\alpha| \leq k-1}) = 0$$

besitzt.

d) Falls die PDGL (1-1) nichtlinear in den höchsten Ableitungen ist (d.h. falls keiner der Fälle a)-c) zutrifft), heißt die Gleichung stark nichtlinear oder voll nichtlinear.

1.5 Beispiele. a) **(Potentialgleichung)** Für eine Funktion $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Potentialgleichung oder Laplace-Gleichung gegeben durch

$$\Delta u(x) \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x) = 0.$$

Hier ist u etwa ein Potential, eine (stationäre) Temperatur, eine Konzentration oder ein Druck. Es handelt sich um eine sog. elliptische Dgl.

b) **(Wellengleichung)** Für eine Funktion $u : \mathbb{R} \times G \rightarrow \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ ist die Wellengleichung gegeben durch

$$u_{tt}(t, x) - \Delta u(t, x) = 0 \quad (\text{linear}),$$

$$u_{tt} - \operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = 0 \quad (\text{nichtlinear}).$$

Hier beschreibt t die Zeit, x den Ort und $u = u(t, x)$ etwa die Auslenkung eines Stabes ($n = 1$), einer Membran ($n = 2$) oder die Ausbreitung von Schall oder elektromagnetischen Wellen ($n = 3$). Auf physikalische Konstanten wird soweit möglich verzichtet. Die Wellengleichung ist der Prototyp einer hyperbolischen Gleichung.

c) **(Wärmeleitungsgleichung)** Für eine Funktion $u : \mathbb{R} \times G \rightarrow \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ ist die Wärmeleitungsgleichung gegeben durch

$$u_t(t, x) - \Delta u(t, x) = 0.$$

In Anwendungen beschreibt $u = u(t, x)$ die Temperatur bzw. die Konzentration von Substanzen. Diese Gleichung ist der Mustervertreter einer parabolischen Gleichung.

d) **(Schrödingergleichung)** Die Differentialgleichung

$$u_t - i \left(\Delta u + \frac{1}{|x|} u \right) = 0$$

heißt Schrödingergleichung und findet Anwendung etwa in der Quantenmechanik. Das Potential $\frac{1}{|x|}$ kann je nach Modell auch entfallen oder durch eine anderes Potential ersetzt werden. Mit physikalischen Konstanten lautet die Schrödinger-Gleichung ohne Potential

$$i\hbar \partial_t u + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta u = 0,$$

wobei \hbar das Plancksche Wirkungsquantum und m die Masse ist.

e) **(Maxwell-Gleichungen)** Hierbei handelt es sich um ein System von PDGL für Funktionen $E, H : \mathbb{R} \times G \rightarrow \mathbb{R}^3$, welches in einfachster Form gegeben ist durch

$$E_t - \operatorname{rot} H = 0, \quad H_t + \operatorname{rot} E = 0.$$

Dabei ist E die elektrische Feldstärke und H die magnetische Feldstärke.

f) **Navier-Stokes-Gleichungen** Auch hierbei handelt es sich um ein System für Funktionen $u : (0, \infty) \times G \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $p : (0, \infty) \times G \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$u_t + (u \cdot \nabla)u - \Delta u = -\nabla p, \quad \operatorname{div} u = 0. \quad (1-2)$$

Dies ist eine nichtlineare Gleichung, ihre Linearisierung (d.h. ohne $(u \cdot \nabla)u$) heißt Stokes-Gleichung.

Die Lösbarkeit der Navier-Stokes-Gleichung ist auch Gegenstand eines der sieben Millenium-Probleme, deren Lösung mit 1 Million \$ dotiert ist. Genauer geht es um folgende Fragestellung: Setzt man z.B. $G = \mathbb{R}^3$ und fügt man dem System (1-2) noch die Anfangsbedingung

$$u|_{t=0} = u_0 \quad (1-3)$$

hinzu, so ist bekannt, dass für genügend reguläre Anfangswerte für das System (1-2)-(1-3) global schwache Lösungen (z.B. für $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$) bzw. zeitlich lokal klassische Lösungen (z.B. für $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$) existieren. Allerdings ist i.A. die Frage nach der Eindeutigkeit von schwachen Lösungen bzw. nach der Existenz von global klassischen Lösungen seit über 70 Jahren unbeantwortet. Die Aufgabe des Millenium-Problems liegt im Nachweis der Existenz global klassischer Lösungen bzw. in der Angabe eines Gegenbeispiels.

Damit sind nur wenige in möglichst einfacher Darstellung auftretende Beispiele gewählt. Viele weitere Beispiele kommen aus der Geometrie, der Chemie sowie der Biologie. An den Beispielen kann man aber bereits erkennen, dass die Theorie der Partiellen Differentialgleichungen sehr viele Aspekte haben muss, um alle diese verschiedenen Phänomene beschreiben zu können. Typische Fragen, die gestellt werden sind dann von der Art:

- (i) Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen
 - (a) Gibt es Lösungen und wenn ja, in welchem Sinn („klassisch“ oder „schwach“)?
 - (b) Gibt es lokale oder gar globale Lösungen?
 - (c) Welche Kriterien müssen erfüllt sein?
- (ii) Wie können Lösungen dargestellt werden?

- (iii) Wie können Lösungen explizit berechnet werden?
- (iv) Wie ist das „qualitative“ Verhalten von Lösungen?

b) Lösungsansätze

Um PDGL zu lösen, gibt es keine Standardmethode, ebenso wenig wie es eine einheitliche Theorie von PDGL gibt (noch weniger als bei den gewöhnlichen Dgl.). Selbst bei linearen PDGL ist es im allgemeinen nicht möglich, eine Lösung direkt zu berechnen. In obigen Beispielen haben wir die einfachsten Beispiele parabolischer, elliptischer und hyperbolischer Gleichungen kennen gelernt. Das Lösungsverhalten, auch schon die Frage der Existenz und Eindeutigkeit, dieser drei Grundtypen von PDGL ist recht unterschiedlich. Aber es gibt auch viele Gleichungen, welche in keine der Klassen fallen und eine einzelne Betrachtung erfordern. Noch schwerer ist es, Aussagen über nichtlineare Gleichungen zu treffen, die Theorie nichtlinearer PDGL ist eines der größten Forschungsgebiete innerhalb der Mathematik.

Die genannten Typen von PDGL werden für lineare Gleichungen zweiter Ordnung in Abschnitt 2.2 definiert, allgemeinere Definitionen etwa parabolischer Gleichungen folgen später.

Nun sollen einige Lösungsansätze kurz vorgestellt und diskutiert werden. Dabei sind die Aussagen nicht mathematisch präzise formuliert und zum Teil auch recht subjektiv. Einige Ansätze werden wir im Verlauf dieser Vorlesung und ihren Fortsetzungen kennen lernen.

(i) Gleichungen erster Ordnung. Bei einfachen Beispielen von linearen PDGL erster Ordnung (etwa für Funktionen $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$) kann man Parametrisierungen betrachten, wodurch die Gleichungen im wesentlichen auf gewöhnliche Dgl. zurückgeführt werden. Dies ist die Methode der Charakteristiken, welche in Abschnitt 2 a) besprochen wird. Obwohl die Methode auch auf nichtlineare Gleichungen ausgeweitet werden kann, ist die Anwendbarkeit relativ eingeschränkt.

(ii) Potenzreihenansatz bei analytischen Koeffizienten. Wie bei gewöhnlichen Dgl. auch, kann man einen Lösungsansatz durch Potenzreihenentwicklung versuchen. Dabei handelt es sich jetzt um eine Potenzreihe in mehreren Variablen, Voraussetzung ist, dass die Koeffizienten reell analytisch sind. Der zugehörige Satz von Cauchy und Kovalevskaya wird in Abschnitt 2 b) besprochen.

(iii) Potentialtheorie. Bei diesem Ansatz wird auf klassische Differenzierbarkeit (zunächst) verzichtet, man betrachtet Lösungen in der Menge der Distributionen. Als Beispiel sei die Potentialgleichung

$$\Delta u = f$$

in \mathbb{R}^3 genannt. Man sucht eine Grundlösung, d.h. eine distributionelle Lösung der Gleichung $\Delta g = \delta$, wobei δ die Dirac-Distribution ist. Verwendet man wichtige Eigenschaften der Faltung, nämlich

$$\Delta(f * g) = f * (\Delta g)$$

und

$$u * \delta = u,$$

so erhält man für $u := f * g$ die Gleichung

$$\Delta u = \Delta(f * g) = f * (\Delta g) = f * \delta = f.$$

Also ist u eine „Lösung“ der Potentialgleichung.

Es ist klar, dass man bei diesem Ansatz zunächst einige Begriffe klären muss, etwa den Begriff der Distribution. Eng verwandt mit diesem Ansatz ist der Begriff der Greenschen Funktion, der auch schon aus den gewöhnlichen Dgl. bekannt sein sollte. Auch dort wurde die Lösung als Integral geschrieben wie bei der Faltung.

Der Potentialansatz ist wesentlich allgemeiner als man im ersten Moment meinen möchte. Ein Nachteil dieses Ansatzes ist, dass man zunächst nicht auf klassische Lösungen kommt (die Differenzierbarkeit der Lösung muss separat untersucht werden), was allerdings bei fast allen wichtigen Lösungsansätzen der Fall ist. Ein weiterer Nachteil besteht darin, dass man die Grundlösung bzw. die Greensche Funktion finden muss, was sehr von der Gleichung abhängt. Es ist relativ schwer, allgemeine Aussagen über Klassen von PDGL mit dieser Methode zu beweisen. Wenn man allerdings die Greensche Funktion kennt, kann man recht präzise Aussagen über die Lösung treffen. Dies liegt auch daran, dass die Lösung als Faltung, d.h. als Integral geschrieben wird und Integraloperatoren relativ gut zugänglich sind. Die Potentialmethode kann daher auch gut für nichtglatte Gebiete (d.h. im Fall eines nichtglaten Randes ∂G) verwendet werden. Im konkreten Fall sind oft recht technische Abschätzungen zu beweisen (aber auch das ist bei fast allen Methoden der Fall).

Da die Grundlösungen im allgemeinen Singularitäten aufweisen, ist dieser Ansatz eng verbunden mit der Theorie singularer Integraloperatoren, einem großen Gebiet innerhalb der Operatortheorie. Wir werden die Potentialmethode exemplarisch in diesem Semester kennen lernen.

(iv) Schwache Lösungen. Eine Möglichkeit, auch die Lösbarkeit partieller Differentialgleichungen zu beweisen, verwendet den Begriff der schwachen Lösung. Dabei wird auf die klassische Differenzierbarkeit verzichtet und die Lösung in einem geeigneten Sobolevraum gesucht. Statt den Differentialoperator selbst zu betrachten, studiert man die zugehörige Bilinearform, die Dirichlet-Form. Dies hat den Vorteil, dass weniger Glattheitsbedingungen an die Lösung gestellt werden müssen. Bei einem Operator zweiter Ordnung ist die schwache Lösung nur im Sobolevraum erster

Ordnung. Die Lösbarkeit folgt nun aus Sätzen über Bilinearformen in Hilberträumen, wie etwa den Satz von Riesz oder den Satz von Lax-Milgram.

(v) Energieabschätzungen. Wir betrachten man das sog. Anfangsrandwertproblem für die Wellengleichung in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$, gegeben durch

$$\begin{aligned} u_{tt}(t, x) - \Delta u(t, x) &= 0 \quad ((t, x) \in [0, \infty) \times G, \\ u(t, x) &= 0 \quad ((t, x) \in [0, \infty) \times \partial G), \\ u(0, x) &= u_0(x) \quad (x \in G), \\ u_t(0, x) &= u_1(x) \quad (x \in G). \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass für jede Lösung die Energie

$$E(t) := \|u_t(t, \cdot)\|_{L^2(G)}^2 + \|\nabla u(t, \cdot)\|_{L^2(G)}^2$$

unabhängig von t , also konstant ist. Dieser Ansatz der Energieabschätzungen kann (für allgemeinere Gleichungen) insbesondere dazu verwendet werden, um Aussagen über die Lebensdauer einer Lösung und die Stabilität zu gewinnen. Eng mit diesem Ansatz verbunden ist der Ansatz der Lyapunov-Funktion, der auch schon für gewöhnliche Dgl. diskutiert wurde. Diese Methode ist auch gut geeignet für nichtlineare Gleichungen (insbesondere für hyperbolische Gleichungen). Der Nachteil bzw. der Aufwand hierbei ist es, einen geeigneten Energiebegriff zu finden und die Abschätzung der Energie zu beweisen, was wiederum oft an der speziellen Gleichung liegt.

(vi) Ansatz durch Fourierreihen. Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t + Au = 0$$

mit $A := -\Delta$. Der Reihenansatz betrachtet zunächst Lösungen, bei welchen die Variablen x und t separiert sind, d.h. Lösungen der Form

$$u(t, x) = \psi(t)\varphi(x).$$

Wenn nun φ eine Eigenfunktion von A ist, d.h. wenn ein Eigenwert λ existiert mit

$$A\varphi = \lambda\varphi,$$

so ist $u(t, x) = e^{-\lambda t}\varphi(x)$ eine Lösung der Gleichung. Im allgemeinen wird diese Lösung noch nicht die richtigen Anfangs- und Randbedingungen (die oben weggelassen wurden) erfüllen. Daher wird man alle Eigenwerte λ_n von A suchen und einen Reihenansatz der Form

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\varphi_n(x)$$

wählen. Hierbei seien φ_n Eigenfunktionen zu λ_n .

Dieser hier nur sehr grob beschriebene Ansatz kann auch bei wesentlich allgemeineren Differentialoperatoren A funktionieren. Wichtige Fragen in diesem Zusammenhang sind:

- Wie ist der zu einer PDGL gehörige Differentialoperator A definiert?
- Besitzt A Eigenfunktionen, oder etwas allgemeiner: wie sieht das Spektrum von A aus?
- Ist jede Lösung durch obigen Reihenansatz darstellbar? Das ist die Frage nach der Vollständigkeit der Eigenfunktionen.
- Wie gut ist die Konvergenz in obiger Reihe? Für gute Konvergenz (etwa gleichmäßige Konvergenz) muss man oft aufwändige Abschätzungen beweisen.

Der Reihenansatz benutzt Operatortheorie, wie bereits an obigen Begriffen wie Spektrum klar wird. Er funktioniert im wesentlichen nur bei PDGL, welche in einem beschränkten Gebiet G (mit entsprechenden Randbedingungen) gegeben sind. In konkreten Fällen kann es schwer oder unmöglich sein, die Eigenfunktionen zu finden. Wenn eine explizite Angabe der Eigenfunktionen möglich ist (etwa in Rechteckgebieten oder Sektoren), kann man die Lösbarkeit und die Lösungen oft recht gut analysieren. Auch falls die Eigenfunktionen nicht explizit angegeben werden können, kann man mit diesem Ansatz eine ganze Reihe abstrakter Aussagen treffen. Damit eignet sich der Fourierreihen-Ansatz für viele Gleichungen.

(vii) Ansatz durch Fourier-Transformation. Als Beispiel betrachten wir eine Variante der Potentialgleichung

$$-\Delta u + u = f.$$

Zur Lösung verwendet man die Fourier-Transformation im \mathbb{R}^n , welche definiert ist durch

$$(\mathcal{F}u)(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Die Theorie der Fourier-Transformation besagt insbesondere, dass

$$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

ein isometrischer Isomorphismus ist (Satz von Plancherel). Außerdem kann die Fourier-Transformierte der Ableitung berechnet werden durch

$$[\mathcal{F}(\partial^\alpha u)](\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha (\mathcal{F}u)(\xi).$$

Eingesetzt erhält man in unserem Beispiel

$$\mathcal{F}(-\Delta u + u)(\xi) = (|\xi|^2 + 1)(\mathcal{F}u)(\xi),$$

und eine Lösung obiger Gleichung ist gegeben durch

$$u := \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{(\mathcal{F}f)(\xi)}{|\xi|^2 + 1} \right].$$

Tatsächlich funktioniert dieser Ansatz bei vielen PDGL sehr gut. Durch den Satz von Plancherel ist $L^2(\mathbb{R}^n)$ ein kanonischer Grundraum für diesen Ansatz, und die daraus abgeleiteten Sobolevräume bilden einen zentralen Begriff in der Theorie PDGL.

Da die Fourier-Transformation nur im ganzen Raum \mathbb{R}^n definiert ist, muss man für Randwertprobleme diesen Ansatz modifizieren. Auch wenn die Koeffizienten der PDGL von x abhängen, wird der Ansatz komplizierter. Sei etwa

$$Au(x) := \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x)$$

ein partieller Differentialoperator mit ortsabhängigen Koeffizienten. Dann definiert man das Symbol von A durch

$$a(x, \xi) := \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) (i\xi)^\alpha.$$

Das Symbol obiger Gleichung ist somit $|\xi|^2 + 1$. In Anlehnung an die Formel der inversen Fourier-Transformation

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

definiert man zu obiger Gleichung den Lösungsansatz

$$u(x) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\mathcal{F}f)(\xi)}{a(x, \xi)} e^{ix\xi} d\xi.$$

Dies ist ein Beispiel eines sog. Pseudodifferentialoperators. Die Theorie derartiger Operatoren ist sehr kompliziert, aber auch sehr nützlich für PDGL.

Der Ansatz durch Fourier-Transformation und seine Varianten (etwa über Laplace-Transformation) ist einer der allgemeinsten Ansätze etwa für parabolische Gleichungen. Der zugrunde gelegte Lösungsbegriff ist die distributionelle Lösung, wobei die Distributionen Elemente gewisser Sobolevräume sind. Man kann damit Aussagen über Lösungen treffen, ohne die Lösung selbst berechnen zu müssen. Es besteht eine enge Verbindung zur Potentialtheorie. Ein Nachteil dieses Ansatzes ist auch seine Allgemeinheit: Für konkrete Gleichungen führen andere Ansätze oft auf stärkere Aussagen.

(viii) Anwendung des Spektralsatzes und der Halbgruppentheorie. Wir betrachten nochmals die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \Delta u = 0$$

im \mathbb{R}^n mit dem Anfangswert

$$u(0, x) = u_0(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Würde man den Operator Δ durch eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{k \times k}$ ersetzen, wäre eine Fundamentalmatrix der entstehenden Dgl. gegeben durch

$$Z(t) := \exp(tA).$$

Es liegt also nahe, auch hier die Lösung u zu definieren durch

$$u(t, x) := \exp(t\Delta)u_0(x).$$

Damit stellt sich die Frage, wie $\exp(t\Delta)$ definiert werden kann. In diesem Fall ist kein Reihenansatz wie bei Matrizen möglich (der Laplace-Operator besitzt keine endliche Operatornorm). Mit Hilfe des Spektralsatzes, einem zentralen Ergebnis der Funktionalanalysis, ist es jedoch möglich, Funktionen von selbstadjungierten Operatoren zu definieren. Insbesondere können Funktionen wie $\exp(t\Delta)$ und $\cos(t\sqrt{\Delta})$ definiert werden und damit Lösungen von Wärmeleitungs- und Wellengleichung angegeben werden.

Falls der Spektralsatz anwendbar ist, handelt es sich um die vielleicht beste Methode, PDGL zu lösen. Viele Eigenschaften der Lösung sind mit diesem Satz beweisbar, der in (v) beschriebene Ansatz durch Fourier-Reihen kann als Spezialfall des Spektralsatzes betrachtet werden. Selbst zur Fourier-Transformation, wie sie in (vi) beschrieben wurde, besteht eine Querverbindung.

Der Spektralsatz ist zunächst beschränkt auf selbstadjungierte Operatoren. Falls der Operator nicht selbstadjungiert ist, gibt es allgemeinere Zugänge zur Definition von $\exp(t\Delta)$, welche unter dem Begriff der Halbgruppentheorie zusammengefasst werden. Die Halbgruppentheorie ist insbesondere wichtig, falls die PDGL statt in L^2 in L^p mit $p \neq 2$ betrachtet werden soll. In diesem Fall verliert man die Hilbertraumstruktur ($L^p(\mathbb{R}^n)$ ist nur noch Banachraum), und selbstadjungierte Operatoren sind nur in Hilberträumen definiert.

Selbst wenn der Spektralsatz anwendbar ist, wie es in vielen Beispielen aus der Physik der Fall ist, müssen die PDGL im Einzelfall noch recht genau untersucht werden, um wirklich gute Aussagen zu erhalten. Bei diesem wie auch bei allen anderen Ansätzen bleibt immer noch viel zu tun, und es gibt auf dem Gebiet der PDGL wesentlich mehr offene Fragen als Antworten.

2. Elementare Lösungsmethoden

2.1 Worum geht's? In diesem Abschnitt werden erste Lösungsmethoden für PDGL vorgestellt. Bei Gleichungen erster Ordnung im \mathbb{R}^2 kann letztlich eine Reduktion auf gewöhnliche Differentialgleichung erfolgen; aus den entsprechenden Sätzen über die eindeutige Lösbarkeit gewöhnlicher Differentialgleichungen erhält man die *lokale* Lösbarkeit der PDGL. Ebenfalls eine lokale Lösbarkeit wird im Satz von Cauchy-Kovalevskaya bewiesen, bei welchem der Potenzreihenansatz verwendet wird. Ebenfalls in diesem Abschnitt findet sich eine erste Einteilung PDGL zweiter Ordnung, bei welchen die wichtigsten Typen vorgestellt werden.

a) Gleichungen erster Ordnung

Wie bisher sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Nach dem vorigen Abschnitt verstehen wir unter einer linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung für eine Funktion $u: G \rightarrow \mathbb{R}$ eine Gleichung der Art

$$a(x)^T \nabla u(x) = b(x)u(x) + c(x). \quad (2-1)$$

Wir setzen nun zusätzlich $a \in C^1(G; \mathbb{R}^n)$; $b, c \in C(G; \mathbb{R})$ und $a(x) \neq 0$ für $x \in G$ voraus. Wie schon erwähnt werden meist Anfangs- und oder Randbedingungen an die gesuchte Funktion u gestellt. Ein klassisches Problem mit dem wir uns befassen wollen ist die *Cauchysche Anfangswertaufgabe*:

$$\begin{aligned} a \nabla u &= bu + c, \\ u|_{\Gamma} &= f \end{aligned} \quad (2-2)$$

dabei ist Γ eine Hyperebene (Abb. 1) in G und $f \in C^1(\Gamma, \mathbb{R})$ eine gegebene Funktion. Für das Verständnis ist es nun ausreichend, wenn wir uns auf den Fall $n = 2$ beschränken. Demnach ist Γ eine glatte Kurve im \mathbb{R}^2 , welche (etwa) durch $t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$ für $t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, mit $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$, parametrisiert wird. Wir schreiben $\Gamma = [\gamma]$. Für eine Lösung $u = u(x, y)$ von (2-2) gilt notwendigerweise $u(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = f(\gamma(t))$ und durch Differenzieren erhält man weiter

$$u_x(\gamma(t))\gamma_1'(t) + u_y(\gamma(t))\gamma_2'(t) = \frac{d}{dt}f(\gamma(t)).$$

Nach Voraussetzung muss aber auch

$$u_x a_1 + u_y a_2 = bu + c = bf + c$$

auf Γ gelten. Damit haben wir ein Gleichungssystem für $u_x(\gamma(t))$, $u_y(\gamma(t))$ erhalten. Bekanntlich ist dieses eindeutig lösbar, falls die Determinante der zugehörigen Koeffizientenmatrix nicht verschwindet, also falls

$$\gamma_1' a_2 - \gamma_2' a_1 \neq 0$$

gilt.

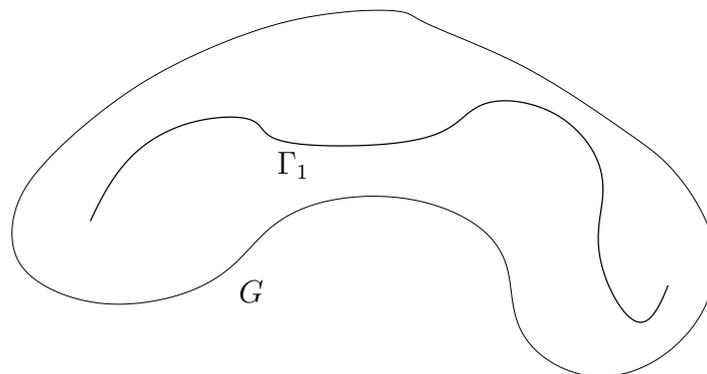


Abbildung 1: Beispiel für eine Hyperebene Γ_1 in einem Gebiet G .

2.2 Definition. Sei $\Gamma = [\gamma]$ eine Kurve, die durch $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$ ($t \in [\alpha, \beta]$) parametrisiert wird. Γ heißt dann Charakteristik der partiellen Differentialgleichung (2-1), falls

$$\gamma'_1(t)a_2(\gamma(t)) - \gamma'_2(t)a_1(\gamma(t)) = 0 \quad (t \in [\alpha, \beta]) \quad (2-3)$$

gilt. Sie heißt charakteristisch in $t_0 \in [\alpha, \beta]$, falls (2-3) an der Stelle $t = t_0$ gilt.

2.3 Beispiele. (i) Gegeben sei die partielle Differentialgleichung $u_x - u_y = 0$. Offenbar ist diese äquivalent mit $(1, -1)\nabla u(x, y) = 0$. Also erhält man die Charakteristiken dieser partiellen Differentialgleichung, indem man $-\gamma'_1 - \gamma'_2 = 0$ löst. Mittels Integration erhält man $\gamma_2(t) = -\gamma_1(t) + \text{const}$. Demnach sind die Charakteristiken parallele Geraden zur 2. Winkelhalbierenden im \mathbb{R}^2 (Abb. 2).

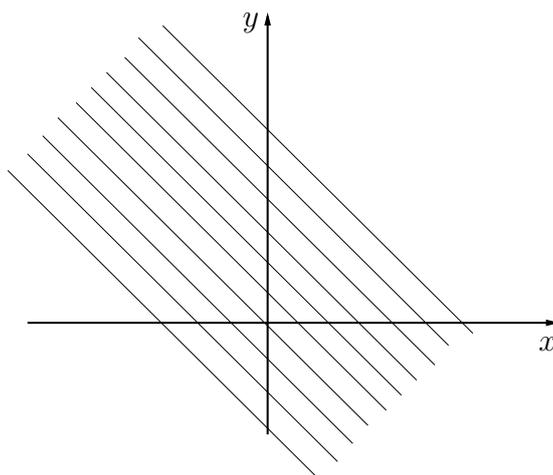


Abbildung 2: Charakteristiken

(ii) Ist die Gleichung $u_x + u_y = 0$ gegeben, so ergibt sich analog wie oben, dass die

Charakteristiken parallele Geraden zur 1. Winkelhalbierenden sind (Abb. 3).

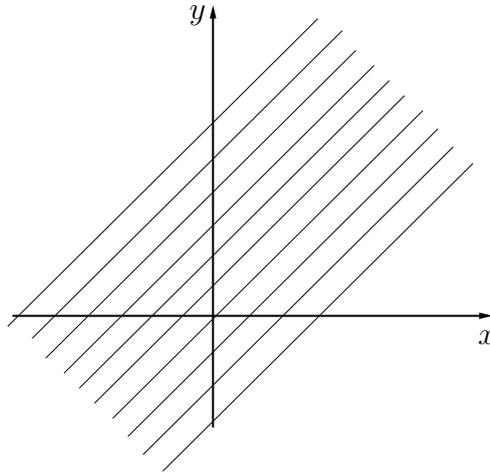


Abbildung 3: Charakteristiken

2.4 Bemerkung. Sei $(x_0, y_0) \in G$ gegeben. Dann bietet es sich an, eine Charakteristik durch (x_0, y_0) zu suchen, indem wir das folgende System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu lösen versuchen:

$$\begin{aligned}\gamma_1' &= a_1(\gamma_1, \gamma_2), & \gamma_1(0) &= x_0 \\ \gamma_2' &= a_2(\gamma_1, \gamma_2), & \gamma_2(0) &= y_0\end{aligned}$$

Wir dürfen sogar o.B.d.A. davon ausgehen, dass jede Charakteristik durch (x_0, y_0) obiges System erfüllt.

2.5 Satz. *Ist die Funktion $u : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $(x_0, y_0) \in G$ vorgegeben, so ist jede Lösung u von (2-1) auf jeder Charakteristik Γ durch (x_0, y_0) eindeutig bestimmt.*

Beweis. Es sei $\Gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ für $t \in [\alpha, \beta]$ eine Charakteristik durch (x_0, y_0) . O.B.d.A. gelte $0 \in [\alpha, \beta]$ und $\Gamma(0) = (x_0, y_0)$. Ist u eine Lösung von (2-1), so setzen wir $z(t) := u(\gamma(t))$. Offensichtlich gilt dann

$$z' = \frac{d}{dt}z = u_x \gamma_1' + u_y \gamma_2' = u_x a_1 + u_y a_2 = bz + c$$

und $z(0) = u(x_0, y_0)$ ist laut Voraussetzung gegeben. Demnach genügt z einer linearen, gewöhnlichen Differentialgleichung, welche eindeutig lösbar ist. \square

Dieses Resultat gibt uns nun die Möglichkeit, die Cauchysche Anfangswertaufgabe (2-2) lokal zu lösen. Zu beachten ist, dass der Beweis des folgenden Satzes konstruktiv ist, d.h., dass wir durch analoges Vorgehen wie im Beweis Lösungen explizit konstruieren können.

2.6 Satz. *Es sei $\Gamma = [\gamma]$ eine Kurve in G , welche durch $\gamma(t) := \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$ ($t \in [\alpha, \beta]$) parametrisiert wird. Weiter sei Γ im Punkt $\gamma(s_0) =: (x_0, y_0)$ nicht charakteristisch, d.h. $\gamma_1'(s_0)a_2(\gamma(s_0)) - \gamma_2'(s_0)a_1(\gamma(s_0)) \neq 0$. Dann gibt es eine Umgebung $U = U(x_0, y_0) \subset G$, in welcher die Cauchysche Anfangswertaufgabe eindeutig lösbar ist.*

Beweis. Für festes $s \in [\alpha, \beta]$ sei $\chi_s(t)$ ($t \in [\alpha_s, \beta_s]$), $0 \in (\alpha_s, \beta_s)$, eine Charakteristik, für die $\chi_s(0) = \gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ gilt. Wir definieren nun für eine Umgebung B von $(s_0, 0)$ die Funktion $\psi: B \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch $\psi(s, t) := \chi_s(t)$. Die Funktion ψ ist stetig differenzierbar und es gilt $\psi(s_0, 0) = (x_0, y_0)$. Weiter gilt unter Verwendung von Bemerkung 2.4

$$\partial_t \psi(s, t) = \partial_t \chi_s(t) = (\chi_{s,1}'(t), \chi_{s,2}'(t)) = (a_1(\chi_s(t)), a_2(\chi_s(t)))$$

und

$$\partial_s \psi(s, 0) = \partial_s \gamma(s) = (\gamma_1'(s), \gamma_2'(s))^T.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \det \psi'(s_0, 0) &= \begin{vmatrix} \gamma_1'(s_0) & a_1(\chi_{s_0}(0)) \\ \gamma_2'(s_0) & a_2(\chi_{s_0}(0)) \end{vmatrix} \\ &= \gamma_1'(s_0)a_2(\chi_{s_0}(0)) - \gamma_2'(s_0)a_1(\chi_{s_0}(0)) \neq 0, \end{aligned}$$

was die lokale Umkehrbarkeit der Funktion ψ sichert. Es gibt also eine offene Umgebung $V = V(s_0, 0)$ von $(s_0, 0)$, für die $\psi|_V$ injektiv ist. Sei $U := \psi(V)$, dann ist U offen und $\psi^{-1}: U \rightarrow V$ stetig differenzierbar. Sei nun $z(s, \cdot)$ die nach vorigem Satz eindeutig bestimmte Lösung auf der Charakteristik χ_s mit $z(s, 0) = f(\gamma(s))$, dann ist

$$u(x, y) := z(\psi^{-1}(x, y))$$

die gesuchte Lösung. □

Wir wollen uns den Beweis des obigen Satzes anhand eines Beispiels veranschaulichen.

2.7 Beispiel. Es seien $\Gamma := \{(x, 1) | x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$. Wir versuchen das Problem

$$\left\{ \begin{array}{l} xu_x + yu_y = \alpha u \\ u|_{\Gamma} = \varphi \end{array} \right\}$$

zu lösen. Bekanntlich erhalten wir eine Charakteristik, welche durch den Punkt $(s, 1)$ geht, durch Lösen der Differentialgleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x \\ x(0) = s \end{array} \right\} \text{ bzw. } \left\{ \begin{array}{l} y' = y \\ y(0) = 1 \end{array} \right\}$$

Wir erhalten also $\chi_s(t) := (se^t, e^t)$ (Abb. 4) und definieren

$$\psi(s, t) := \chi_s(t)$$

Für die Umkehrabbildung von ψ ergibt sich:

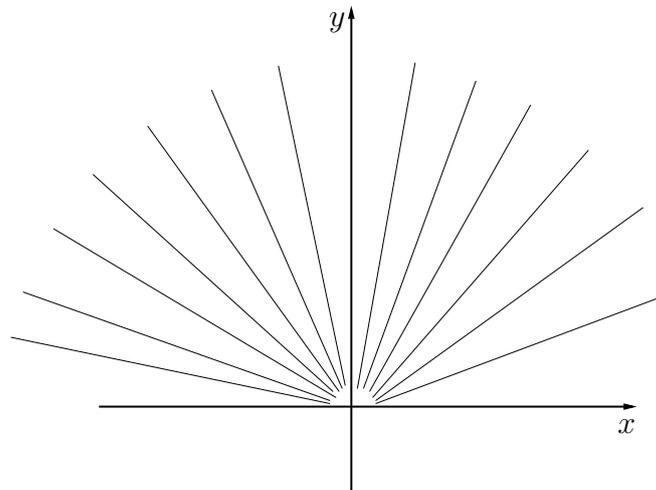


Abbildung 4: Charakteristiken

$$\psi^{-1}(x, y) = \left(\frac{x}{y}, \ln(y) \right)$$

Nun bleibt noch $z(s, \cdot)$ zu bestimmen. Wir erhalten

$$z(s, t) = \varphi(s)e^{\alpha t}$$

und damit insgesamt

$$u(x, y) = z(\psi^{-1}(x, y)) = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)y^\alpha.$$

b) Der Satz von Cauchy–Kovalevskaya

Der Satz von Cauchy–Kowalevskaya behandelt PDGL mit reell-analytischen Koeffizienten. Dabei heißt eine Funktion reell-analytisch an einem Punkt z , falls eine

Potenzreihe um z existiert, welche in einer Umgebung von z konvergiert und dort die Funktion darstellt. In diesem Fall ist die Funktion unendlich oft differenzierbar an der Stelle z , und die Potenzreihe ist gleich der Taylorreihe.

Wir formulieren den Satz für Systeme erster Ordnung, bei welchen die Koeffizienten nicht von t abhängen.

2.8 Satz (Cauchy-Kovalevskaya). Seien $n, N \in \mathbb{N}$ und für $j, k = 1, \dots, N + 1$, $i = 1, \dots, n$ seien $a_{jk}^i, b_j: \mathbb{R}^{n+N} \rightarrow \mathbb{R}$ reell-analytische Funktionen von $z = (x, u)$ im Nullpunkt des \mathbb{R}^{n+N} . Dann besitzt das System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t u_j &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N a_{jk}^i(x, u) \partial_i u_k + b_j(x, u) \quad (j = 1, \dots, N), \\ u(0, x) &= u_0(x) \end{aligned} \quad (2-4)$$

eine (in der Klasse der reell analytischen Funktionen eindeutige) Lösung $u = u(t, x)$, welche reell analytisch in einer Umgebung des Nullpunktes des \mathbb{R}^{n+N} ist.

Beweisskizze. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall $n = 1$, es macht dann Sinn $a_{jk} := a_{jk}^1$ zu setzen. Bemerkte sei aber, dass sich die folgende Vorgehensweise einfach auf die Fälle $n > 1$ übertragen lässt.

O.E. sei $u_0 = 0$, sonst betrachte $\tilde{u} = u - u_0$.

(i) *Berechnung der Koeffizienten.* Der Potenzreihenansatz an der Stelle 0 für die Lösung u hat die Form

$$u_i(t, x) = \sum_{l, k=0}^{\infty} c_{lk}^i t^l x^k \quad (i = 1, \dots, N).$$

Bekanntlich gilt

$$c_{lk}^i = \frac{1}{l!} \frac{1}{k!} \cdot \left. \frac{\partial^{k+l} u_i}{\partial_t^l \partial_x^k} \right|_{t=0, x=0}.$$

Aus der Gleichung $u(0, x) = u_0(x) = 0$ erhält man zunächst sukzessive $\left. \frac{\partial^m u_i}{\partial x^m} \right|_{t=0} = 0$. Mithilfe der Differentialgleichung schließen wir dann auf $\left. \frac{\partial u_i}{\partial t} \right|_{t=0}$ und es ergibt sich weiter (durch Ableiten der Differentialgleichung nach x) der Wert $\left. \frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial t} \right|_{t=0}$. Damit erhalten wir aber wieder unter Verwendung der Differentialgleichung $\left. \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right|_{t=0}$. Iterativ sieht man, dass alle partiellen Ableitungen und damit die Koeffizienten eindeutig bestimmt sind.

(ii) *Berechnung majoranter Koeffizienten* Wir wissen nun, dass die $a_{jk}(z)$ sowie die $b_j(z)$ analytisch sind. Wir können also für gewisse $g_\alpha^{jk}, h_\alpha^j$ einerseits

$$a_{jk}(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} g_\alpha^{jk} z^\alpha$$

und andererseits

$$b_j(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} h_{\alpha}^j z^{\alpha}$$

schreiben, wobei $|z| < r$ für ein $r > 0$ sei. Nach Berechnung der c_{lk}^i folgt

$$c_{lk}^i = P_{lk}^i((g_{\alpha}^{jm}), (h_{\alpha}^j)),$$

wobei P_{lk}^i ein Polynom mit nichtnegativen Koeffizienten ist. Unser Ziel ist es nun, majorante Koeffizienten C_{lk}^i zu konstruieren. Falls diese existieren folgt nämlich unmittelbar die Konvergenz der durch die c_{lk}^i definierte Reihe. Um diese majoranten Koeffizienten zu konstruieren betrachten wir das folgende „majorante“ Problem:

$$\begin{aligned} \partial_t v_j &= \sum_{k=1}^N A_{jk}(z) \partial_x v_k + B_j(z) \quad (j = 1, \dots, N) \\ v(0, x) &= 0, \end{aligned} \tag{2-5}$$

wobei die

$$A_{jk}(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{N+1}} G_{\alpha}^{jk} z^{\alpha}$$

und die

$$B_j(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{N+1}} G_{\alpha}^j z^{\alpha}$$

so zu bestimmen sind, dass $|g_{\alpha}^{jk}| \leq G_{\alpha}^{jk}$ und $|h_{\alpha}^j| \leq H_{\alpha}^j$ gilt. Sind nämlich letztere zwei Ungleichungen erfüllt, so folgt

$$C_{lk}^i = P_{lk}^i((G_{\alpha}^{jm}), (H_{\alpha}^j)) \geq P_{lk}^i((|g_{\alpha}^{jm}|), (|h_{\alpha}^j|)) \geq |c_{lk}^i|,$$

wie gewünscht.

Nun zur Konstruktion der A_{jk} und der B_j : Für hinreichend kleines r konvergiert die Reihe $\sum_{\alpha} |g_{\alpha}^{jk} z^{\alpha}|$ für $|z| < r\sqrt{N+1}$. Speziell wählen wir $z := (r, \dots, r)^T$. Damit sind die Reihenglieder beschränkt, d.h. es existiert ein $M_1 > 0$ mit $|g_{\alpha}^{jk}| \leq M_1 r^{-|\alpha|}$.

Analog existiert ein $M_2 > 0$ mit $|h_{\alpha}^j| \leq M_2 r^{-|\alpha|}$. Für $M := \max\{M_1, M_2\}$ gilt dann

$$|g_{\alpha}^{jk}| \leq \frac{M}{r^{|\alpha|}} \leq \frac{M}{r^{|\alpha|}} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} =: G_{\alpha}^{jk},$$

und genauso

$$|h_{\alpha}^j| \leq \frac{M}{r^{|\alpha|}} \leq \frac{M}{r^{|\alpha|}} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} =: H_{\alpha}^j.$$

Einsetzen ergibt

$$A_{jk}(z) = \sum_{\alpha} G_{\alpha}^{jk} z^{\alpha}$$

$$\begin{aligned}
&= M \sum_{\alpha} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \left(\frac{z_1}{r}\right)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \left(\frac{z_{N+1}}{r}\right)^{\alpha_{N+1}} \\
&= M \frac{1}{1 - \frac{z_1 + \dots + z_{N+1}}{r}} \\
&= \frac{Mr}{r - z_1 - \dots - z_{N+1}}
\end{aligned}$$

falls $|z_1| + \dots + |z_{N+1}| < r$ gilt. Analog erhält man

$$B_j(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} H_{\alpha}^j z^{\alpha} = \frac{Mr}{r - z_1 - \dots - z_{N+1}},$$

falls $|z_1| + \dots + |z_{N+1}| < r$ gilt. Die $A_{jk}(z)$ sind also von j, k und die $B_j(Z)$ sind von j unabhängig.

Wir müssen noch die Differentialgleichung (2-5) für v lösen. Diese lautet

$$\begin{aligned}
\partial_t v_j &= \frac{Mr}{r - x - v_1 - \dots - v_N} \left(\sum_{k=1}^N \partial_x v_k + 1 \right), \\
v(0, x) &= 0.
\end{aligned}$$

Man kann direkt nachrechnen, dass die Lösung gegeben ist durch $v := \tilde{v} \cdot (1, \dots, 1)^T$ mit

$$\tilde{v}(t, x) := \frac{1}{2N} \left(r - x - \sqrt{(r - x)^2 - 4MNrt} \right).$$

Für hinreichend kleines r ist diese Funktion reell-analytisch in (t, x) an der Stelle $(0, 0)$. \square

Die Aussage des Satzes von Cauchy-Kowalevskaya gilt auch für allgemeinere Situationen, wie die beiden nächsten Korollare zeigen.

2.9 Korollar. *Die Aussage von Satz 2.8 gilt auch, falls die Funktionen a_{jk}^i, b_j reell analytisch von (t, x, u) abhängen.*

Beweis. Man definiert die zusätzliche Funktion $u_{N+1} := t$ und erweitert die Dgl. um $\partial_t u_{N+1} = 1, u_{N+1}(0, x) = 0$. Damit kann man Satz 2.8 anwenden. \square

2.10 Korollar. *Für die Cauchysche Anfangswertaufgabe*

$$\begin{aligned}
u_{tt} &= f(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx}) \\
u(0, x) &= u_0(x) \\
u_t(0, x) &= u_1(x)
\end{aligned} \tag{2-6}$$

gilt: Ist f in einer Umgebung von $(0, 0, u_0(0), u_1(0), u'_0(0), u'_1(0), u''_0(0))$ analytisch, sowie u_0, u_1 in einer Umgebung von $x = 0$, so gibt es genau eine Lösung in einer Umgebung von $(t, x) = (0, 0)$ welche dort analytisch ist.

Beweis. Wir schreiben das AWP (2-6) in ein System erster Ordnung um. Dazu setzen wir

$$\begin{aligned} u_1 &:= u, & u_2 &:= u_t, & u_3 &:= u_x, & u_4 &:= u_{tt}, \\ u_5 &:= u_{tx}, & u_6 &:= u_{xx}, & u_7 &:= t, & u_8 &:= x. \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \partial_t u_1 &= u_2 \\ \partial_t u_2 &= u_4 \\ \partial_t u_3 &= u_5 \\ \partial_t u_4 &= f_t + f_u u_2 + f_{u_t} u_4 + f_{u_x} \partial_x u_2 + f_{u_{tx}} \partial_x u_4 + f_{u_{xx}} \partial_x u_5 \\ \partial_t u_5 &= \partial_x u_4 \\ \partial_t u_6 &= \partial_x u_5 \\ \partial_t u_7 &= \partial_x u_8 \\ \partial_t u_8 &= 0 \\ u_1(0, x) &= u_0(x) \\ u_2(0, x) &= u_1(x) \\ u_3(0, x) &= u'_0(x) \\ u_4(0, x) &= f(0, x, u_0(x), u_1(x), u'_0(x), u'_1(x), u''_0(x)) \\ u_5(0, x) &= u'_1(x) \\ u_6(0, x) &= u''_0(x) \\ u_7(0, x) &= 0 \\ u_8(0, y) &= y \end{aligned} \tag{2-7}$$

Es ist einfach nachzuweisen, dass das Problem (2-7) mit (2-6) äquivalent ist. Die Behauptung folgt damit aus Satz 2.8. \square

Wir sehen also, dass man im analytischen Fall immer lokal lösen kann. Das ist aber schon bei leichter Abschwächung der Forderungen (i.e. wenn die Koeffizienten „nur“ noch unendlich oft differenzierbar sind) nicht mehr richtig. Dies zeigt das folgende berühmte Beispiel von Hans Lewy (10. 10. 1904 - 23. 8. 1988) welches sogar linearer Struktur ist. Die Differentialgleichung

$$-u_x - iu_y + 2i(x + iy)u_z = f(x, y, z)$$

hat für ein gewisses $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ keine Lösung in einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, welche aus $C^1(\Omega)$ mit hölderstetigen Ableitungen u_x, u_y, u_z ist. Es sei noch bemerkt, dass dieses f nicht konstruktiv angegeben wird. Weiter ist zu beachten, dass die Differentialgleichung mit komplexen Koeffizienten zu einem System von zwei Differentialgleichungen mit reellen Koeffizienten äquivalent ist.

c) Typeinteilung bei linearen Gleichungen zweiter Ordnung

Wie in den ersten Beispielen schon erwähnt, gibt es drei große Klassen von PDGL (elliptisch, parabolisch und hyperbolisch), wobei nicht jede PDGL zu einer der drei Klassen gehören muss. Hier soll eine erste Definition gegeben werden.

2.11 Definition. Gegeben sei eine semilineare PDGL zweiter Ordnung der Form

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x) + F(x, u(x), \nabla u(x)) = 0 \quad (2-8)$$

in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ mit Koeffizienten $a_\alpha: G \rightarrow \mathbb{R}$ und $F: G \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$.

Der Ausdruck

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x) =: \sum_{j,k=1}^n A_{jk}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_k}$$

heißt der Hauptteil der Gleichung (2-8) oder des zugehörigen Differentialoperators. Die Matrix $(A_{jk}(x))_{j,k=1,\dots,n}$ sei o.E. symmetrisch (da für die Lösungen $\partial_j \partial_k u = \partial_k \partial_j u$ gelten soll).

- a) Die Gleichung (2-8) heißt elliptisch an der Stelle $x \in G$, falls $A(x)$ nur positive oder nur negative Eigenwerte besitzt.
- b) Die Gleichung (2-8) heißt parabolisch an der Stelle $x \in G$, falls genau ein Eigenwert von $A(x)$ verschwindet und alle anderen Eigenwerte dasselbe Vorzeichen haben.
- c) Die Gleichung (2-8) heißt hyperbolisch an der Stelle $x \in G$, falls genau $n - 1$ Eigenwerte von $A(x)$ dasselbe Vorzeichen haben und der verbleibende Eigenwert das entgegengesetzte Vorzeichen besitzt.
- e) Gelten die obigen Bedingungen für alle $x \in G$, so heißt die Gleichung elliptisch, parabolisch bzw. hyperbolisch.

Wir betrachten nun speziell den Fall $n = 2$ und linearer Differentialoperatoren, d.h. Differentialgleichungen der Form

$$\begin{aligned} Lu &:= \sum_{0 \leq |\alpha| \leq 2} a_\alpha \partial^\alpha u \\ &= a_{20} u_{xx} + a_{11} u_{xy} + a_{02} u_{yy} + a_{10} u_x + a_{01} u_y + a_{00} u = f, \end{aligned} \quad (2-9)$$

wobei die a_α und f gegebene reellwertige Funktionen sind. Bekanntlich werden zusätzliche Forderungen an die gesuchte Funktion u gestellt. Sei wieder Γ eine glatte Kurve im \mathbb{R}^2 .

- (i) Sind $u|_\Gamma$ und $\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}|_\Gamma$ vorgegeben, so handelt es sich um eine Cauchysche Anfangswertaufgabe.

(ii) Handelt es sich bei Γ um eine geschlossene Kurve (insbesondere $\Gamma = \partial G$), so spricht man

(a) von der Dirichletschen Randwertaufgabe, sofern $u|_{\Gamma}$ vorgegeben ist und

(b) von der Neumannschen Randwertaufgabe, sofern $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma}$ vorgegeben ist.

In vielen Fällen wird auch $\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma}$ vorgegeben. Hierbei handelt es sich offenbar um eine Mischung aus (a) und (b). Man spricht von gemischten Randbedingungen oder Robin-Randbedingungen.

(iii) Sind Anfangs- und Randbedingungen vorgegeben, so sprechen wir von einer Anfangsrandwertaufgabe. Ein Beispiel für eine solche Aufgabe ist das Problem der schwingenden Saite.

Zunächst befassen wir uns mit der Cauchyschen Anfangswertaufgabe. Die Hyperlebene Γ sei durch $\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ parametrisiert. Bekannt ist $u|_{\Gamma}$ und $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma}$. Es ist aber auch $\nabla u|_{\Gamma}$ bekannt, da die Tangentialableitung aus $u|_{\Gamma}$ bestimmbar ist. Es bietet sich nun an, zu versuchen, höhere Ableitungen auf Γ zu bestimmen um möglicherweise mittels einer Taylorentwicklung auf die gesuchte Lösung schließen zu können. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} (u_x(\gamma(s)))' &= u_{xx}(\gamma(s))\gamma_1'(s) + u_{xy}(\gamma(s))\gamma_2'(s) \\ (u_y(\gamma(s)))' &= u_{yx}(\gamma(s))\gamma_1'(s) + u_{yy}(\gamma(s))\gamma_2'(s) \end{aligned}$$

und nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} f(\gamma(s)) - (a_{10}u_x)(\gamma(s)) - (a_{01}u_y)(\gamma(s)) - (a_{00}u)(\gamma(s)) \\ = (a_{20}u_{xx})(\gamma(s)) + (a_{11}u_{xy})(\gamma(s)) + (a_{02}u_{yy})(\gamma(s)) \end{aligned}$$

Es handelt sich hierbei um ein Gleichungssystem für u_{xx} , u_{xy} und u_{yy} auf Γ :

$$\begin{pmatrix} \gamma_1' & \gamma_2' & 0 \\ 0 & \gamma_1' & \gamma_2' \\ a_{20} & a_{11} & a_{02} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xx} \\ u_{xy} \\ u_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x' \\ u_y' \\ f - a_{10}u_x - a_{01}u_y - a_{00}u \end{pmatrix}$$

Es wurden der Übersichtlichkeit halber die Argumente weggelassen. Dieses Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, sofern

$$0 \neq \begin{vmatrix} \gamma_1' & \gamma_2' & 0 \\ 0 & \gamma_1' & \gamma_2' \\ a_{20} & a_{11} & a_{02} \end{vmatrix} = a_{02}(\gamma_1')^2 - a_{11}\gamma_1'\gamma_2' + a_{20}(\gamma_2')^2 \quad (2-10)$$

gilt. Sei o.B.d.A. $\gamma_1' \neq 0$, dann kann bekanntlich γ_2 als Funktion in γ_1 dargestellt werden und es gilt $\frac{\gamma_2'}{\gamma_1'} = \frac{d\gamma_2}{d\gamma_1}$. Γ heißt Charakteristik zu dem Differentialoperator L (welcher in (2-9) definiert wurde), falls die rechte Seite von (2-10) verschwindet, d.h. falls

$$a_{20} \left(\frac{\gamma_2'}{\gamma_1'} \right)^2 - a_{11} \left(\frac{\gamma_2'}{\gamma_1'} \right) + a_{02} = 0.$$

Dies ist im Fall $a_{20} \neq 0$ mit

$$\frac{d\gamma_2(\gamma_1)}{d\gamma_1} = \left(\frac{a_{11}}{2a_{20}} \pm \frac{1}{2a_{20}} \sqrt{a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02}} \right) (\gamma_1, \gamma_2(\gamma_1))$$

und im verbleibenden Fall mit

$$\frac{d\gamma_2}{d\gamma_1} = \frac{a_{02}}{a_{11}}$$

äquivalent. Es ist zu beachten, dass in diesem Fall sicher $a_{11} \neq 0$ gelten muss, denn ansonsten wäre $\gamma_1' = 0$.

Man beachte, dass die rechte Seite von (2-10) genau dann verschwindet, falls

$$(\gamma_2'(s), -\gamma_1'(s)) \begin{pmatrix} a_{20}(\gamma(s)) & \frac{a_{11}(\gamma(s))}{2} \\ \frac{a_{11}(\gamma(s))}{2} & a_{02}(\gamma(s)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_2'(s) \\ -\gamma_1'(s) \end{pmatrix} = 0.$$

Die Matrix $A(\gamma(s))$ in dieser Gleichheit entspricht genau dem Hauptteil des Differentialoperators L im Sinne von Definition 2.11.

Wir wollen nun eine Typeinteilung für diese Differentialgleichungen anhand der Zahl der reellen Charakteristiken vornehmen.

- (i) Ist $D := a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02} < 0$, gibt es keine Charakteristiken. Diese Bedingung ist genau dann erfüllt, falls $\det A(x) > 0$ mit $x = \gamma(s)$. In diesem Fall ist $A(x)$ positiv definit oder negativ definit, und die Gleichung (2-9) ist nach Definition 2.11 elliptisch.
- (ii) Ist $a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02} = 0$, gibt es eine Charakteristikenschar. In diesem Fall ist $\det A(z) = 0$, und genau ein Eigenwert der Matrix $A(z)$ ist 0. Die Gleichung ist also parabolisch.
- (iii) Ist schließlich $a_{11}^2 - 4a_{20}a_{02} > 0$, gibt es zwei Charakteristikenscharen. Wegen $\det A(z) < 0$ haben die zwei Eigenwerte von $A(z)$ verschiedenes Vorzeichen, die Gleichung (2-9) ist hyperbolisch.

2.12 Beispiele. a) Ist $L = \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$, so folgt unmittelbar $a_{20} = a_{02} = 1$ und $a_{11} = 0$, womit man schnell erkennt, dass $D = -4 < 0$ gilt und es sich bei L um einen elliptischen Differentialoperator handelt.

b) Ist dagegen $L = \partial_y - \partial_x^2$, so erkennt man, dass $D = 0$ gilt und somit, dass L ein parabolischer Differentialoperator ist.

c) Ein hyperbolischer Operator ist, wie man leicht nachrechnet, durch $L = \partial_y^2 - \partial_x^2$ gegeben.

Im allgemeinen werden wir den sog. „Hadamardschen“ Lösungsbegriff zugrundelegen (Jacques Hadamard, 8.12.1865 - 17.10.1963), d.h. es sollten die folgenden Forderungen erfüllt werden:

- (H1) Existenz einer Lösung
- (H2) Eindeutigkeit
- (H3) Stetige Abhängigkeit von den Daten (Anfangswerte, Randwerte,...)

3. Distributionen

3.1 Worum geht's? In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen ist es oftmals sinnvoll, den Begriff der bekannten klassischen Differenzierbarkeit aufzulockern. Dies ermöglicht es etwa, Lösungsbegriffe zu definieren, die zwar schwächer sind als bereits bekannte, trotzdem aber für gewisse Anwendungen ausreichend sind. Die Theorie der Distributionen stellt nun Begriffsbildungen zur Verfügung, die es uns im Folgenden erlauben werden gewisse Sachverhalte elegant zu beschreiben. Insbesondere werden wir in der Lage sein, der Diracschen δ -Funktion einen präzisen Sinn zu geben. Dies wiederum wird von großer Wichtigkeit für die darauf folgende Potentialtheorie sein. Zu erwähnen ist, dass der Name „Distributionen“ von L. Schwartz eingeführt wurde.

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Man bezeichnet eine Funktion $\varphi: G \rightarrow \mathbb{C}$ als Testfunktion oder auch als C_c^∞ -Funktion, falls sie beliebig oft differenzierbar ist und einen kompakten Träger besitzt. Eine gebräuchliche Bezeichnung für den Raum der Testfunktionen auf G ist $C_c^\infty(G)$. Wir betrachten nun eine Folge von Funktionen in $C_c^\infty(G)$ und legen fest, wann wir von Konvergenz gegen 0 sprechen. Wir schreiben $K \subset\subset G$, falls K eine kompakte Teilmenge von G ist.

3.2 Definition. Sei $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(G)$, dann definieren wir die Konvergenz wie folgt:

$$\begin{aligned} \varphi_n \rightarrow_{\mathcal{D}} 0 : \iff & \quad (i) \quad \exists K \subset\subset G : \forall n \in \mathbb{N} : \text{supp } \varphi_n \subset K \\ & \quad (ii) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi_n(x)| \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Versieht man den Raum der Testfunktionen mit der zu dieser Konvergenz gehörenden Topologie, so schreibt man $\mathcal{D}(G)$.

3.3 Bemerkung. a) Eine Topologie, zu welcher obiger Konvergenzbegriff gehört, lässt sich als lokalkonvexe Topologie definieren. Die zugehörige Familie von Halbnormen ist jedoch relativ kompliziert zu definieren, was an Bedingung (i) in obiger Definition liegt.

b) Dass es hinreichend viele Testfunktionen gibt, ist bereits aus der Analysis bekannt, wo die Dichtheit der Testfunktionen in $L^p(G)$ für $1 \leq p < \infty$ bewiesen wurde. Man kann sich Testfunktionen mit gewissen Eigenschaften definieren, wie folgende Aussage zeigt: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $U \supset K$ offen. Dann existiert ein $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp } \varphi \subset U$ und $\varphi = 1$ auf K .

Um dies einzusehen, verwendet man den Friedrichschen Glättungsoperator, der auch schon beim Beweis obiger Dichtheitsaussage eingesetzt wurde. Genauer setzt man $d := \inf_{x \in K} \text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus U) := \inf\{|x - y| : x \in K, y \in \mathbb{R}^n \setminus U\}$. Da die Funktion $\text{dist}(\cdot, \mathbb{R}^n \setminus U)$ als stetige Funktion auf K ihr Minimum annimmt, gilt $d > 0$. Setze

nun $\tilde{K} := K + \overline{B(0, \frac{d}{2})} := \{x + z : x \in K, z \in \overline{B(0, \frac{d}{2})}\}$. Zu $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \psi = 1$ und $\text{supp } \psi \subset B(0, \frac{d}{3})$ definiere $\varphi := \chi_{\tilde{K}} * \psi$. Es folgt $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp } \varphi \subset U$ und $\varphi = 1$ auf K .

Eine auf $\mathcal{D}(G)$ definierte komplexwertige Funktion $T : \mathcal{D}(G) \rightarrow \mathbb{C}$ wird Funktional auf $\mathcal{D}(G)$ genannt. Ein Funktional T heißt linear, falls

$$T(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda T(\varphi) + \mu T(\psi)$$

für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(G)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt. In entsprechender Weise sind lineare Funktionale über einem beliebigen linearen Raum L definiert. Damit stehen uns nun alle Begriffe zur Verfügung um zu definieren, was wir unter einer Distribution verstehen wollen.

3.4 Definition. $\mathcal{D}'(G)$ bezeichnet die Menge aller linearen Abbildungen von $\mathcal{D}(G)$ nach \mathbb{C} , welche stetig sind, d.h.

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{D}'(G) : \iff & \quad (i) \quad f : \mathcal{D}(G) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ linear, und} \\ & \quad (ii) \quad \text{für } (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(G) \text{ mit } \varphi_n \rightarrow_{\mathcal{D}} 0 \text{ gilt} \\ & \quad \quad \quad f\varphi_n \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$\mathcal{D}'(G)$ heißt Menge der Distributionen von G .

3.5 Beispiel (reguläre Distributionen). Sei $u \in L^1_{\text{loc}}(G) := \{u : G \rightarrow \mathbb{R} : \forall K \subset G, K \text{ kompakt: } u \in L^1(K)\}$. Dann definiert

$$\begin{aligned} [u] : \mathcal{D}(G) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto [u](\varphi) := \int_G u(x)\varphi(x)dx \end{aligned}$$

eine Distribution, denn

(i) $[u]$ ist offensichtlich linear.

(ii) Sei $(\varphi_n)_n$ eine Folge in \mathcal{D} mit $\varphi_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, dann folgt:

$$|[u]\varphi_n| \leq \int_G |u\varphi_n| \leq \|u\|_{L^1_{\text{loc}}} \cdot \sup_{x \in K} |\varphi_n(x)| \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$ und ein $K \subset\subset G$. In diesem Zusammenhang spricht man auch davon, dass $[u]$ eine von u erzeugte Distribution ist. Eine von einer L^1_{loc} -Funktion erzeugte Distribution heißt *reguläre* Distribution.

3.6 Beispiel (Dirac-Distribution). Ein Beispiel für eine nicht-reguläre Distribution ist die sog. Dirac-Distribution (Diracsche „Deltafunktion“). Sei $x_0 \in G$ fest.

$$\begin{aligned} \delta_{x_0} : \mathcal{D}(G) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \delta_{x_0}(\varphi) := \varphi(x_0) \end{aligned}$$

(i) Linearität ist klar.

(ii) Sei $(\varphi_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{D}(G)$ mit $\varphi_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, dann folgt:

$$|\delta_{x_0}\varphi_n| = |\varphi_n(x_0)| \leq \sup_{x \in K} |\varphi_n(x)| \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$ und ein $K \subset\subset G$.

(iii) δ_{x_0} ist nicht regulär

Beweis: Sei angenommen, dass ein $u \in L^1_{\text{loc}}(G)$ existiert, so dass für alle $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ gilt

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0) = \int_G u(x)\varphi(x)dx$$

Es gibt nun sicher ein $\varepsilon > 0$ so dass $\overline{B(x_0, \varepsilon)} \subset G$ und $\int_{B(x_0, \varepsilon)} |u(x)|dx < 1$ gilt. Weiter finden wir eine Testfunktion φ für die einerseits $\text{supp } \varphi \subset B(x_0, \varepsilon)$ und andererseits $\forall x \in G : \varphi(x_0) \geq \varphi(x) \geq 0, \varphi(x_0) > 0$ gilt. Damit ergibt sich dann aber

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0) = \int_G u(x)\varphi(x)dx \leq \varphi(x_0) \int_{B(x_0, \varepsilon)} |u(x)|dx < \varphi(x_0),$$

was im Widerspruch zur Annahme steht.

3.7 Definition. Sei $f \in \mathcal{D}'(G)$. Gibt es ein $a > 0$, so dass für alle $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ gilt:

$$|f(\varphi)| \leq a \cdot \sup_{|\alpha| \leq m, x \in G} |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

wobei m minimal mit dieser Eigenschaft ist, so spricht man davon, dass f die Ordnung $m \in \mathbb{N}_0$ (auf G) besitzt.

3.8 Beispiele. a) Sei $u \in L^1(G)$ und $[u]$ die von u erzeugte Distribution, dann gilt für $\varphi \in \mathcal{D}(G)$:

$$|[u]\varphi| = \left| \int_G u(x)\varphi(x)dx \right| \leq \|u\|_{L^1} \sup_{x \in G} |\varphi(x)|$$

und man erkennt, dass $[u]$ die Ordnung 0 hat.

b) Auch die Dirac-Distribution ist ein Beispiel für eine Distribution mit Ordnung 0.

c) Wir wollen aber auch ein Beispiel für eine Distribution mit keiner endlichen Ordnung geben. Dazu betrachten wir die Funktion $u(x) := x$ in $G := \mathbb{R}$.

Behauptung: $[u]$ hat keine endliche Ordnung.

Beweis: Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $A := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx > 0$ und $B := \int_{\mathbb{R}} x\varphi(x)dx$. Für $m \in \mathbb{N}_0$, $a > 0$ sei $x_0 \in \mathbb{R}$ so, dass

$$x_0 > \frac{a \sup_{j \leq m, x \in G} |\partial^j \varphi(x)| - B}{A}$$

was gleichbedeutend mit

$$Ax_0 + B > a \sup_{\substack{j \leq m \\ x \in G}} |\partial_x^j \varphi(x)|$$

ist. Mit $\varphi_{x_0} := \varphi(\cdot - x_0)$ folgt dann

$$\begin{aligned} [u](\varphi_{x_0}) &= \int_{\mathbb{R}} x \varphi_{x_0}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} (x + x_0) \varphi(x) dx = B + x_0 A \\ &> a \sup_{\substack{j \leq m \\ x \in G}} |\partial_x^j \varphi(x)| = a \sup_{\substack{j \leq m \\ x \in G}} |\partial_x^j \varphi_{x_0}(x)| \end{aligned}$$

3.9 Definition. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $G \subset \Omega$ offen und $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

$$f = 0 \text{ in } G \iff \forall \varphi \in \mathcal{D}(G) : f\varphi = 0.$$

3.10 Satz. Sei $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $G_\alpha \subset \Omega$ offen, wobei $\alpha \in I$ für eine Indexmenge I gelte. Dann folgt aus $f = 0$ in G_α für alle $\alpha \in I$ schon $f = 0$ in $G := \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$.

Beweis. Sei $\varphi \in C_c^\infty(G)$, dann überdeckt $(G_\alpha)_{\alpha \in I}$ den kompakten Träger $\text{supp } \varphi$. Bekanntlich gilt dann aber bereits für ein $m \in \mathbb{N}$ und gewisse $\alpha_i \in I$:

$$\text{supp } \varphi \subset \bigcup_{i=1}^m G_{\alpha_i}.$$

Zu $(G_{\alpha_i})_{i=1 \dots m}$ existiert nun eine sog. Partition der Eins, d.h. Es existieren $\psi_{\alpha_i} \in C_c^\infty(G_{\alpha_i})$ so, dass gilt:

$$\forall x \in \text{supp } \varphi : \sum_{i=1}^m \psi_{\alpha_i}(x) = 1.$$

Damit können wir aber $\varphi(x) = \sum_{i=1}^m \varphi(x) \psi_{\alpha_i}(x)$ schließen, womit

$$f(\varphi) = \sum_{i=1}^m f(\varphi \psi_{\alpha_i}) = \sum_{i=1}^m 0 = 0$$

folgt und das war zu zeigen. □

3.11 Definition. Sei $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $G^* := \bigcup_{f=0 \text{ in } G} G$ die größte offene Menge, in der f verschwindet, so heißt

$$\text{supp } f := \Omega \setminus G^*$$

der Träger der Distribution f .

3.12 Beispiele. a) $f = \delta_{x_0} \implies \text{supp } f = \{x_0\}$.

b) $u \in C^0(\Omega) \implies \text{supp}[u] = \text{supp } u$.

Wie zu Anfang dieses Kapitels bereits erwähnt wurde, haben wir das Ziel, den klassischen Ableitungsbegriff aufzulockern oder zu verallgemeinern. Das bedeutet aber, dass sich dieser Ableitungsbegriff bei klassisch differenzierbaren Funktionen nicht von dem klassischen Begriff unterscheiden sollte. Es sei $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und $[f]$ die von f erzeugte reguläre Distribution. Offenbar gilt dann für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq k$

$$[\partial^\alpha f](\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha f \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f \partial^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} [f](\partial^\alpha \varphi)$$

Dies motiviert die folgende

3.13 Definition. Für beliebiges $f \in \mathcal{D}'(G)$ sei für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$

$$\begin{aligned} \partial^\alpha f : \mathcal{D}(G) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto (-1)^{|\alpha|} f(\partial^\alpha \varphi) \end{aligned}$$

$\partial^\alpha f$ heißt Ableitung der Distribution f vom Grad $|\alpha|$.

Es ist klar, dass $\partial^\alpha f \in \mathcal{D}'(G)$ ist, da mit $\varphi_n \rightarrow 0$ auch $\partial^\alpha \varphi_n \rightarrow 0$ gilt. Also ist jede Distribution beliebig oft differenzierbar.

3.14 Beispiele. Sei $x_0 \in G \subset \mathbb{R}$ und

$$h_{x_0}(x) := \begin{cases} 1, & x \geq x_0 \\ 0, & x < x_0 \end{cases}$$

für $x \in G$, dann gilt $[h_{x_0}]' = \delta_{x_0}$.

Ist $\varphi \in C_c^\infty(G)$, so folgt, wenn wir o.B.d.A. $G = (a, b)$ annehmen:

$$[h_{x_0}]'(\varphi) = - \int_a^b h_{x_0}(x) \varphi'(x) dx = - \int_{x_0}^b \varphi'(x) dx = \varphi(x_0) = \delta_{x_0}(\varphi).$$

Im folgenden Kapitel wird noch ein weiteres Beispiel gegeben. Im Einzelnen zeigen wir, dass

$$\Delta \left[-\frac{1}{4\pi|\cdot|} \right] = \delta \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

gilt. Dabei ist $|\cdot|$ die euklidische Norm im \mathbb{R}^3 .

4. Elliptische Theorie I: Potentialtheorie für die Laplace-Gleichung

4.1 Worum geht's? In diesem Abschnitt sollen anhand der Laplace- oder Potentialgleichung einige Grundbegriffe der Potentialtheorie vorgestellt werden. Dabei geht es vor allem um die Grundlösung und die Greensche Funktion. Die Idee der Grundlösung ist es, eine distributionelle Lösung für die Gleichung zu finden, bei welcher die Dirac-Distribution auf der rechten Seite steht, und damit eine Lösung der Laplace-Gleichung durch Faltung zu gewinnen. Die Greensche Funktion beschreibt die Lösung ebenfalls durch ein Integral.

Die Lösungen der Laplace-Gleichung heißen auch harmonische Funktionen. Es gibt zwei Gründe, sich mit ihnen besonders zu beschäftigen: Erstens gelten hier viele Eigenschaften, welche für eine große Klasse elliptischer Gleichung zutreffen, wie etwa das Maximumprinzip. Zweitens gibt es eine enge Querverbindung zur Funktionentheorie: Der Realteil einer holomorphen Funktion ist eine harmonische Funktion. Das Studium harmonischer Funktionen und der zugehörigen Beweismethoden hilft hier auch noch einmal, die Zusammenhänge der Funktionentheorie zu verstehen.

a) Grundlösungen

Im folgenden sei wieder $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet.

4.2 Definition. Sei

$$L := \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha \partial^\alpha$$

ein linearer Differentialoperator in \mathbb{R}^n mit konstanten Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{K}$. Dann heißt eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ eine Grundlösung oder Fundamentallösung zu L , falls $LT = \delta$ als Gleichheit in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ gilt.

Man beachte, dass die Grundlösung nicht eindeutig bestimmt ist; jede Lösung von $Lu = 0$ kann zu einer Grundlösung addiert werden.

Im folgenden geht es insbesondere um die Laplace- oder Potentialgleichung

$$-\Delta u = f. \tag{4-1}$$

4.3 Definition. Eine Funktion $u \in C^2(G)$ heißt harmonisch, falls $\Delta u = 0$ in G gilt.

Bei PDGL muss man häufig auf die Glattheit des Gebietes G achten. Sei dazu $m \in \mathbb{N}$. Ein Gebiet heißt ein C^m -Gebiet oder ein Gebiet mit C^m -Rand, falls der Rand lokal als Graph einer C^m -Funktion darstellbar ist. Äquivalent dazu ist, dass der Rand

eine C^m -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n ist. Für Funktion $u: G \rightarrow \mathbb{K}$ schreiben wir $u \in C^m(\overline{G})$, falls $u \in C^m(G)$ gilt und eine Fortsetzung $\tilde{u}: \tilde{G} \rightarrow \mathbb{K}$ von u existiert mit $\tilde{u} \in C^m(\tilde{G})$ und einem Gebiet $\tilde{G} \supset \overline{G}$.

Im folgenden sei an die Greenschen Formeln erinnert. Für ein beschränktes C^1 -Gebiet G und für $u, v \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ gilt die erste Greensche Formel

$$\int_G u(x) \Delta v(x) dx + \int_G \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle = \int_{\partial G} u(x) \frac{\partial v}{\partial n}(x) dS(x). \quad (4-2)$$

Dabei ist $n: \partial G \rightarrow \mathbb{R}^n$ der äußere Normaleneinheitsvektor, und $dS(x)$ steht für das $(n-1)$ -dimensionale Flächenmaß.

Durch Rollentausch von u und v und Subtraktion erhält man die zweite Greensche Formel

$$\int_G (u(x) \Delta v(x) - v(x) \Delta u(x)) dx = \int_{\partial G} \left(u(x) \frac{\partial v}{\partial n}(x) - v(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x) \right) dS(x). \quad (4-3)$$

4.4 Bemerkung. a) Sei $\omega_n := \lambda_{n-1}(\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\})$ der $(n-1)$ -dimensionale Flächeninhalt der Einheitssphäre. Für $k \in \mathbb{N}$ und $r > 0$ gilt dann die Gleichheit

$$\begin{aligned} \int_{B(0,r)} |x|^{-k} dx &= \int_0^r \int_{|x|=\rho} |x|^{-k} dS(x) d\rho \\ &= \int_0^r \rho^{-k} \int_{|x|=\rho} dS(x) d\rho = \int_0^r \rho^{-k} \lambda_{n-1}(\partial B(0, \rho)) d\rho \\ &= \lambda_{n-1}(\partial B(0, 1)) \int_0^r \rho^{n-1-k} d\rho = \omega_n \int_0^r \rho^{n-1-k} d\rho. \end{aligned}$$

Damit ist $|x|^{-k}$ genau dann auf $B(0, r)$ integrierbar, falls $k \leq n-1$.

b) Es gilt

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})},$$

wobei Γ die Gamma-Funktion ist.

c) Speziell im \mathbb{R}^3 sei $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, x \mapsto |x|^{-1}$. Dann gilt

$$\partial_i f(x) = -\frac{x_i}{|x|^3}, \quad \partial_j \partial_i f(x) = -\frac{1}{|x|^3} \delta_{ij} + 3 \frac{x_i x_j}{|x|^5}.$$

Damit ist f harmonisch in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Weiter gilt

$$|\nabla f(x)| = |x|^{-2}, \quad \left\langle \nabla f(x), \frac{x}{|x|} \right\rangle = -|x|^{-2}.$$

Es gilt $f \in L^1(B(0, r))$, $\partial_i f \in L^1(B(0, r))$ und $\partial_i \partial_j f \notin L^1(B(0, r))$ für alle i, j .

4.5 Satz. Die zur Funktion $g: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := \frac{1}{4\pi|x|}$ gehörige reguläre Distribution $[g]$ ist eine Grundlösung zum Laplaceoperator $-\Delta$.

Beweis. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, dann gilt für beliebiges $\varepsilon > 0$ zunächst

$$\Delta \left[\frac{1}{|x|} \right] (\varphi) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|} \Delta \varphi(x) dx = \int_{|x| < \varepsilon} \frac{1}{|x|} \Delta \varphi(x) dx + \int_{|x| > \varepsilon} \frac{1}{|x|} \Delta \varphi(x) dx.$$

Wir erhalten mit geeigneten Konstanten $C = C(\varphi) > 0$ und $\tilde{C} > 0$

$$\left| \int_{|x| < \varepsilon} \frac{1}{|x|} \Delta \varphi(x) dx \right| \leq \left| C \cdot \int_{|x| < \varepsilon} \frac{1}{|x|} dx \right| \leq \tilde{C} \int_0^\varepsilon r dr = \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Weiter ergibt sich unter Verwendung der Greenschen Formeln:

$$\begin{aligned} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{1}{|x|} \Delta \varphi(x) dx &= \int_{|x| = \varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x) \frac{1}{|x|} dx - \int_{|x| > \varepsilon} \left\langle \nabla \varphi(x), \nabla \frac{1}{|x|} \right\rangle dx \\ &= \int_{|x| = \varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x) \frac{1}{|x|} dx - \int_{|x| = \varepsilon} \varphi(x) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x|} dx + \int_{|x| > \varepsilon} \varphi(x) \Delta \frac{1}{|x|} dx \\ &= \int_{|x| = \varepsilon} \varphi(x) \left\langle \nabla \frac{1}{|x|}, \frac{x}{\varepsilon} \right\rangle dx + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= - \int_{|x| = \varepsilon} \varphi(x) \frac{1}{\varepsilon^2} dx + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Man beachte hier, dass der äußere Normaleneinheitsvektor gegeben ist durch $n(x) = -\frac{x}{\varepsilon}$. Wir erhalten insgesamt:

$$\begin{aligned} \Delta \frac{1}{|x|} (\varphi) &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|x| = \varepsilon} \varphi(x) dx + \mathcal{O}(\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= -4\pi\varphi(0) - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|x| = \varepsilon} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx + \mathcal{O}(\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &\rightarrow -4\pi\varphi(0) \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \end{aligned}$$

und das war zu zeigen. □

4.6 Korollar. Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$ und $u(x) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|} dy$ für $x \in \mathbb{R}^3$, dann ist $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ und es gilt $\Delta u = -4\pi f$ im distributionellen Sinn.

Beweis. Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ kompakt, dann folgt mit einer von K abhängigen Konstanten $C > 0$

$$\int_K |u(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} |f(y)| \left(\int_K \frac{1}{|x-y|} dx \right) dy \leq C \|f\|_{L^1} < \infty$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} (\Delta u)(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^3} u(x) \Delta \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^3} f(y) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|} \Delta \varphi(x) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} f(y) (-4\pi \varphi(y)) dy = -4\pi f(\varphi) \end{aligned}$$

und damit ist alles gezeigt. \square

Zu bemerken ist in diesem Zusammenhang, dass wir sogar $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ erhalten, sofern f hölderstetig ist. Insbesondere gilt dann auch $\Delta u = f$ im klassischen Sinn. Dies ist nicht richtig, wenn „nur“ $f \in C(\mathbb{R}^3)$ ist. Näheres dazu später.

4.7 Satz. *Dann ist die zu*

$$g_n: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\omega_n|x|^{n-2}} & \text{für } n \geq 3 \\ -\frac{1}{2\pi} \ln(|x|) & \text{für } n = 2 \end{cases}$$

gehörige reguläre Distribution eine Grundlösung zum Laplace-Operator $-\Delta$ im \mathbb{R}^n .

Beweis. Man wählt den Ansatz $g_n(x) = f_n(|x|)$ und betrachtet

$$0 = \Delta g = f'' + \frac{n-1}{r} f' = \frac{1}{r^{n-1}} (r^{n-1} f')', \quad r = |x|.$$

und damit weiter

$$f(r) = c \begin{cases} \ln(r) + d, & n = 2 \\ -\frac{1}{(n-2)r^{n-2}} + d & n \geq 3 \end{cases}$$

O.B.d.A wählen wir $d = 0$. Analog zum Beweis von Satz 4.5 berechnet man c und beweist die Eigenschaft einer Grundlösung. \square

b) Darstellungsformeln

Im folgenden sei stets $g = g_n$ die Grundlösung zum Laplace-Operator $-\Delta$ aus Satz 4.7.

4.8 Lemma. *Für $\varepsilon > 0$ gilt*

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} g(x) dS(x) &= \begin{cases} \frac{\varepsilon}{n-2}, & n > 2, \\ -\varepsilon \ln \varepsilon, & n = 2, \end{cases} \\ \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial n} g(x) dS(x) &= -1. \end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis folgt durch direktes Nachrechnen. \square

4.9 Satz (Darstellungsformel). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Gebiet, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ und $f := -\Delta u$. Dann gilt für alle $x \in \Omega$ die Darstellung

$$u(x) = \int_{\Omega} f(y)g(x-y)dy + \int_{\partial\Omega} \left\{ \frac{\partial u}{\partial n}(y)g(x-y) - u(y)\frac{\partial g}{\partial n}(x-y) \right\} dS(y).$$

Beweis. Sei $x \in \Omega$ fest und $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass noch $\overline{B(x, \varepsilon)} \subset \Omega$ gilt. Wir setzen $\Omega' := \Omega \setminus \overline{B(x, \varepsilon)}$ und wenden die zweite Greensche Formel auf die Funktion u und $g(\cdot - x) = g(x - \cdot)$ an. Wegen $\Delta g(\cdot - x) = 0$ in Ω' folgt

$$\int_{\Omega'} g(y-x)\Delta u(y)dy = \int_{\partial\Omega'} \left[g(y-x)\frac{\partial}{\partial n}u(y) - u(y)\frac{\partial}{\partial n}g(y-x) \right] dS(y).$$

Es gilt $\partial\Omega' = \partial\Omega \cup \partial B(x, \varepsilon)$. Als C^2 -Funktion ist die Funktion u mit ihren ersten und zweiten Ableitungen auf $\overline{B(x, \varepsilon)}$ beschränkt, also auch $\frac{\partial}{\partial n}u$. Nach Lemma 4.8 folgt

$$\int_{\partial B(x, \varepsilon)} g(y-x)\frac{\partial}{\partial n}u(y)dS(y) \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Die äußere Normale (zum Gebiet Ω') zeigt auf dem Rand $\partial B(x, \varepsilon)$ auf den Kreismittelpunkt, aus Lemma 4.8 erhalten wir daher

$$\int_{\partial B(x, \varepsilon)} \frac{\partial}{\partial n}g(y-x)dS(y) = 1.$$

Wegen $\sup_{|x-y| \leq \varepsilon} |u(x) - u(y)| \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) folgt

$$\int_{\partial B(x, \varepsilon)} u(y)\frac{\partial}{\partial n}g(y-x)dS(y) \rightarrow u(x) \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Schließlich erhalten wir aus der Beschränktheit von Δu und wegen $g \in L^1_{\text{loc}}$ den Grenzwert

$$\int_{B(x, \varepsilon)} g(y-x)\Delta u(y)dy \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Insgesamt erhalten wir die behauptete Darstellung für $u(x)$. \square

4.10 Bemerkung. a) Man beachte, dass man obige Darstellungsformel nicht verwenden kann, um das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \\ u|_{\partial\Omega} &= h_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} &= h_2 \end{aligned}$$

durch

$$u(x) := \int_{\partial\Omega} \left\{ g(x-y)h_2(y) - \frac{\partial g}{\partial n}(x-y)h_1(y) \right\} dy$$

zu lösen. Im Allgemeinen kann man nämlich h_1 und h_2 nicht gleichzeitig vorschreiben.

b) Für eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ mit $\Delta u = 0$ gilt nach der zweiten Green'schen Formel mit $v = 1$

$$0 = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Eine notwendige Bedingung für eine Potentialfunktion ist also

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} = 0.$$

4.11 Korollar (Mittelwerteigenschaft). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Gebiet. Sei $u \in C^2(\Omega)$ mit $\Delta u = 0$. Dann gilt für alle $x \in \Omega$ und für alle $r > 0$ mit $\bar{B}(x,r) \subset \Omega$ die Gleichheit

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y).$$

Beweis. Mithilfe der Darstellungsformel erhalten wir zunächst

$$u(x) = \int_{\partial B(x,r)} \left[g(x-y) \frac{\partial u}{\partial n}(y) - \frac{\partial g}{\partial n}(x-y) u(y) \right] dS(y)$$

Weiter können wir unter Beachtung der Eigenschaften der Grundlösung g schließen

$$\int_{\partial B(x,r)} g(x-y) \frac{\partial u}{\partial n}(y) dS(y) = \text{const}(r) \int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial n}(y) dS(y) = 0.$$

Wir erkennen weiter, dass aufgrund der Voraussetzungen $n = -\frac{x-y}{|x-y|}$ gilt. Damit ergibt sich

$$\frac{\partial g}{\partial n}(x-y) = -\frac{1}{\omega_n} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} = -\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}$$

für $y \in \partial B(x,r)$ und somit insgesamt

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y).$$

□

4.12 Satz (Maximumprinzip). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Gebiet, weiter sei $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ nicht konstant und besitze die Mittelwerteigenschaft. Dann nimmt u in Ω weder Maximum noch Minimum an.

Beweis. Wir beweisen den Satz o.B.d.A. für ein Maximum. Sei also $x_0 \in \Omega$ so, dass $u(x_0) =: m$ maximal ist. Damit setzen wir

$$M := \{x \in \Omega : u(x) = m\} \subset \Omega.$$

Wir werden nun zeigen, dass M einerseits offen und andererseits abgeschlossen ist (in der durch Ω induzierten Relativtopologie).

- (i) Wir zeigen, dass M offen ist. Dazu nehmen wir an, dass ein $x \in M$ existiert, für welches wir kein $r > 0$ finden können, so dass $\overline{B(x, r)} \subset M$ gilt. Wir wählen nun ein $r > 0$, so dass für $\overline{B(x, r)} \subset \Omega$ ein $x_0 \in \partial B(x, r)$ existiert mit $x_0 \notin M$. Dann gilt aber

$$m = u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS(y) < \frac{m}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} 1 dS(y) = m$$

was nicht möglich ist.

- (ii) Die Stetigkeit von u liefert die Abgeschlossenheit von M .

Wir wissen nun, dass M offen und abgeschlossen ist. Da Ω zusammenhängend ist und $M \neq \emptyset$ nach Definition von M gilt, folgt $M = \Omega$, d.h. u ist konstant. \square

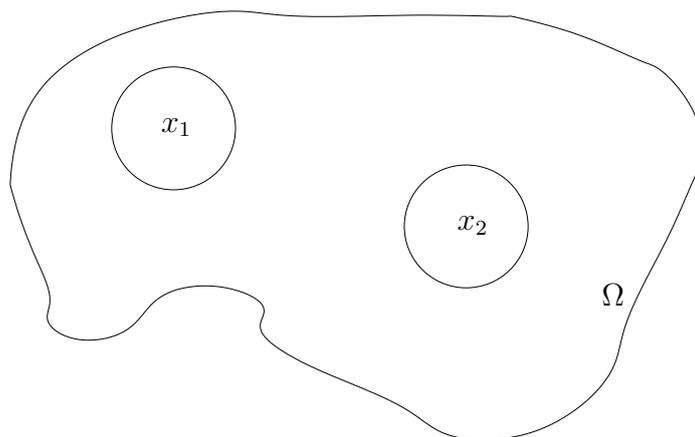
4.13 Korollar. Seien $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ und es gelte $\Delta u_1 = \Delta u_2$ sowie $u_1|_{\partial\Omega} = u_2|_{\partial\Omega}$. Dann gilt $u_1 = u_2$.

Beweis. Offensichtlich gilt $\Delta(u_1 - u_2) = 0$. Damit besitzt $u_1 - u_2$ die Mittelwerteigenschaft, woraus nach vorigem Satz folgt, dass $u_1 - u_2$ weder Maximum noch Minimum in Ω annimmt. Wegen $u_1 - u_2|_{\partial\Omega} = 0$ folgt $u_1 - u_2 = 0$ in Ω und das war die Behauptung. \square

4.14 Korollar. Die Dirichletsche Randwertaufgabe $\Delta u = f$, $u|_{\partial\Omega} = g$ besitzt höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

4.15 Bemerkung. a) Wir haben gezeigt, dass Funktionen $u \in C^2(\Omega)$ mit $\Delta u = 0$ die Mittelwerteigenschaft besitzen. Tatsächlich gilt aber auch, dass eine Funktion u die nur stetig in Ω ist und die Mittelwerteigenschaft besitzt schon eine Potentialfunktion ist. Wir kommen darauf später noch einmal zurück.

b) Es gilt: Ist u eine Potentialfunktion in einem Gebiet Ω , so ist u analytisch in Ω . Dies wird hier nicht bewiesen.

Abbildung 5: Das Gebiet Ω' im Beweis von Lemma 4.17

c) Die Greensche Funktion für das Dirichlet-Problem

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Wir suchen eine Lösung der klassischen Dirichletschen Randwertaufgabe:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \text{für } x \in \Omega, \\ u &= f & \text{für } x \in \partial\Omega, \\ u &\in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \end{aligned} \quad (4-4)$$

Nach Korollar 4.14 besitzt das Randwertproblem (4-4) höchstens eine Lösung. Für die Existenz einer Lösung versuchen wir eine spezielle Grundlösung $G(x, y)$ zu finden, für die $G(x, y)|_{y \in \partial\Omega} = 0$ gilt. Im folgenden sei $g = g_n$ die in Satz 4.7 definierte Grundlösung zu $-\Delta$.

4.16 Definition. Eine Funktion $G : \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine Greensche Funktion (erster Art) zu Ω , falls

- (i) $G(x, y) = g(x - y) + \psi(x, y)$ wobei $\psi : \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ einerseits $\psi(x, \cdot) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ für $x \in \Omega$ und andererseits $\Delta_y \psi(x, y) = 0$ in $\Omega \times \Omega$ erfüllt.
- (ii) $G(x, y) = 0$ für $x \in \Omega, y \in \partial\Omega$.

Man beachte, dass für jedes feste $x \in G$ nach Definition die Gleichheit $\Delta_y G(x, y) = 0$ ($y \in G \setminus \{x\}$) gilt. Im Allgemeinen ist die Konstruktion einer Greenschen Funktion G schwierig. Bei geometrisch einfachen Objekten etwa bei einer Kugel ist es explizit möglich. Meist muss eine Lösungstheorie bereits zur Verfügung stehen, damit man die Existenz von G nachweisen kann. Wir gehen zunächst auf Eigenschaften von G ein.

4.17 Lemma (Symmetrie der Greenschen Funktion). *Es sei G eine Greensche Funktion zu Ω . Dann gilt*

$$G(x, y) = G(y, x).$$

Beweis. Es seien $x_1, x_2 \in \Omega$ mit $x_1 \neq x_2$. Weiter sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass für $B_i := B(x_i, \varepsilon) \subset \Omega$ für $i = 1, 2$ sowie $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ gelte (Abb. 5).

Nach Definition gilt $\Delta_y G(x_j, y) = 0$ für $j = 1, 2$. Wir betrachten das Gebiet $\Omega' := \Omega \setminus (\overline{B_1} \cup \overline{B_2})$. Es gilt $G(x_j, \cdot) \in C^2(\Omega') \cap C^1(\overline{\Omega'})$. Daher folgt aus der zweiten Greenschen Formel

$$0 = \int_{\partial\Omega'} \left[G(x_1, y) \frac{\partial}{\partial n} G(x_2, y) - G(x_2, y) \frac{\partial}{\partial n} G(x_1, y) \right] dS(y).$$

Andererseits ist nach Definition $G(x_j, y) = 0$ ($y \in \partial\Omega$). Wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} \left[\underbrace{G(x_1, y)}_{=0} \frac{\partial}{\partial n} G(x_2, y) - \underbrace{G(x_2, y)}_{=0} \frac{\partial}{\partial n} G(x_1, y) \right] dS(y) \\ &= - \int_{\partial B(x_1, \varepsilon)} \left[G(x_1, y) \frac{\partial}{\partial n} G(x_2, y) - G(x_2, y) \frac{\partial}{\partial n} G(x_1, y) \right] dS(y) \\ &\quad - \int_{\partial B(x_2, \varepsilon)} \left[G(x_1, y) \frac{\partial}{\partial n} G(x_2, y) - G(x_2, y) \frac{\partial}{\partial n} G(x_1, y) \right] dS(y). \end{aligned}$$

Die Funktion $\frac{\partial}{\partial n} G(x_2, \cdot)$ ist auf $\overline{B(x_1, \varepsilon)}$ beschränkt. Da auch $G(x_1, \cdot) - g(x_1 - \cdot)$ beschränkt ist, folgt $|G(x_1, y)| \leq C\varepsilon^{-(n-2)}$ ($y \in \partial B(x_1, \varepsilon)$). Wir erhalten

$$\left| \int_{\partial B(x_1, \varepsilon)} G(x_1, y) \frac{\partial}{\partial n} G(x_2, y) dS(y) \right| \leq C\varepsilon^{-(n-2)} \int_{\partial B(x_1, \varepsilon)} 1 dS(y) = C\varepsilon.$$

Andererseits gilt

$$\int_{\partial B(x_1, \varepsilon)} \frac{\partial}{\partial n} G(x_1, y) dS(y) = 1$$

(beachte, dass wieder die äußere Normale in Richtung Kreismittelpunkt zeigt). Damit erhalten wir die Abschätzung

$$\int_{\partial B(x_1, \varepsilon)} G(x_2, y) \frac{\partial}{\partial n} G(x_1, y) dS(y) = G(x_2, x_1) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Die analogen Aussagen gelten für $\int_{\partial B(x_2, \varepsilon)} \dots dS(y)$. Insgesamt erhalten wir

$$0 = G(x_2, x_1) - G(x_1, x_2) + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

und für $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt die Behauptung. □

4.18 Lemma. Sei $n \geq 3$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein glattes Gebiet. Falls G eine Greensche Funktion zu Ω ist, so gilt

$$0 \leq G(x, y) \leq g(x - y) \quad (x, y \in G).$$

Beweis. Sei wieder $G(x, y) - g(x - y) = \psi(x, y)$. Für festes $x \in G$ gilt $\psi(x, y)|_{y \in \partial\Omega} = -g(x - y)|_{y \in \partial\Omega} < 0$. Da $\psi(x, \cdot)$ harmonisch ist, folgt aus dem Maximumprinzip $\psi(x, y) \leq 0$ für alle $y \in \Omega$, d.h. es gilt $G(x, y) \leq g(x - y)$ ($x, y \in \Omega$).

Sei $y_0 \in \Omega$. Wegen $g(x - y_0) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow y_0$ und der Beschränktheit von ψ folgt,

$$\exists \varepsilon > 0 : G(x, y_0) > 0 \text{ für } x \in \overline{B(y_0, \varepsilon)}$$

Das bedeutet aber, dass $G(\cdot, y_0)$ in $\Omega' := \Omega \setminus \overline{B(y_0, \varepsilon)}$ nichtnegative Randwerte hat. Dort gilt aber auch $\Delta_x G(x, y_0) = 0$. Mit dem Maximumprinzip folgt zunächst $G(x, y_0) \geq 0$ für $x \in \Omega'$ und nach Wahl von ε auch in Ω . \square

Die Greensche Funktion ist geeignet zur Definition einer Lösung des Dirichletschen Randwertproblems. Der entscheidende Punkt ist hier die Glattheit des Gebietes und der rechten Seite. Dazu zunächst die Wiederholung einer Definition.

4.19 Definition (Hölder-Stetigkeit). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Zu $m \in \mathbb{N}_0$ und $0 < \lambda \leq 1$ sei $C^{m, \lambda}(\overline{\Omega})$ die Menge aller Funktionen $f \in C^m(\overline{\Omega})$, für welche eine Konstante K existiert mit

$$|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)| \leq K|x - y|^\lambda \quad (x, y \in \Omega, |\alpha| \leq m).$$

Der Raum $C^{m, \lambda}(\overline{\Omega})$ heißt Hölderraum zum Index m, λ und wird mit der Norm

$$\|f\|_{C^{m, \lambda}(\overline{\Omega})} := \|f\|_{C^m(\overline{\Omega})} + \max_{|\alpha|=m} \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)|}{|x - y|^\lambda}$$

versehen.

Der folgende Satz wird nicht bewiesen (ist aber bis auf die Glattheitseigenschaft klar). Er zeigt, dass das Volumenintegral über die Greensche Funktion die homogenen Randbedingungen bei inhomogener rechter Seite löst.

4.20 Satz. Sei Ω ein C^2 -Gebiet, und sei $f \in C^{0, \alpha}(\overline{\Omega})$ mit $\alpha \in (0, 1]$. Dann löst

$$u(x) := \int_{\Omega} f(y)G(x, y)dy$$

die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \\ u &\in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}). \end{aligned}$$

4.21 Satz. Sei $R > 0$, $n \geq 3$. Definiere die Funktion

$$G_R(x, y) := g(x - y) - \left(\frac{R}{|y|}\right)^{n-2} g(x - y')$$

mit $y' := \frac{R^2}{|y|^2}y$. Dann ist G_R eine Greensche Funktion für die Kugel $\Omega = B(0, R)$.

Beweis. (i) Definiert man x' analog zu y' , so folgt $|x| \cdot |x'| = R^2$ und $|y| \cdot |x - y'| = |x| \cdot |y - x'|$. Die letzte Gleichheit sieht man durch

$$\begin{aligned} |y|^2 \cdot |x - y'|^2 &= |y|^2 \left(|x|^2 + \frac{R^4}{|y|^4} |y|^2 - 2 \frac{R^2}{|y|^2} \langle x, y \rangle \right) \\ &= |x|^2 |y|^2 + R^4 - 2R^2 \langle x, y \rangle, \end{aligned}$$

was einen symmetrischen Ausdruck in x und y darstellt.

(ii) Damit gilt $\psi(x, y) := G_R(x, y) - g(x - y) = -\left(\frac{R}{|y|}\right)^{n-2} g(x - y') = -\left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} g(y - x')$. Wegen $|x'| > R$ für $x \in \Omega$ hat $\psi(x, \cdot)$ keinen Pol in Ω , und es folgt $\psi(x, \cdot) \in C^2(\overline{\Omega})$. Ebenso folgt aus der letzten Darstellung von $\psi(x, \cdot)$, dass $\Delta_y \psi(x, y) = 0$ ($y \in \Omega$) für festes $x \in \Omega$ gilt.

(iii) Für $y \in \partial\Omega$, d.h. $|y| = R$, folgt $y' = y$ und damit direkt aus der Definition $G_R(x, y) = 0$ ($x \in \Omega$). \square

Hintergrund für die vorigen Ansätze ist die Kelvin¹-Transformation.

4.22 Lemma. Für $n \geq 3$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial n_y} G_R(x, y)|_{y \in \partial B(0, R)} = \frac{|x|^2 - R^2}{R\omega_n} \frac{1}{|x - y|^n}.$$

Beweis. Für $y \in \partial B(0, R)$ gilt $y' = y$ und $|x| \cdot |x' - y| = R \cdot |x - y|$. Wir erhalten für $x \in B(0, R)$ die Gleichheit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_y} G(x, y) &= \frac{1}{R\omega_n} \left\langle y, \frac{(x - y)}{|x - y|^n} - \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} \frac{x' - y}{|x' - y|^n} \right\rangle \\ &= \frac{1}{R\omega_n |x - y|^n} \left\langle y, x - y - \frac{|x|^2}{R^2} (x' - y) \right\rangle \\ &= \frac{|x|^2 - R^2}{R\omega_n |x - y|^n}. \end{aligned}$$

\square

¹William Lord Kelvin of Largs, vormalis Sir William Thomson, 26.06.1824 - 17.12.1907

4.23 Satz (Poissonsche Integralformel).² Es seien $\Omega = B(0, R)$, $f \in C(\partial\Omega)$ und

$$u(x) := - \int_{\partial\Omega} f(y) \frac{\partial}{\partial n} G_R(x, y) dS(y) = \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_n} \int_{\partial\Omega} \frac{f(y)}{|x - y|^n} dS(y) \quad (x \in \Omega).$$

Dann gilt $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ und

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= f && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei letzteres wie folgt zu verstehen ist:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \Omega}} u(x) = f(x_0) \quad (x_0 \in \partial\Omega).$$

Beweis. Dass u in Ω harmonisch ist, ist klar, da G_R eine Greensche Funktion in Ω ist. Zu zeigen ist lediglich $u = f$ auf $\partial\Omega$. Es sei $x \in \Omega$ und $x_0 \in \partial\Omega$ und $\varepsilon > 0$. Mithilfe von Satz 4.9 (Darstellungsformel) sowie Lemma 4.22 ergibt sich

$$1 = \frac{1}{R\omega_n} \int_{\partial\Omega} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^n} dS(y)$$

Für $x \in \Omega$ folgt nun

$$\begin{aligned} |u(x) - f(x_0)| &= \left| \frac{1}{R\omega_n} \int_{\partial\Omega} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^n} (f(y) - f(x_0)) dS(y) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{R\omega_n} \int_{\partial\Omega \cap B(x_0, \rho)} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^n} (f(y) - f(x_0)) dS(y) \right| \end{aligned} \quad (4-5)$$

$$+ \left| \frac{1}{R\omega_n} \int_{\partial\Omega \setminus B(x_0, \rho)} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^n} (f(y) - f(x_0)) dS(y) \right| \quad (4-6)$$

und weiter

$$(4-5) \leq \sup_{y \in B(x_0, \rho) \cap \partial\Omega} |f(y) - f(x_0)| \frac{1}{\omega_n R} \int_{\partial\Omega \cap B(x_0, \rho)} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

für ein in Abhängigkeit von ε fest gewähltes $\rho > 0$. Sei nun $C := \max_{y \in \partial\Omega} |f(y)|$ und

$$|x - x_0| < \delta := \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\rho}{2} \right)^n \frac{1}{4CR^{n-1}}, \frac{\rho}{2} \right\}$$

Dann erhalten wir

$$|x - y| \geq |x_0 - y| - |x_0 - x| \geq \frac{\rho}{2} \quad \text{für } y \in \partial\Omega \setminus B(x_0, \rho).$$

²Simeon - Denis Poisson 21.06.1781 - 25.04.1840

und

$$R^2 - |x|^2 = (R + |x|)(R - |x|) \leq 2R(R - |x|) = 2R(|x_0| - |x|) \leq 2R|x - x_0| \leq 2R\delta.$$

Damit können wir aber

$$\begin{aligned} (4-6) \quad &\leq \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_n} \int_{\partial\Omega} \frac{|f(y) - f(x_0)|}{|x - y|^n} dy \leq \frac{2R\delta}{R\omega_n} 2C \frac{1}{\left(\frac{\rho}{2}\right)^n \omega_n R^{n-1}} \\ &= \frac{4CR^{n-1}}{\left(\frac{\rho}{2}\right)^n} \delta = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

schließen und das liefert die Behauptung. \square

Wir beschäftigen uns später mit allgemeineren Gebieten.

Schließlich wollen wir uns noch mit der Neumannschen Randwertaufgabe beschäftigen. Diese ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{für } x \in \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial n} u &= f \quad \text{für } x \in \partial\Omega, \\ u &\in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}). \end{aligned}$$

Wendet man denselben Ansatz wie für die Greensche Funktion an, so sucht man eine Grundlösung mit $\frac{\partial \gamma}{\partial n}|_{y \in \partial\Omega} = 0$. Aus Satz 4.9 (Darstellungsformel) folgt mit $u \equiv 1$ aber für eine beliebige Grundlösung :

$$1 = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} g(x, y) dS(y).$$

Also ist g noch nicht die gesuchte Grundlösung, es ist eine Modifikation notwendig. Aus dem Beweis der Darstellungsformel 4.9 sieht man, dass sogar für jede Funktion der Form $\gamma(x, y) = g(x - y) + \varphi(x, y)$ mit $\varphi(x, \cdot) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ und $\Delta_y \varphi(x, y) = 0$ die Gleichheit

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} \gamma(x, y) dS(y) = -1$$

gilt. Man kann also die Forderung $\frac{\partial \gamma}{\partial n}|_{y \in \partial\Omega} = 0$ nicht erfüllen. Stattdessen verlangt man zumindest, dass $\frac{\partial \gamma}{\partial n}|_{y \in \partial\Omega}$ eine Konstante ist.

4.24 Definition. Eine Funktion $\gamma : \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine Greensche Funktion zweiter Art zu Ω , falls

- (i) $\gamma(x, y) = g(x - y) + \varphi(x, y)$ mit $\varphi : \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x, \cdot) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ und $\Delta_y \varphi(x, y) = 0$ in $\Omega \times \Omega$.

$$(ii) \quad \frac{\partial}{\partial n_y} \gamma(x, y) = -\frac{1}{\lambda_{n-1}(\partial\Omega)} \text{ für } x \in \Omega, y \in \partial\Omega.$$

4.25 Bemerkung. Falls γ eine Greensche Funktion zweiter Art zu Ω ist, so folgt aus der Darstellungsformel mit $f := \frac{\partial}{\partial n} u|_{\partial\Omega}$ die Gleichheit

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial\Omega} f(y)\gamma(x, y)dS(y) - \frac{1}{\lambda_{n-1}(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} u(y)dS(y) \\ &= \int_{\partial\Omega} f(y)\gamma(x, y)dS(y) + \text{const}, \end{aligned}$$

und mehr ist auch nicht zu erwarten. Man beachte, dass die Lösung des Neumannschen Randwertproblems nie eindeutig ist, denn mit u ist auch $u + C$ mit $C \in \mathbb{R}$ eine Lösung.

5. Parabolische Theorie I: Fourier-Methoden

5.1 Worum geht's? Die Fourier-Transformation ist eines der wichtigsten Hilfsmittel in der Theorie partieller Differentialgleichungen. Dies liegt vor allem daran, dass die Fourier-Transformation eine partielle Ableitung in eine punktweise Multiplikation verwandelt. So gilt z.B. für den Laplace-Operator $-\Delta u(x) = [\mathcal{F}^{-1}|\xi|^2 \mathcal{F}u](x)$. Dies erlaubt bei geeigneten Gleichungen auch eine direktes Invertieren des Operators und damit eine Berechnung der Lösung.

Bei parabolischen Differentialgleichungen wie etwa der Wärmeleitungsgleichung führt die Anwendung der Fourier-Transformation auf eine gewöhnliche Differentialgleichung, welche explizit lösbar ist. Wir erhalten eine Lösungsdarstellung als Integral. Eine der berühmtesten Gleichungen der Finanzmathematik ist die Black-Scholes-Gleichung, welche sich durch geeignete Transformationen auf die Wärmeleitungsgleichung reduzieren lässt.

a) Grundlegendes zur Fourier-Transformation

Im folgenden werden die wichtigsten Eigenschaften der Faltung und der Fourier-Transformation ohne Beweis angegeben.

5.2 Definition (Faltung). Seien $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ messbar. Definiere

$$N_{f,g} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \int |f(y)| \cdot |g(x-y)| dy = \infty \right\}$$

und das Faltungsprodukt $f * g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$(f * g)(x) := \begin{cases} \int f(y)g(x-y)dy, & x \notin N_{f,g}, \\ 0, & x \in N_{f,g}. \end{cases}$$

5.3 Bemerkung. a) Falls $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so ist $\lambda(N_{f,g}) = 0$ und $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

b) Sei $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ ist dann $\lambda(N_{f,g}) = 0$ und $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

c) Falls $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so ist $(f * g) * h = f * (g * h)$, d.h. die Faltung ist assoziativ.

d) Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ und $g \in C^k_c(\mathbb{R}^n)$ mit $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Dann ist $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$, und es gilt

$$\partial^\alpha(f * g) = f * (\partial^\alpha g) \quad (|\alpha| \leq k).$$

Insbesondere ist $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, falls $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

5.4 Definition (Fourier-Transformation). Zu $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}f$ definiert durch

$$\mathcal{F}f(\xi) := \hat{f}(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} dx \quad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

Hierbei ist $x\xi := \langle x, \xi \rangle$ das Standard-Skalarprodukt.

5.5 Lemma (Elementare Eigenschaften). Seien $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > 0$ und $a \in \mathbb{R}^n$.

a) Für $g(x) := f(x)e^{iax}$ gilt $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - a)$.

b) Für $g(x) := f(x - a)$ gilt $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-ia\xi}$.

c) Für $g(x) := \overline{f(-x)}$ gilt $\hat{g}(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$.

d) Für $g(x) := f(\frac{x}{\alpha})$ gilt $\hat{g}(\xi) = \alpha^n \hat{f}(\alpha\xi)$.

e) Sei $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $h := f * g$. Dann gilt $\hat{h}(\xi) = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi)$.

Die Fourier-Transformation ist besonders günstig auf dem Schwartz-Raum zu betrachten. Dieser ist folgendermaßen definiert.

5.6 Definition und Satz (Schwartz-Raum). Der Vektorraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ besteht aus allen Funktionen $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, für welche gilt:

$$p_{\alpha,\beta}(\varphi) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < \infty \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n).$$

Durch die abzählbare Familie $L = \{p_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n\}$ von Normen auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ wird eine metrisierbare lokalkonvexe Topologie definiert, welche $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ zu einem Fréchetraum macht. Der Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, versehen mit dieser Topologie, heißt Schwartz-Raum oder der Raum der schnell fallenden Funktionen.

5.7 Bemerkung. a) Übersetzt man die oben angegebene lokalkonvexe Topologie in Konvergenz von Folgen, so erhält man, dass eine Folge $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ genau dann gegen 0 konvergiert, falls für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ gilt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi_k(x)| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Dies ist äquivalent zur Bedingung

$$\forall N \in \mathbb{N}_0 : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{|\beta| \leq N} |x|^N |\partial^\beta \varphi_k(x)| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

b) Offensichtlich gilt $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Die Identität $i: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \mapsto \varphi$, ist aber auch stetig. Denn falls $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi_k \rightarrow_{\mathcal{D}} 0$, so folgt nach Definition der Konvergenz in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ insbesondere $\text{supp } \varphi_k \subset K$ für ein Kompaktum K . Wir erhalten für alle $N \in \mathbb{N}_0$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^N |\partial^\beta \varphi_k(x)| \leq C_K \sup_{x \in K} |\partial^\beta \varphi_k(x)| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

d.h. es gilt auch $\varphi_k \rightarrow 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Damit ist i folgenstetig, und nach Definition der lokalkonvexen Topologien in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ auch stetig. Man schreibt $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Die Fourier-Transformierte verwandelt partielle Ableitungen in punktweise Multiplikation mit den Koordinatenfunktionen. Dies ist einer der Gründe, warum die Fourier-Transformation für PDGL so wichtig ist.

5.8 Lemma. Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt:

- (i) $\mathcal{F}f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\partial^\alpha(\mathcal{F}f) = (-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}(x^\alpha f)$.
- (ii) $\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha (\mathcal{F}f)(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}^n)$.

5.9 Definition und Satz. a) Die Fourier-Transformation $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist eine Bijektion mit

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

b) (Satz von Plancherel.) Es gilt

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad (f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

Somit ist $\mathcal{F}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$ eine Isometrie und damit eindeutig zu einem isometrischen Isomorphismus $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzbar, der ebenfalls Fourier-Transformation genannt wird. Insbesondere gilt

$$\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2 \quad (f \in L^2(\mathbb{R}^n)).$$

5.10 Satz. Die Fourier-Transformation $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist stetig.

5.11 Definition. a) Eine temperierte Distribution ist eine stetige lineare Abbildung $u: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$. Der Raum der temperierten Distributionen wird mit $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet.

b) Für $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ wird die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}u$ definiert durch

$$(\mathcal{F}u)(\varphi) := u(\mathcal{F}\varphi) \quad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

5.12 Bemerkung. Nach Satz 5.10 ist $\mathcal{F}u: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ wieder stetig als Komposition stetiger Funktionen. Damit ist

$$\mathcal{F}: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

linear und bijektiv mit $\mathcal{F}^4 = \text{id}_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)}$.

b) Die Wärmeleitungsgleichung

Die Wärmeleitungsgleichung, oder allgemeiner: eine Diffusionsgleichung, beschreibt in den Anwendungen die zeitliche Entwicklung der Dichte u einer Einheit wie zum Beispiel Wärme oder eine chemische Konzentration. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \Omega$ eine beliebige glatt berandete Teilmenge, so sollte die Veränderungsrate in V gleich dem Negativen des Nettodurchflusses durch den Rand ∂V sein:

$$\frac{d}{dt} \int_V u dx = - \int_{\partial V} \langle F, \nu \rangle dx = - \int_V \text{div } F$$

wobei F die Flußdichte ist. Damit ergibt sich nun

$$u_t = - \text{div } F$$

Vielfach hat F die Gestalt $F = -a\nabla U$ für eine Konstante $a > 0$. Dann erhält man

$$u_t = a\Delta u$$

Interessant ist auch der Fall, dass die Koeffizienten nicht nur von x sondern von t und x abhängig sind. Verallgemeinerte Probleme sind:

$$u_t - \sum_{i,k=1}^n \partial_i a_{ik} \partial_k u = 0$$

oder

$$u_t - \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) \partial_i \partial_k u + \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_i u + c(x) = 0$$

Zunächst befassen wir uns mit der klassischen Theorie.

Wir suchen eine Funktion $u \in C^1([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ mit $u(t, \cdot) \in C^2(\mathbb{R}^n)$ für $t > 0$, die das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0, & (t, x) &\in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \\ u(0, x) &= u_0(x), & x &\in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

bei gegebenem beschränktem $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$ löst. Die Anfangsbedingung ist so zu verstehen, dass

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \xi}} u(t, x) = u_0(\xi)$$

gleichmäßig in Kompakta bezüglich ξ gilt.

5.13 Bemerkung. Wir werden später sehen, dass die Lösung sogar in $C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ liegt.

Um auf eine Lösung und deren Gestalt schließen zu können, nehmen wir an, dass wir bereits eine glatte Lösung gegeben haben. Wir definieren

$$\hat{u}(t, \xi) := (\mathcal{F}u(t, \cdot))(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u(t, x) dx$$

Es ist $\hat{u}_t(t, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u_t(t, x) dx$ und weiter nach Lemma 5.8

$$(\mathcal{F}\Delta u(t, \cdot))(\xi) = -|\xi|^2 \hat{u}(t, \xi)$$

Wir erhalten also die folgende Differentialgleichung

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_t(t, \xi) + |\xi|^2 \hat{u}(t, \xi) = 0, \quad (t, \xi) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \\ \hat{u}(0, \xi) = \hat{u}_0(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n \end{array} \right\}$$

Bei festem ξ handelt es sich also um eine gewöhnliche Differentialgleichung. Diese wird durch

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{-t|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi)$$

gelöst. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} u(t, x) &= (\mathcal{F}^{-1} \hat{u}(t, \cdot))(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \hat{u}(t, \xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} e^{-t|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} e^{-t|\xi|^2} e^{-iy\xi} u_0(y) dy d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi - t|\xi|^2} d\xi \right) u_0(y) dy \end{aligned}$$

Wir definieren

$$K(t, x, y) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi - t|\xi|^2} d\xi$$

und formen K für $t > 0$ um. Hierzu definieren wir $\eta := \sqrt{t}\xi - \frac{i(x-y)}{2t}\sqrt{t}$, dann ist $\xi = \frac{i(x-y)}{2t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\eta$. Es folgt

$$t|\xi|^2 - i(x-y)\xi = |\sqrt{t}\xi|^2 - 2\sqrt{t}\xi \frac{i(x-y)}{2\sqrt{t}} + \frac{|x-y|^2}{4t} - \frac{|x-y|^2}{4t} = |\eta|^2 + \frac{|x-y|^2}{4t}$$

und damit

$$K(t, x, y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} t^{-\frac{n}{2}} d\eta$$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-n} t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} d\eta \\
&= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}
\end{aligned}$$

Wir erhalten also für $t > 0$

$$u(t, x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy$$

5.14 Satz. Sei $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für

$$u(t, x) := (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy \quad (5-1)$$

$u \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$, $u_t - \Delta u = 0$ für $t > 0$ und

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x_0}} u(t, x) = u_0(x_0)$$

gleichmäßig bezüglich Kompakta in x_0 .

Beweis. Offenbar ist die Abbildung u wohldefiniert. Weiter ist $K(\cdot, \cdot, \cdot) \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$(\partial_t - \Delta_x)K(\cdot, \cdot, y) = 0 \quad \text{für beliebiges } y \in \mathbb{R}^n$$

wie man leicht nachrechnet. Setzen wir $\eta = \frac{x-y}{\sqrt{4t}}$, so ergibt sich

$$\int_{|x-y|>\delta} K(t, x, y) dy = \pi^{-\frac{n}{2}} \int_{|\eta|>\frac{\delta}{\sqrt{4t}}} e^{-|\eta|^2} d\eta$$

Damit folgt

$$(i) \int_{\mathbb{R}^n} K(t, x, y) dy = 1.$$

$$(ii) \forall \delta > 0 : \lim_{t \rightarrow 0} \int_{|y-x|>\delta} K(t, x, y) dy = 0 \text{ gleichmäßig in } x \in \mathbb{R}^n.$$

und wir folgern $u \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ mit $(\partial_t - \Delta)u = 0$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt und $\delta = \delta(\varepsilon)$ so, dass

$$|u_0(y) - u_0(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für } |y - x_0| < 2\delta$$

gilt. Sei $M := \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |u_0(y)| < \infty$. Dann folgt für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x - \xi| < \delta$

$$\begin{aligned}
& |u(t, x) - u_0(x_0)| \\
= & \left| \int_{\mathbb{R}^n} K(t, x, y)(u_0(y) - u_0(x_0)) dy \right| \\
\leq & \int_{|y-x| < \delta} |K(t, x, y)(u_0(y) - u_0(x_0))| dy + \int_{|y-x| > \delta} |K(t, x, y)(u_0(y) - u_0(x_0))| dy \\
\leq & \int_{|y-x_0| < 2\delta} |K(t, x, y)(u_0(y) - u_0(x_0))| dy + 2M \int_{|y-x| > \delta} K(t, x, y) dy \\
\leq & \varepsilon + 2M \int_{|y-x| > \delta} K(t, x, y) dy \\
< & 2\varepsilon
\end{aligned}$$

falls $t < t_0$. □

5.15 Bemerkung. Der Lösungsformel (5-1) sieht man an, dass unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit vorliegt, denn $u(t, \cdot)$ hängt für $t > 0$ von allen Werten von u_0 ab, bzw. $u_0(\cdot)$ beeinflusst für $t > 0$ sofort alle $u(t, x)$ für beliebige $x \in \mathbb{R}^n$. Aus (5-1) folgt auch

$$u(t, x) \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} K(t, x, y) dy \right) \sup_{z \in \mathbb{R}^n} u_0(z) \leq \|u_0\|_\infty$$

sowie

$$\inf_{z \in \mathbb{R}^n} u_0(z) \leq u(t, x) \leq \sup_{z \in \mathbb{R}^n} u_0(z).$$

Hierbei handelt es sich offenbar um eine Art „Maximumprinzip“.

c) Die Gleichung von Black und Scholes

5.16 Bemerkung. Die Formel von Black und Scholes behandelt die Optionspreisbewertung. Zur Beschreibung des Modells verwenden wir innerhalb dieser Bemerkung die in der Stochastik übliche Schreibweise S_t statt $S(t)$, d.h. vorübergehend ist S_t nicht die partielle Ableitung.

Sei $(S_t)_{t \in [0, T]}$ der Kurs eines Basiswerts. Dann genügt S_t nach einem Standardmodell der Finanzmathematik der stochastischen Differentialgleichung

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Dabei sind $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \geq 0$ konstante Parameter, und W_t ist die Brownsche Bewegung.

Gesucht ist der Wert $V(S_t, t)$ einer Option auf den Basiswert zum Zeitpunkt t . Eine festverzinsliche Anlage (Bond) mit Zinssatz $r \geq 0$ erfüllt die Gleichung

$$dB_t = rB_t dt.$$

Wir bilden ein Portfolio aus $c_1(t)$ Anteilen des Bonds, $c_2(t)$ Anteilen des Basiswerts und einer verkauften Option, d.h. für den zugehörigen Wert Y_t gilt

$$Y_t = c_1(t)B_t + c_2(t)S_t - V(S_t, t). \quad (5-2)$$

Wir nehmen an, dass das Portfolio Y_t risikolos ist und der Markt keine Arbitrage zulässt. In diesem Fall kann das Portfolio nur soviel erwirtschaften wie eine risikolose Anleihe. Wir erhalten

$$dY_t = rY_t dt. \quad (5-3)$$

Falls das Portfolio selbstfinanzierend ist, gilt

$$dY_t = c_1(t)dB_t + c_2(t)dS_t - dV(S_t, t). \quad (5-4)$$

Um den letzten Term zu berechnen, wenden wir das Lemma von Itô an und erhalten

$$\begin{aligned} dV(S_t, t) &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dS_t^2 \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S} dW_t. \end{aligned} \quad (5-5)$$

Wir können die Differentialgleichungen für B_t , S_t und die Gleichung (5-5) in (5-4) einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned} dY_t &= \left[c_1(t)rB_t + c_2(t)\mu S_t - \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \right] dt \\ &\quad + \left(c_2(t)\sigma S_t - \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S} \right) dW_t. \end{aligned} \quad (5-6)$$

Falls das Portfolio keine zufälligen Schwankungen enthält, muss die letzte Klammer verschwinden, d.h. es gilt $\frac{\partial V}{\partial S}(S_t, t) = c_2(t)$. Eingesetzt erhält man aus (5-4) und (5-6) die Gleichheit

$$\begin{aligned} r \left(c_1(t)B_t + S_t \frac{\partial V}{\partial S}(S_t, t) - V(S_t, t) \right) dt &= rY_t dt = dY_t \\ &= \left[c_1(t)rB_t - \frac{\partial V}{\partial t}(S_t, t) - \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_t, t) \right] dt. \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen der Koeffizienten erhalten wir eine partielle Differentialgleichung für die Funktion $V = V(S, t)$, wobei wir S als unabhängige Variable ansehen:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) + rS \frac{\partial V}{\partial S}(S, t) - V(S, t) = 0.$$

Dies ist eine Gleichung in $(S, t) \in (0, \infty) \times (0, T)$, welche noch mit Randbedingungen versehen werden muss. Da eine Option auf einen wertlosen Basiswert selbst wertlos ist, schreiben wir $V(0, t) = 0$ ($t \in [0, T]$) vor. Bei einem europäischen Call ist die Endbedingung gegeben durch

$$V(S, T) = (S - E)_+ := \max\{S - E, 0\},$$

wobei E der Ausübungspreis der Option ist. Für $S \rightarrow \infty$ ist die Option annähernd soviel wert wie der Basiswert selbst, d.h. man verlangt

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{V(S, t)}{S} = 1 \quad (t \in [0, T]).$$

Insgesamt erhalten wir folgende Differentialgleichung von Black und Scholes, welche wir jetzt wieder in der üblichen Schreibweise $V = V(t, s)$ aufschreiben.

$$\begin{aligned} V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 V_{ss} + rsV_s - rV &= 0 && ((t, s) \in (0, T) \times (0, \infty)), \\ V(T, s) &= \max(s - E, 0) && (s \in (0, \infty)), \\ V(t, 0) &= 0 && (t \in [0, T]), \\ \lim_{s \rightarrow \infty} V(t, s)/s &= 1 && (t \in [0, T]). \end{aligned} \tag{5-7}$$

Die folgende Black-Scholes-Formel erschien am 15. 10. 1997 in der New York Times.

5.17 Satz (Black-Scholes-Formel). Zu $d \in \mathbb{R}$ sei

$$N(d) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d}^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho.$$

Definiere

$$d_{1,2}(t, s) := \frac{\ln\left(\frac{s}{E}\right) + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

und

$$V(t, s) := sN(d_1(t, s)) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2(t, s)) \quad ((t, s) \in (0, T) \times (0, \infty)).$$

Dann löst V die Black-Scholes-Gleichung (5-7).

Beweis. Wir beginnen mit einer Variablentransformation: Für $s > 0$ sei $x := \ln\left(\frac{s}{E}\right)$ bzw. $s = Ee^x$ und $\tau := \frac{1}{2}\sigma^2(T - t)$ bzw. $t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}$. Ferner sei

$$v(\tau, x) := \frac{V(t, s)}{E} = \frac{V\left(T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}, Ee^x\right)}{E}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} v_\tau &= \frac{1}{E} V_t \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{E} \left(-\frac{1}{\frac{1}{2}\sigma^2} \right) V_t, \\ v_x &= \frac{1}{E} V_s \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{E} E e^x V_s = \frac{s}{E} V_s, \\ v_{xx} &= e^x V_s + e^x V_{ss} \frac{\partial s}{\partial x} = e^x V_s + E e^{2x} V_{ss} = \frac{s}{E} V_s + \frac{s^2}{E} V_{ss} \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} v_\tau - v_{xx} &= -\frac{1}{E} \frac{1}{\frac{1}{2}\sigma^2} V_t - \frac{s}{E} V_s - \frac{s^2}{E} V_{ss} \\ &= -\frac{1}{E} \left\{ -s^2 V_{ss} - \frac{rs}{\frac{1}{2}\sigma^2} V_s + \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} V + s V_s + s^2 V_{ss} \right\} \\ &= \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} \frac{s}{E} V_s - \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} \frac{V}{E} - \frac{s}{E} V_s \\ &= (k_1 - 1)v_x - k_1 v \end{aligned}$$

mit $k_1 := \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$.

Damit geht unser Problem in

$$\begin{aligned} v_\tau &= v_{xx} + (k_1 - 1)v_x - k_1 v, & (\tau, x) &\in [0, \frac{1}{2}\sigma^2 T] \times \mathbb{R} \\ v(0, x) &= \max(e^x - 1, 0), & x &\in \mathbb{R} \\ v(\tau, -\infty) &= 0, & \tau &\in [0, \frac{1}{2}\sigma^2 T] \\ v(\tau, x)/e^x &\rightarrow 1 \quad (x \rightarrow \infty), & \tau &\in [0, \frac{1}{2}\sigma^2 T] \end{aligned}$$

über. Um dieses Problem zu lösen, wählen wir den folgenden Ansatz:

$$u(\tau, x) := e^{-(\alpha x + \beta \tau)} v(\tau, x) \quad \text{bzw.} \quad v(\tau, x) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(\tau, x)$$

für gewisse, noch zu wählende $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} v_\tau &= \beta v + e^{\alpha x + \beta \tau} u_\tau = \beta e^{\alpha x + \beta \tau} u + e^{\alpha x + \beta \tau} u_\tau, \\ v_x &= \alpha v + e^{\alpha x + \beta \tau} u_x = \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} u + e^{\alpha x + \beta \tau} u_x, \\ v_{xx} &= \alpha v_x + \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} u_x + e^{\alpha x + \beta \tau} u_{xx} = \alpha^2 e^{\alpha x + \beta \tau} u + 2\alpha e^{\alpha x + \beta \tau} u_x + e^{\alpha x + \beta \tau} u_{xx} \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} 0 &= v_\tau - v_{xx} - (k_1 - 1)v_x + k_1 v \\ &= e^{\alpha x + \beta \tau} \{ \beta u + u_\tau - \alpha^2 u - 2\alpha u_x - u_{xx} - (k_1 - 1)(\alpha u + u_x) + k_1 u \} \end{aligned}$$

also

$$u_\tau = u_{xx} + (2\alpha + (k_1 - 1))u_x + (-\beta + \alpha^2 + \alpha(k_1 - 1) - k_1)u$$

Sinnigerweise wählen wir nun

$$\alpha := -\frac{k_1 - 1}{2}, \quad \beta := \frac{(k_1 - 1)^2}{4} - \frac{(k_1 - 1)^2}{2} - k_1 = -\frac{(k_1 + 1)^2}{4}$$

und damit erfüllt die Funktion

$$u(\tau, x) := e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x + \frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} v(\tau, x)$$

das folgende System:

$$\begin{aligned} u_\tau &= u_{xx}, & (\tau, x) &\in [0, \frac{1}{2}\sigma^2 T] \times \mathbb{R} \\ u(0, x) &= \max\left(e^{\frac{k_1+1}{2}x} - e^{\frac{k_1-1}{2}x}, 0\right) =: u_0(x), & x &\in \mathbb{R} \\ u(\tau, x)e^{-\frac{1}{2}(k_1-1)x} &\rightarrow 0, & x &\rightarrow -\infty & \tau &\in [0, \frac{1}{2}\sigma^2 T] \\ u(\tau, x)e^{-\frac{1}{2}(k_1-1)x} / e^{\frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} e^x &\rightarrow 1 & (x \rightarrow \infty) & \tau &\in [0, \frac{1}{2}\sigma^2 T] \end{aligned}$$

Nach dem vorigen Abschnitt ist aber

$$u(\tau, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\tau}} u_0(y) dy$$

eine Lösung zu obigem Problem mit

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \xi}} u(\tau, x) = u_0(\xi).$$

Mit $z := \frac{y-x}{\sqrt{2\tau}}$ folgt

$$u(\tau, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x + \sqrt{2\tau}z) e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Es gilt

$$u_0(x + \sqrt{2\tau}z) = \max\left(e^{\frac{k_1+1}{2}x + \frac{k_1+1}{2}\sqrt{2\tau}z} - e^{\frac{k_1-1}{2}x + \frac{k_1-1}{2}\sqrt{2\tau}z}, 0\right).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} u(\tau, x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1+1)(x+\sqrt{2\tau}z)} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1-1)(x+\sqrt{2\tau}z)} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1+1)(x+\sqrt{2\tau}z)} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}(z-\frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau})^2} dz \\
&= e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x + \frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho \\
&= e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x + \frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} N(d_1)
\end{aligned}$$

mit $d_1 := \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau}$ und $N(d_1) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_1}^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho$. Wir erhalten

$$u(\tau, x) = e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x + \frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x + \frac{1}{4}(k_1-1)^2\tau} N(d_2)$$

mit $d_2 := \frac{x}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2}(k_1-1)\sqrt{2\tau}$. Rückwärts ergibt sich nun

$$v(\tau, x) = e^x N(d_1) - e^{-k_1\tau} N(d_2)$$

und

$$V(t, x) = sN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$$

mit $d_{1,2} = \frac{\ln(\frac{s}{E}) + (r \pm \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$. □

d) Maximumprinzip

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit einem Maximumprinzip für parabolische Differentialoperatoren von der Form

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \partial_{x_i} u + c(t, x)u - u_t = f(t, x)$$

für $x \in \bar{\Omega}$, Ω Gebiet im \mathbb{R}^n , $t \in [0, T]$ beschäftigen. Sei $D := (0, T] \times \Omega$, $Q := (0, T) \times \Omega$, $\Sigma := [0, T] \times \partial\Omega \cup (\{0\} \times \Omega)$. Vorausgesetzt sei $a_{ij}, b_i, c \in C(\bar{D})$ und (a_{ij}) sei gleichmäßig positiv definit. Zunächst beweisen wir das schwache Maximumprinzip:

5.18 Satz. *Sei Ω beschränkt und $u \in C^2(\bar{Q})$ mit $Lu \geq 0$ in Q , sowie $c = 0$. Dann nimmt u sein Maximum auf Σ an.*

Beweis. (i) Sei $Lu > 0$ in Q . Wir beweisen, dass u sein Maximum nicht in Q annimmt. Sei dazu angenommen, dass u sein Maximum in $(t_0, x_0) \in Q$ annimmt. Offenbar gilt dann $u_t(t_0, x_0) = 0$ und $\partial_i u(t_0, x_0) = 0$. Weiter ist $(\partial_{x_i} \partial_{x_j} u(t_0, x_0))_{i,j}$ negativ semidefinit. Wegen der positiven Definitheit von $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ folgt damit

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t_0, x_0) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(t_0, x_0) \leq 0$$

und also folgt $Lu(t_0, x_0) \leq 0$, was aber im Widerspruch zur Voraussetzung steht.

(ii) Sei nun $Lu \geq 0$, $\varepsilon > 0$, $u_\varepsilon(t, x) := u(t, x) + \varepsilon e^{\gamma x_1}$, wobei die Konstante γ noch zu bestimmen ist. Es ist $Lu_\varepsilon = Lu + \varepsilon(\gamma^2 a_{11} + \gamma b_1) e^{\gamma x_1} > 0$ in Q , falls $\gamma = \gamma(a_{11}, b_1)$ groß genug ist. Nach (i) folgt

$$\max_{\bar{Q}} u_\varepsilon = \max_{\partial D} u_\varepsilon \implies \max_{\bar{D}} u = \max_{\partial D} u$$

(iii) Sei $Lu > 0$. Wir zeigen, dass u sein Maximum nicht auf $\{T\} \times \Omega$ annimmt. Es sei $x_0 \in \Omega$ mit $u(T, x_0) = \max_{y \in \Omega} u(T, y)$. Es folgt

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(T, x_0) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(T, x_0) + \sum_{i=1}^n b_i(T, x_0) \partial_{x_i} u(T, x_0) \leq 0$$

Ferner gilt $u_t(T, x_0) \geq 0$ und also folgt $Lu(T, x_0) \leq 0$ was nicht sein kann.

(iv) Sei $Lu \geq 0$, $\varepsilon > 0$, $u_\varepsilon(t, x) := u(t, x) + \varepsilon e^{-t}$. Es folgt $Lu_\varepsilon = Lu + \varepsilon e^{-t} > 0$. Wegen (i), (iii) folgt mit $\varepsilon \rightarrow 0$ die Behauptung. \square

5.19 Korollar. *Es sei $c = 0$, $Lu = Lv$, $u(0, x) = v(0, x)$, $u(t, x) = v(t, x)$ für $x \in \partial\Omega$. Dann gilt schon $u = v$.*

Es gilt auch das starke Maximumprinzip

5.20 Satz. *Gelte $Lu \geq 0$ und sei $M := \sup_D u$. Sei $u(t_0, x_0) = M$ für ein $(t_0, x_0) \in D$ und es gelte eine der folgenden Bedingungen:*

(i) $c = 0$

(ii) $c \leq 0$ und $M \geq 0$

(iii) $M = 0$

Dann gilt $u = M$ in $[0, t_0] \times \bar{\Omega}$.

6. Sobolevräume

6.1 Worum geht's? In diesem Abschnitt, welcher wieder Hintergrundwissen für die Theorie partieller Differentialgleichungen bereitstellt, werden die wichtigsten Funktionenräume für diese Theorie, nämlich die Sobolevräume, kurz vorgestellt. Diese stellen sich als guter Lösungsbegriff für alle Typen partieller Differentialgleichungen heraus. Es gibt viele verschiedene Zugänge zu Sobolevräumen, hier werden exemplarisch einige Zugänge besprochen. Grundlage ist wieder die Ableitung im Distributionssinne.

a) Sobolevräume mit natürlicher Differenzierbarkeitsordnung

Im folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $1 \leq p < \infty$.

Für eine Distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ schreiben wir

$$\partial^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

falls eine Funktion $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ existiert mit $\partial^\alpha u = [f]$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Hier ist $[f]$ wieder die zu f gehörige reguläre Distribution.

6.2 Definition (Sobolevräume). a) Zu $s \in \mathbb{N}_0$ definiere

$$W^{s,p}(\Omega) := \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad (0 \leq |\alpha| \leq s)\}.$$

Als Norm in $W^{s,p}(\Omega)$ definiert man

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \|u\|_{s,p,\Omega} := \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq s} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

b) Zu $s \in \mathbb{N}_0$ definiere $H^{s,p}(\Omega)$ als die Vervollständigung von $\{u \in C^s(\Omega) : \|u\|_{s,p,\Omega} < \infty\}$. Im Falle $p = 2$ schreiben wir auch $H^s(\Omega)$ statt $H^{s,2}(\Omega)$.

c) Zu $s \in \mathbb{N}_0$ definiere $H_0^{s,p}(\Omega)$ als den Abschluss von $C_c^\infty(\Omega)$ im Raum $H^{s,p}(\Omega)$.

6.3 Bemerkung. a) In der Definition von $W^{s,p}(\Omega)$ wird insbesondere $u \in L^p(\Omega)$ gefordert. Daher kann man auch schreiben

$$W^{s,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad (0 \leq |\alpha| \leq s)\}.$$

b) Die Vervollständigung eines metrischen Raums kann abstrakt definiert werden. Im Fall von $H^{s,p}(\Omega)$ ist aber wegen $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\cdot\|_{s,p,\Omega}$ offensichtlich $H^{s,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$,

d.h. ein Element der Vervollständigung kann mit einer Funktion in $L^p(\Omega)$ identifiziert werden.

c) Im Fall $p = 2$ erhält man das Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{W^{s,2}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq s} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

6.4 Lemma. Die Räume $H^{s,p}(\Omega)$ und $W^{s,p}(\Omega)$ sind Banachräume.

Beweis. Der Raum $H^{s,p}(\Omega)$ ist als Vervollständigung eines normierten Raumes ein Banachraum. Sei also $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W^{s,p}(\Omega)$ eine Cauchyfolge. Nach Definition der Norm ist für $0 \leq |\alpha| \leq s$ auch $(\partial^\alpha u_n)_n \subset L^p(\Omega)$ eine Cauchyfolge, daher existiert ein $u_\alpha \in L^p(\Omega)$ mit $\partial^\alpha u_n \rightarrow u_\alpha$ in $L^p(\Omega)$. Setze $u := u_{(0,\dots,0)}$.

Für die zugehörigen regulären Distributionen gilt mit der Hölder-Ungleichung für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\begin{aligned} |[\partial^\alpha u_n](\varphi) - [u_\alpha](\varphi)| &= \left| \int_{\Omega} (\partial^\alpha u_n - u_\alpha)(x) \varphi(x) dx \right| \\ &\leq \|\partial^\alpha u_n - u_\alpha\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist. Also gilt

$$\begin{aligned} (\partial^\alpha [u])(\varphi) &= (-1)^{|\alpha|} [u](\partial^\alpha \varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} [u_n](\partial^\alpha \varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\partial^\alpha u_n](\varphi) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\partial^\alpha u_n](\varphi) = [u_\alpha](\varphi) \end{aligned}$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Somit ist $\partial^\alpha u = u_\alpha$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$, d.h. $u \in W^{s,p}(\Omega)$.

Es folgt

$$\|u_n - u\|_{s,p,\Omega}^p \leq \sum_{0 \leq |\alpha| \leq s} \|\partial^\alpha u_n - \partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

also haben wir $u_n \rightarrow u$ in $W^{s,p}(\Omega)$, und $W^{s,p}(\Omega)$ ist ein Banachraum. \square

6.5 Lemma. Für $1 \leq p < \infty$ und $s \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$H^{s,p}(\Omega) \subset W^{s,p}(\Omega).$$

Beweis. Sei $u \in H^{s,p}(\Omega)$ und $(u_n)_n \subset C^s(\Omega)$ eine Cauchyfolge bzgl. $\|\cdot\|_{s,p,\Omega}$, welche gegen u konvergiert. Nach Definition der $\|\cdot\|_{s,p,\Omega}$ -Norm gilt wieder $\partial^\alpha u_n \rightarrow u_\alpha$ mit $u_\alpha \in L^p(\Omega)$. Wie im letzten Beweis sieht man $\partial^\alpha u = u_\alpha$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ und damit $u \in W^{s,p}(\Omega)$. \square

Tatsächlich sind die beiden Definitionen von Sobolevräumen für allgemeine Gebiete äquivalent. Der folgende Satz wurde erst 1964 bewiesen (während die ersten Definitionen bereits 1938 formuliert wurden).

6.6 Satz. Für $1 \leq p < \infty$ und $s \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$W^{s,p}(\Omega) = H^{s,p}(\Omega).$$

Beweisskizze. Wir müssen nur noch $W^{s,p}(\Omega) \subset H^{s,p}(\Omega)$ zeigen, d.h. zu zeigen ist, dass $C^m(\Omega) \cap H^{s,p}(\Omega)$ dicht in $W^{s,p}(\Omega)$ liegt. Unter Verwendung des Friedrichschen Glättungsoperators kann man sogar zeigen, dass

$$\{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \|\varphi\|_{s,p,\Omega} < \infty\}$$

dicht in $W^{s,p}(\Omega)$ liegt. Dies geschieht über eine kompakte Ausschöpfung von Ω und eine zugehörige Partition der Eins. Die Details sind z.B. im Buch von Adams [1] beschrieben. \square

Die Räume $H^{s,p}(\Omega)$ und $W^{s,p}(\Omega)$ sind typische Sobolevräume, benannt nach Sergei L'vovich Sobolev (6.10.1908 - 3.1.1980). Wir gehen jetzt noch kurz auf den Raum $H_0^{s,p}(\Omega)$ ein, wobei wir uns auf $p = 2$ beschränken. Im folgenden bezeichne

$$\langle u, v \rangle_2 := \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx$$

das L^2 -Skalarprodukt. Für vektorwertige Abbildungen $F, G \in L^2(\Omega)^n := L^2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ wird ebenfalls die Bezeichnung $\langle F, G \rangle_2 := \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n F_i(x) \overline{G_i(x)} dx$ verwendet. Für $F \in C^1(\Omega)^n$ war $\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} F_i$ die Divergenz.

Analog zur Definition von $W^{s,p}(\Omega)$ betrachtet man

$$W_0^{1,2}(\Omega) := \{u \in H^{1,2}(\Omega) : \forall F \in (L^2(\Omega))^n, \operatorname{div} F \in L^2(\Omega) : \langle u, \operatorname{div} F \rangle_2 = -\langle \nabla u, F \rangle_2\}.$$

Der Raum $W_0^{1,2}(\Omega)$ verallgemeinert die Bedingung $u|_{\partial\Omega} = 0$. Ist nämlich $\partial\Omega$ glatt und u ebenfalls glatt, so können wir zunächst

$$0 = \int_{\Omega} u \overline{\operatorname{div} F} dx + \int_{\Omega} \nabla u \overline{F} dx = \int_{\partial\Omega} u \langle n, \overline{F} \rangle dS(x) \quad (F \in C^1(\overline{\Omega}))$$

und somit $u|_{\partial\Omega} = 0$ schließen.

6.7 Satz. Es gilt $H_0^{1,2}(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

Beweis. (i) Zu $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ existiert nach Definition eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(G)$ mit $u_n \rightarrow u$ bezüglich der $H^{1,2}$ -Norm. Es ergibt sich für alle $F \in (L^2(\Omega))^n$ mit $\operatorname{div} F \in L^2(G)$:

$$\langle u, \operatorname{div} F \rangle_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, \operatorname{div} F \rangle_2 = - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \nabla u_n, F \rangle_2 = - \langle \nabla u, F \rangle_2,$$

d.h. es gilt $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Hier wurde die Hölder-Ungleichung für $p = 2$ in der Form

$$|\langle (u - u_n), \operatorname{div} F \rangle_2| \leq \|u - u_n\|_2 \cdot \|\operatorname{div} F\|_2$$

verwendet.

(ii) Zunächst ist offensichtlich, dass $W_0^{1,2}(\Omega)$ ein Hilbertraum mit dem $H^{1,2}$ -Skalarprodukt ist. Weiter ist nun $H_0^{1,2}(\Omega)$ ein abgeschlossener Unterraum. Wir werden zeigen, dass das orthogonale Komplement

$$(H_0^{1,2}(\Omega))^\perp := \{u \in W_0^{1,2}(\Omega) : \langle u, \varphi \rangle_{W^{1,2}(\Omega)} = 0 \quad (\varphi \in H_0^{1,2}(\Omega))\}$$

nur aus der Null besteht. Da der Raum $W_0^{1,2}(\Omega)$ in der Form $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^{1,2}(\Omega) \oplus (H_0^{1,2}(\Omega))^\perp$ direkt zerlegt werden kann, folgt daraus die Behauptung.

Sei also $u \in (H_0^{1,2}(\Omega))^\perp$. Offenbar gilt dann für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle u, \varphi \rangle_{W^{1,2}(\Omega)} = \langle u, \varphi \rangle_2 + \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_2 = 0.$$

Damit gilt

$$(\Delta[u])(\varphi) = \operatorname{div}[\nabla u](\varphi) = - \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle = [u](\varphi) \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)),$$

d.h. $\Delta u = u \in L^2(\Omega)$. Daraus folgt nun wiederum

$$0 \leq \|u\|_2^2 = \langle u, u \rangle_2 = \langle u, \Delta u \rangle_2 = - \langle \nabla u, \nabla u \rangle_2 = -\|\nabla u\|_2^2 \leq 0$$

also $u = 0$ und das war zu zeigen. □

b) Sobolevräume mit reeller Differenzierbarkeitsordnung

Im Falle $\Omega = \mathbb{R}^n$ kann man relativ einfach Sobolevräume mit reeller Differenzierbarkeitsordnung definieren. Wir beschränken uns auf den Fall $p = 2$ und verwenden die Fourier-Transformation. Dazu zunächst noch ein Nachtrag zum Zusammenhang zwischen $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

6.8 Bemerkung. Für hinreichend oft differenzierbare Funktionen gilt die Leibnizformel

$$D^\alpha(f \cdot \varphi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^{\alpha-\beta} f)(D^\beta \varphi).$$

Dabei ist $\beta \leq \alpha$ komponentenweise zu verstehen. Dies sieht man durch Ausschreiben und Anwenden der Produktregel.

6.9 Satz. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi(x) = 1$ für $|x| \leq 1$. Setze $f_r(x) := f(x)\psi(rx)$ ($x \in \mathbb{R}^n, r > 0$). Dann ist $f_r \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Für ein Polynom P und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt (wieder unter Verwendung der Leibniz-Formel)

$$\begin{aligned} P(x)D^\alpha(f - f_r)(x) &= P(x)D^\alpha(f(x)(1 - \psi(rx))) \\ &= P(x) \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^{\alpha-\beta} f)(x) r^{|\beta|} [D^\beta(1 - \psi)](rx) \end{aligned}$$

Es gilt $D^\beta[1 - \psi(rx)] = 0$ für $|rx| \leq 1$. Wegen $P(x)(D^{\alpha-\beta} f)(x) \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$ (gleichmäßige Konvergenz) folgt damit $P(x)D^\alpha(f - f_r)(x) \rightarrow 0$ bezüglich gleichmäßiger Konvergenz, d.h. es gilt $f_r \rightarrow f$ ($r \rightarrow 0$) in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. \square

6.10 Satz. Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und P ein Polynom, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist jede der drei Abbildungen $f \mapsto P \cdot f$, $f \mapsto g \cdot f$ und $f \mapsto D^\alpha f$ stetige lineare Abbildungen von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Dass die Funktionen $D^\alpha f$, $P \cdot f$ und $g \cdot f$ wieder in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ liegen, folgt sofort aus der Leibniz-Formel. Die Stetigkeit folgt durch direktes Nachrechnen der Folgenstetigkeit. \square

6.11 Bemerkung. a) Die Adjungierte der Abbildung $i: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ aus Bemerkung 5.7 b) ist wohldefiniert und injektiv. Diese ist gegeben durch

$$i' : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), u \mapsto u|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}.$$

Es gilt $i'(u) = u \circ i$. Nach Satz Bemerkung 5.7 b) ist i stetig, d.h. $i'(u) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Da $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nach Satz 6.9 dicht ist, ist $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ schon durch die Werte auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ festgelegt, d.h. i' ist injektiv.

b) Unter Verwendung der Identifizierung $i': \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ besteht $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ aus allen Distributionen $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, die sogar bzgl. der Topologie von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ stetig sind. Da die Topologie von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ eine Wachstumsbedingung beinhaltet, spricht man auch von temperierten Distributionen. Genau diejenigen Distributionen $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ sind temperiert, die eine stetige Fortsetzung auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ besitzen.

c) Damit sind auch $D^\alpha u$ und $f \cdot u$ für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ für $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definiert. Für $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt

$$\begin{aligned} D^\alpha u &\in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \\ P \cdot u &\in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \text{falls } P \text{ ein Polynom ist,} \end{aligned}$$

$$f \cdot u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \text{falls } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Dies folgt direkt aus der Stetigkeit der entsprechenden Abbildungen $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (Satz 6.10).

6.12 Bemerkung. Für $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ folgt

$$\mathcal{F}(D^\alpha u) = i^{|\alpha|} x^\alpha \mathcal{F}u \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

6.13 Lemma. Sei $s \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \mathcal{F}^{-1}(1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

und die Norm $\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$ ist zur Norm

$$\|u\|_s^\sim := \|\mathcal{F}^{-1}(1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

äquivalent.

Beweis. Übung. □

6.14 Definition (Sobolevräume mit reeller Ableitungsordnung). Für $s \in \mathbb{R}$ sei

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \mathcal{F}^{-1}(1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

der (L^2 -)Sobolevraum der Ordnung s . Die Norm $\|\cdot\|_{H^s}$ ist definiert durch

$$\|u\|_{H^s} := \|\mathcal{F}^{-1}(1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

6.15 Bemerkung. a) Für $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ gilt $(1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und damit $\mathcal{F}u \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Damit ist $\mathcal{F}u$ auch für $s < 0$ eine Funktion.

b) Nach Definition gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{R}^n) &= L^2(\mathbb{R}^n), \\ H^s(\mathbb{R}^n) &\subset L^2(\mathbb{R}^n) \quad (s \geq 0), \\ H^s(\mathbb{R}^n) &\subset H^t(\mathbb{R}^n) \quad (s \geq t). \end{aligned}$$

6.16 Satz (Lösbarkeit elliptischer Gleichungen). Für jedes $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ besitzt die elliptische Gleichung

$$(-\Delta + 1)u = f$$

genau eine Lösung

$$u \in H^2(\mathbb{R}^n),$$

und es gilt die zweiseitige a priori-Abschätzung

$$C_1 \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Somit ist der Operator

$$-\Delta + 1: H^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

ein Isomorphismus von Sobolevräumen.

Beweis. (i) Definiere $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ durch

$$u := \mathcal{F}^{-1} \frac{1}{1 + |\xi|^2} \mathcal{F} f.$$

Dann gilt

$$\|u\|_{H^2} = \|\mathcal{F}^{-1}(1 + |\xi|^2)\mathcal{F}u\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} < \infty,$$

d.h. es ist $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$. Weiter ist

$$(-\Delta + 1)u = \mathcal{F}^{-1}(1 + |\xi|^2)\mathcal{F}u = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = f,$$

d.h. u ist eine Lösung der Gleichung.

(ii) Andererseits gilt für jede Lösung $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ der Gleichung auch $\mathcal{F}u = (1 + |\xi|^2)\mathcal{F}f$, d.h. die Lösung ist eindeutig und durch obige Formel gegeben.

(iii) Die a priori-Abschätzung wurde oben bereits gezeigt. \square

c) Wichtige Sätze aus der Theorie der Sobolevräume

Die folgenden Ergebnisse aus der Theorie der Sobolevräume werden nicht bewiesen.

6.17 Satz (Sobolevscher Einbettungssatz). Seien $s \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p < \infty$, und sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Gebiet.

Falls $s > \frac{n}{p} + k$, dann gilt

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^k(\Omega).$$

Weiter existiert ein $C > 0$ so dass für alle $u \in W^{s,p}(\Omega)$ die Abschätzung

$$\|u\|_{C_b^k(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

gilt.

6.18 Definition. Seien X und Y normierte Räume und $K : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Man spricht davon, dass K kompakt ist, falls für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X , welche dort beschränkt ist gilt: $(Kx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt in Y eine konvergente Teilfolge.

6.19 Definition. Sei $G \subset \mathbb{R}^d$.

(i) Für eine beliebige Indexmenge I sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von G . Sie heißt lokal-endlich, falls gilt:

$$\forall x \in G : \exists \varepsilon > 0 : \#\{U_i : U_i \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset, i \in I\} < \infty$$

(ii) G besitzt die Segmenteigenschaft genau dann wenn es eine lokal endliche offene Überdeckung $\{U_i, i \in I\}$ des Randes ∂G mit

$$\forall i \in I : \exists \xi_i \in \mathbb{R}^d : \forall \alpha \in U_i \cap \overline{G} \forall t \in (0, 1) : x + t\xi_i \in G$$

gibt.

6.20 Satz (Rellich-Kondrachov). a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Sei $1 \leq p < \infty$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann ist die Einbettung

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

kompakt.

b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, welches die Segmenteigenschaft besitzt. Für $1 \leq p < \infty$ und $m \in \mathbb{N}$ ist die Einbettung

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

kompakt.

c) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, welches die Segmenteigenschaft besitzt. Für $1 \leq p < \infty$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $mp > n$ ist die Einbettung

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b(\overline{\Omega})$$

kompakt.

Die folgende Ungleichung ist sehr wichtig, um Abschätzungen beweisen zu können.

6.21 Satz (Erste Poincarésche Ungleichung). Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, welches in eine Richtung beschränkt ist. Dann existiert eine Konstante $d > 0$ so, dass

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq d \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n} \quad (u \in H_0^1(\Omega)).$$

Damit ist durch

$$|u|_{H^1(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|=1} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

auf $H_0^1(\Omega)$ eine Norm gegeben, welche zur Norm $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ äquivalent ist.

Beweis. Übung. □

6.22 Satz (Zweite Poincarésche Ungleichung). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Segmenteigenschaft. Dann existiert ein $c > 0$ mit

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n} + \left| \int_{\Omega} u(x) dx \right| \right) \quad (u \in H^1(\Omega)).$$

Damit ist durch

$$\|u\|_{H_*^1(\Omega)} := \left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + |\langle u, 1 \rangle_{L^2(\Omega)}|^2 \right)^{1/2}$$

eine Norm auf $H^1(\Omega)$ gegeben, welche zur Norm $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ äquivalent ist.

Beweis. Wir nehmen an, dass eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H^1(\Omega)$ existiert mit $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$ und

$$\|\nabla u_n\|_{L^2} + |\langle u_n, 1 \rangle_{L^2(\Omega)}| < \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Nach dem Satz von Rellich-Kondrachov existiert eine Teilfolge $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die etwa gegen $u_0 \in L^2(\Omega)$ konvergiert. Wegen $\|\nabla \tilde{u}_n\|_{L^2} \rightarrow 0$ folgt, dass $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H^1(\Omega)$ eine Cauchyfolge ist. Da $H^1(\Omega)$ vollständig ist, existiert ein $\bar{u}_0 \in H^1(\Omega)$ mit $\|\tilde{u}_n - \bar{u}_0\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$. Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes ist $u_0 = \bar{u}_0$. Wegen $\langle \tilde{u}_n, 1 \rangle \rightarrow 0$ folgt $\langle u_0, 1 \rangle = 0$. Andererseits gilt $\nabla u_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \nabla \tilde{u}_n = 0$, also $u_0 = \text{const.}$ Insgesamt folgt also $u_0 = 0$ was im Widerspruch zu

$$\|u_0\|_{L^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{u}_n\|_{L^2} = 1$$

steht. □

7. Hyperbolische Theorie I: Wellengleichungen

7.1 Worum geht's? Als weitere wichtige Klasse partieller Differentialgleichungen werden in diesem Abschnitt hyperbolische Gleichungen besprochen. Der Mustervertreter ist die Wellengleichung, wir werden aber etwas allgemeiner lineare symmetrisch-hyperbolische Systeme betrachten. Zunächst wird ein elementarer Zugang gewählt, bei welchem insbesondere Energieabschätzungen bewiesen werden. Im Rahmen der Sobolevräume können unter Verwendung dieser Abschätzungen dann auch Existenzbeweise geführt werden. Der wesentliche Schritt zum Beweis der Existenz einer Lösung ist die Approximation durch analytische Funktionen und die Anwendung des Satzes von Cauchy-Kovalevskaya.

a) Energieabschätzungen

7.2 Beispiel (d'Alembertsche Formel). Im hyperbolischen Fall sind Anfangswertaufgaben typisch. Als Beispiel betrachten wir das Problem:

$$\left\{ \begin{array}{l} -u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ in } G = \mathbb{R}^2 \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ \partial u(x, 0) = u_1(x) \end{array} \right\}$$

Zunächst nehmen wir eine Variablentransformation vor. Wir setzen $\zeta := x + y$ und $\eta := x - y$ bzw. $x = \frac{\zeta + \eta}{2}$ und $y = \frac{\zeta - \eta}{2}$. Weiter sei $\bar{u}(\zeta, \eta) := u(\frac{\zeta + \eta}{2}, \frac{\zeta - \eta}{2})$, dann ergibt sich für die quadratischen partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (\bar{u}_\zeta \zeta_x + \bar{u}_\eta \eta_x)_x = (\bar{u}_\zeta + \bar{u}_\eta)_x = \bar{u}_{\zeta\zeta} + 2\bar{u}_{\zeta\eta} + \bar{u}_{\eta\eta} \\ u_{yy} &= (\bar{u}_\zeta \zeta_y + \bar{u}_\eta \eta_y)_y = (\bar{u}_\zeta - \bar{u}_\eta)_y = \bar{u}_{\zeta\zeta} - 2\bar{u}_{\zeta\eta} + \bar{u}_{\eta\eta} \end{aligned}$$

Mithilfe der Differentialgleichung erhält man $\bar{u}_{\zeta\eta} = 0$. Damit ist klar, dass für geeignete Funktionen f und g

$$\bar{u}(\zeta, \eta) = f(\zeta) + g(\eta)$$

gilt. Durch Rücktransformation ergibt sich nun unmittelbar

$$u(x, y) = f(x + y) + g(x - y).$$

Unser Ziel ist natürlich, die Funktionen f und g explizit anzugeben. Das ist unter Verwendung der Anfangsbedingungen auch tatsächlich möglich. Es soll ja $u(x, 0) = f(x) + g(x) = u_0(x)$ und $\partial_y u(x, 0) = f'(x) - g'(x) = u_1(x)$ gelten. Aus der zweiten Bedingung folgern wir zunächst durch Integration $f(x) - g(x) = \int_{x_0}^x u_1(s) ds + k$ und erhalten dann:

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \left\{ u_0(x + y) + k + \int_{x_0}^{x+y} u_1(s) ds \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left. u_0(x-y) - k - \int_{x_0}^{x_0-y} u_1(s) ds \right\} \\
& = \frac{1}{2} \left\{ u_0(x+y) + u_0(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} u_1(s) ds \right\}.
\end{aligned}$$

Diese „Lösungsformel“ wird auch als d'Alembertsche³ Formel bezeichnet. Bei dieser Formel ist die Beziehung zwischen Daten und Lösung schön zu erkennen.

Die klassische Wellengleichung in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$y_{tt} - \Delta y = 0 \quad (t \in \mathbb{R}, x \in \Omega).$$

Im Fall $n = 1$, $\Omega = (0, l)$ beschreibt diese Gleichung eine ungedämpfte, schwingende Saite der Länge l . Im Fall $n = 2$ wird das Verhalten einer Membran beschrieben und im Fall $n = 3$ wird eine Luftsäule modelliert.

Etwas allgemeiner betrachtet man skalare hyperbolische Gleichungen zweiter Ordnung. Gesucht ist eine Funktion $v = v(t, x)$, die für $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ das folgende Anfangswertproblem löst.

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 v &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \partial_i \partial_j v + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \partial_i v + c(t, x) \partial_t v + d(t, x) v \\
& \qquad \qquad \qquad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n
\end{aligned} \tag{7-1}$$

$$v(0, x) = v_0(x), v_t(0, x) = v_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Hierbei ist $(a_{ij})_{i,j}$ eine symmetrische, positiv definite $n \times n$ -Matrix. Derartige hyperbolische Gleichungen sind Spezialfälle von linearen symmetrisch-hyperbolischen Systemen.

7.3 Definition. Ein lineares symmetrisch-hyperbolisches System hat die Form

$$\begin{aligned}
Lu &\equiv A^0(t, x) \partial_t u + \sum_{j=1}^n A^j(t, x) \partial_j u + B(t, x) u = f(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\
u(0, x) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned} \tag{7-2}$$

Hierbei sind A^0, A^1, \dots, A^n, B von t und x abhängige symmetrische $N \times N$ -Matrizen mit komplexen Einträgen. Weiter sei A^0 gleichmäßig positiv definit. Genauer gelte

$$A^0, A^1, \dots, A^n \in C_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^{N \times N}), \quad B \in C_b(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^{N \times N}).$$

Es sei

$$a_0 := \inf_{\substack{v \in \mathbb{C}^N, |v|=1, \\ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n}} \langle A^0(t, x) v, v \rangle > 0$$

und

$$a_1 := \sup_{\substack{v \in \mathbb{C}^N, |v|=1, \\ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, j=1 \dots n}} |\langle A^j(t, x) v, v \rangle| < \infty.$$

³Jean Baptiste Le Rond d'Alembert, 16.11.1717 - 29.10.1783

7.4 Bemerkung. Die Gleichung (7-1) kann in die Form (7-2) gebracht werden mittels der folgenden Transformation

$$\begin{aligned} u_1 &:= \partial_1 v, \\ &\vdots \\ u_n &:= \partial_n v, \\ u_{n+1} &:= \partial_t v, \\ u_{n+2} &:= v. \end{aligned}$$

Damit ist $N = n + 2$ und

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij}(t, x) \partial_t u_j - \sum_{j=1}^n a_{ij}(t, x) \partial_j u_{n+1} &= 0 \quad (i = 1, \dots, n), \\ \partial_t u_{n+1} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \partial_j u_i - \sum_{i=1}^n b_i(t, x) u_i - c(t, x) u_{n+1} - d(t, x) u_{n+2} &= 0, \\ \partial_t u_{n+2} - u_{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

also $Lu = 0$, wobei L von der Form (7-2) ist und

$$A^0 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^j = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_{1j} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -a_{nj} & 0 \\ -a_{1j} & \cdots & -a_{nj} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dabei sieht man sofort, dass A^0 symmetrisch und positiv definit ist. Weiter erkennt man die Symmetrie der A^j ($j = 1 \dots n$). Schließlich ist

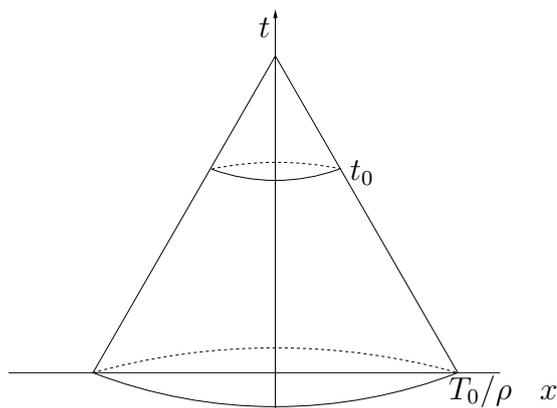
$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -b_1 & \cdots & -b_n & -c & -d \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_0 = \begin{pmatrix} \partial_1 v_0 \\ \vdots \\ \partial_n v_0 \\ v_1 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Für unsere weiteren Argumentationen benötigen wir das folgende auf Gronwall⁴ zurückgehende Lemma

7.5 Lemma (Lemma von Gronwall). *Es seien $a > 0$ und $\varphi, h \in C([0, a], \mathbb{R})$, $h \geq 0$, $g : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend und es gelte für alle $t \in [0, a]$:*

$$\varphi(t) \leq g(t) + \int_0^t h(r) \varphi(r) dr$$

⁴Thomas Hakon Gronwall (orig. Hakon Tomi Grönwall), 16.01.1877 - 09.05.1932

Abbildung 6: Der Kegel K^ρ im Fall $n = 2$

Dann folgt

$$\forall t \in [0, a] : \quad \varphi(t) \leq g(t)e^{\int_0^t h(r)dr}$$

Wir betrachten wieder Systeme von der Form (7-2), wobei die Matrizen A^0, \dots, A^n symmetrisch und A^0 positiv definit seien. Sei nun $\rho := \frac{a_0}{na_1}$ und $K^\rho = K^\rho(t_0)$ der abgeschnittene Kegel (Abb. 6)

$$K^\rho := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : x \in K_t, 0 \leq t \leq t_0\} \quad (7-3)$$

mit

$$K_s := B\left(0, \frac{T_0 - s}{\rho}\right) \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq s \leq T_0$$

Der Rand ∂K^ρ von K^ρ besteht nun aus drei Teilen. Dem Mantel M , dem Boden $\{0\} \times K_0$ sowie dem Deckel $\{t_0\} \times K_{t_0}$. Unser Ziel ist es nun, eine Funktion $u(t, \cdot)$ durch u_0 und f abzuschätzen. Wir geben zunächst ein Beispiel für eine sogenannte a priori Abschätzung.

7.6 Beispiel. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Wir betrachten das folgende Anfangsrandwertproblem für die Wellengleichung.

$$\begin{aligned} y_{tt} - \Delta y &= f, & (t, x) &\in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ y(0) &= y_0, y_t(0) &= y_1, & x \in \Omega \\ y|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

Multiplikation der Differentialgleichung mit y_t ergibt nach Integration

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} y_{tt}y_t - \Delta y y_t dx = \int_{\Omega} f y_t dx \\ \Rightarrow &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} y_t^2 dx + \int_{\Omega} \nabla y \nabla y_t dx = \int_{\Omega} f y_t dx \\ \Rightarrow &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} y_t^2 + |\nabla y|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} y_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} f^2 dx \end{aligned}$$

Definieren wir $E(t) := \int_{\Omega} y_t^2 + |\nabla y|^2 dx$, so ergibt sich aus dem obigen unter Verwendung des Lemmas von Gronwall

$$E(t) \leq \left(E(0) + \int_0^t \int_{\Omega} f^2 dx ds \right) e^t$$

Das heißt, dass wir eine Funktion, die das Problem löst gegen die Anfangswerte und die Inhomogenität abschätzen können.

Nun wollen wir in Analogie zu dem Vorgehen in obigem Beispiel eine Abschätzung für

$$\int_{K^{\rho}} \langle Lu(t, x), u(t, x) \rangle d(t, x)$$

finden. Es wird sich im folgenden zeigen, dass der Mantel M von K^{ρ} „raumartig“ für L ist. Wir definieren

$$|u(t, \cdot)|_{K_t} := \left(\int_{K_t} A^0(t, x) u(t, x) \overline{u(t, x)} dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Offenbar gilt mit einem gewissen $\tilde{a}_0 > 0$

$$a_0 \|u(t, \cdot)\|_{L^2(K_t)}^2 \leq |u(t, \cdot)|_{K_t}^2 \leq \tilde{a}_0 \|u(t, \cdot)\|_{L^2(K_t)}^2 \quad (t \in [0, T_0]).$$

7.7 Satz (Energieabschätzung). Sei $T_0 > 0$. Der Kegel $K^{\rho} = K^{\rho}(T_0)$ sei wie in (7-3) definiert, und es seien $f \in C(K^{\rho}, \mathbb{C}^N)$ und $u_0 \in C(K_0, \mathbb{C}^N)$ gegeben. Falls $u \in C^1(K^{\rho}, \mathbb{C}^N)$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} Lu(t, x) &= f(t, x) \quad ((t, x) \in K^{\rho}), \\ u(0, x) &= u_0(x) \quad (x \in K_0) \end{aligned}$$

ist, so existiert eine Konstante $c > 0$, welche nur von der Norm

$$\|(A^0, \partial_t A^0, \partial_1 A^1, \dots, \partial_n A^n, B)\|_{C(K^{\rho}(T_0))}$$

abhängt, so dass

$$|u(t, \cdot)|_{K_t} \leq c \left[|u_0|_{K_0} + \left(\int_0^{T_0} |f(r, \cdot)|_{K_r}^2 dr \right)^{\frac{1}{2}} \right] e^{ct} \quad (t \in [0, T_0]).$$

Beweis. Wir nehmen auf beiden Seiten der Gleichung $Lu = f$ das Skalarprodukt mit u und betrachten den Realteil. Es gilt

$$\operatorname{Re} \langle Lu, u \rangle = \operatorname{Re} \left\langle A^0 u_t + \sum_{j=1}^n A^j \partial_j u + Bu, u \right\rangle = \operatorname{Re} \langle f, u \rangle.$$

Wir verwenden nun

$$\partial_t \langle A^0 u, u \rangle = 2 \operatorname{Re} \langle A^0 u_t, u \rangle + \langle (\partial_t A^0) u, u \rangle$$

und die analoge Aussage für $\partial_j \langle A^j u, u \rangle$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle Lu, u \rangle &= \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \partial_t \langle A^0 u, u \rangle - \frac{1}{2} \langle (\partial_t A^0) u, u \rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \partial_j \langle A^j u, u \rangle - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \langle (\partial_j A^j) u, u \rangle + \langle Bu, u \rangle \right]. \end{aligned}$$

Definiere nun

$$H := \partial_t A^0 + \sum_{j=1}^n \partial_j A^j - 2B.$$

Dann kann die letzte Gleichung geschrieben werden als

$$\operatorname{div}_t \begin{pmatrix} \langle A^0 u, u \rangle \\ \langle A^1 u, u \rangle \\ \vdots \\ \langle A^n u, u \rangle \end{pmatrix} = \operatorname{Re} \left(\langle Hu, u \rangle + 2 \langle f, u \rangle \right).$$

Hier ist $\operatorname{div}_t u := \partial_t u_0 + \partial_1 u_1 + \dots + \partial_n u_n$.

Sei $t_0 \in (0, T_0)$. Integration über $K^\rho(t_0)$ unter Verwendung des Integralsatzes von Gauss liefert nun

$$\int_{K^\rho(t_0)} \left(\operatorname{Re} \langle Hu, u \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle f, u \rangle \right) dx = \int_{\partial K^\rho(t_0)} \left(n_0 \langle A^0 u, u \rangle + \sum_{j=1}^n n_j \langle A^j u, u \rangle \right) dS(x).$$

hierbei ist $n = (n_0, n_1, \dots, n_n)$ die äussere Normale an $\partial K^\rho(t_0)$. Im Einzelnen hat der Normalenvektor auf $\{0\} \times K_0$ die Gestalt $n = (-1, 0, \dots, 0)$, auf $\{t_0\} \times K_{t_0}$ hat er die Gestalt $n = (1, 0, \dots, 0)$. Der Mantel M kann wie folgt parametrisiert werden

$$M = \{(t, x) : t = \gamma(x) := T_0 - \rho|x|, x \in K_0, 0 \leq t \leq t_0\}$$

Daraus folgt, dass der Normalenvektor auf M die Gestalt $n = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}} \left(1, \frac{\rho x}{|x|} \right)$ hat. Einsetzen liefert nun

$$\begin{aligned} \int_{K^\rho} \operatorname{Re} \left(\langle Hu, u \rangle + 2 \langle f, u \rangle \right) d(t, x) &= \int_{K_{t_0}} \langle A^0(t_0, x) u(t_0, x), u(t_0, x) \rangle dx \\ &\quad - \int_{K_0} \langle A^0(0, x) u_0(x), u_0(x) \rangle dx \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}} \int_M \left(\langle A^0 u, u \rangle - \sum_{j=1}^n (\partial_j \gamma) \langle A^j u, u \rangle \right) d(t, x). \end{aligned} \quad (7-4)$$

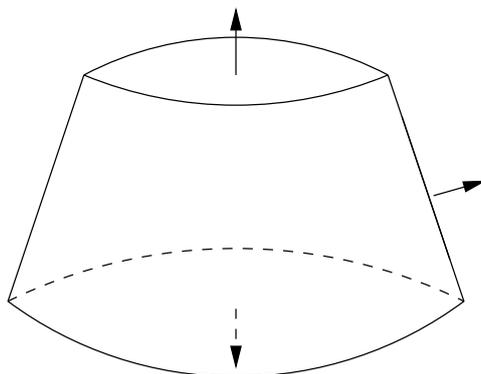


Abbildung 7: Normalenvektoren auf den verschiedenen Bereichen der Oberfläche des Kegelstumpfs

Nach Definition von γ und ρ folgt nun

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n (\partial_j \gamma) \langle A^j u, u \rangle \right| &\leq \sum_{j=1}^n |\partial_j \gamma| a_1 |u|^2 \leq n |\nabla \gamma| a_1 |u|^2 = \rho n a_1 |u|^2 \\ &= a_0 |u|^2 \leq \langle A^0 u, u \rangle \end{aligned}$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned} |u(t_0)|_{K_{t_0}}^2 &\leq |u_0|_{K_0}^2 + \int_0^{t_0} \int_{K_r} \langle Hu, u \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle f, u \rangle dx dr \\ &\leq |u_0|_{K_0}^2 + \int_0^{t_0} \int_{K_r} (|\langle Hu, u \rangle| + 2|\langle f, u \rangle|) dx dr \\ &\leq |u_0|_{K_0}^2 + c \int_0^{t_0} \int_{K_r} (|u|^2 + 2|f| \cdot |u|) dx dr \\ &\leq |u_0|_{K_0}^2 + c \int_0^{t_0} (|u| + |f|)^2 dx dr \\ &\leq |u_0|_{K_0}^2 + 2c \int_0^{t_0} \int_{K_r} (|u|^2 + |f|^2) dx dr \\ &\leq |u_0|_{K_0}^2 + C \int_0^{t_0} |u(r, \cdot)|_{K_r}^2 dr + c \int_0^{t_0} |f(r, \cdot)|_{K_r}^2 dr \end{aligned}$$

mit Konstanten $C, c > 0$. Die Behauptung folgt nun aus dem Lemma von Gronwall. \square

7.8 Bemerkung. Man sieht an obigem Beweis, dass der entscheidende Schritt darin liegt, dass der Integrand in (7-4) punktweise nichtnegativ ist. Als Funktion von u ist damit das Integral positiv semidefinit. Man nennt die Mantelfläche des Kegelstumpfes K^ρ raumartig (für den Differentialoperator L), falls der Integrand punktweise nichtnegativ ist.

Bei Verkleinerung von ρ wird der Integrand größer, wie man an der Darstellung des Normalenvektors sieht. Damit gilt: Für einen Kegelstumpf K^δ mit $\delta < \rho$ ist die Mantelfläche ebenfalls raumartig (der Integrand ist sogar an jeder Stelle positiv). Ändert man die Koeffizienten von L geringfügig, so bleibt der Integrand positiv, d.h. die Mantelfläche raumartig.

Energieabschätzungen gelten auch für höhere Normen. Wir definieren für $s \in \mathbb{N}_0$

$$|u(t)|_{s, K_t} := \left(\sum_{|\alpha| \leq s} |\partial^\alpha u(t)|_{K_t}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

7.9 Satz. *Es seien $s \in \mathbb{N}$ und $A^0, A^1, \dots, A^n, B \in C_b^s(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^{N \times N})$. Weiter sei $f \in C^s(K^\rho(T_0), \mathbb{C}^N)$ und $u_0 \in C^s(K_0, \mathbb{C}^N)$. Falls $u \in C^{s+1}(K^\rho(T_0), \mathbb{C}^N)$ eine Lösung von*

$$\begin{aligned} Lu(t, x) &= f(t, x) \quad ((t, x) \in K^\rho), \\ u(0, x) &= u_0(x) \quad (x \in K_0) \end{aligned}$$

ist, dann existiert eine Konstante

$$c = c(\|(A^0, A^1, \dots, A^n, B)\|_{C^s(K^\rho(T_0))}) > 0$$

so, dass für alle $t \in [0, T_0]$

$$|u(t, \cdot)|_{s, K_t} \leq c \left[|u_0|_{s, K_0} + \left(\int_0^t |f(r, \cdot)|_{s, K_r}^2 dr \right)^{\frac{1}{2}} \right] e^{ct}$$

Beweis. Es erfüllt $V := (u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u)$ die Differentialgleichung

$$\mathcal{A}^0 V_t + \sum_{j=1}^n \mathcal{A}^j \partial_j V + \mathcal{B}V = \mathcal{F} \quad V(t=0) = V_0$$

mit

$$\mathcal{A}^0 = \begin{pmatrix} A^0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A^0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}^j = \begin{pmatrix} A_1^j & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_n^j \end{pmatrix}$$

weiter ist \mathcal{F} eine von $f, \partial_1 f, \dots, \partial_n f$ abhängige Funktion und $V_0 = (u_0, \partial_1 u_0, \dots, \partial_n u_0)$. Anwendung des vorigen Satzes liefert eine Abschätzung für V und somit die für u für den Fall $s = 1$. Bei $s > 1$ geht man analog vor. \square

Die a priori Abschätzungen in den vorigen Sätzen implizieren die für hyperbolische Gleichungen typische sog. endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit (Abb. 8). Für $f \equiv 0$ hängt $u(t)$ in K_t im Wesentlichen nur von den Werten von u_0 in K_0 ab. Hat u_0 kompakten Träger, so auch $u(t)$ für jedes $t \geq 0$. Im Gegensatz dazu hatten wir bei parabolischen Gleichungen unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit.

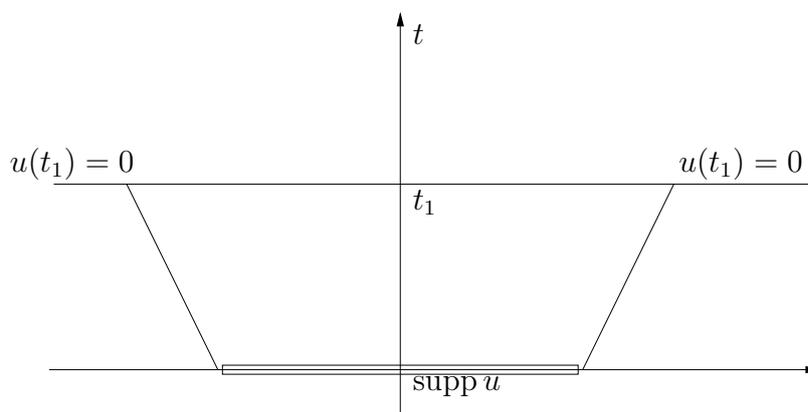


Abbildung 8: Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit

b) Sobolevraumtheorie: Ein globaler Existenzsatz

Wir betrachten wieder lineare symmetrisch-hyperbolische Systeme von der Form (7-2) und wollen nun die Existenz der Lösung in geeigneten Sobolevräumen beweisen.

7.10 Lemma. *Sei $T > 0$. Die Koeffizienten des linearen symmetrisch-hyperbolischen Systems (7-2) seien reell-analytisch im Bereich $(t, x) \in [0, T] \times B(0, b)$ mit $b > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ (welches nicht von μ und P abhängt) so, dass*

$$\begin{aligned} Lu := A^0(t, x)\partial_t u + \sum_{j=1}^n A^j(t, x)\partial_j u + B(t, x)u &= 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \\ u(\mu, x) &= P(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (7-5)$$

für jedes $\mu \in [0, T]$ und jedes Polynom P eine reell-analytische Lösung $u(t, x)$ für

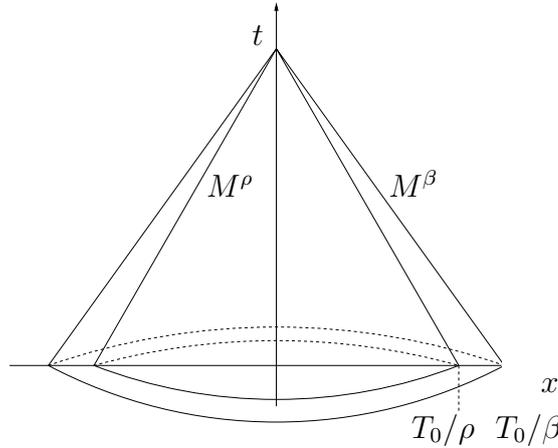
$$(t, x) \in [\mu - \delta, \mu + \delta] \times B(0, b) \quad (7-6)$$

besitzt.

Beweis. Da A^0 als positiv-definite Matrix invertierbar ist, können wir (7-5) umschreiben in die Form

$$\begin{aligned} \partial_t v &= - \sum_{j=1}^n (A^0)^{-1}(t, x) A^j(t, x) \partial_j v \\ &\quad + (A^0)^{-1}(t, x) B(t, x) v - (A^0)^{-1}(t, x) (LP)(t, x) \quad ((t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \\ v(\mu, x) &= 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

wobei $v := u - P$ gesetzt wurde. Der Satz von Cauchy-Kovalevskaya liefert nun die Existenz einer reell-analytischen Lösung in einem Bereich der Form (7-6). Dabei

Abbildung 9: Der Kegel K^β im Fall $n = 2$.

hängt δ nur von den Koeffizienten der Gleichung, nicht aber von μ ab. Ersetzt man P durch P/c mit einer positiven hinreichend großen Konstanten c , so erhält man die Konvergenz in einem Bereich, der nicht von P abhängt. Falls aber \tilde{u} die Lösung des Systems (7-5) mit P/c statt P ist, so ist $u := c\tilde{u}$ die Lösung des ursprünglichen Systems. Also hängt δ auch nicht von der Wahl von P ab. \square

7.11 Satz (Lösbarkeit hyperbolischer Gleichungen). *Es sei $s \in \mathbb{N}$ mit $s > \frac{n}{2} + 1$. Weiter seien $A^0, \dots, A^n, B \in C_b^{s+1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^{N \times N})$ und $u_0 \in H^s(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)^N$. Dann existiert eine eindeutige Lösung*

$$u \in C([0, \infty), H^s) \cap C^1([0, \infty), H^{s-1})$$

des linearen symmetrisch-hyperbolischen Systems

$$\begin{aligned} Lu(t, x) &= 0 \quad ((t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n), \\ u(0, x) &= u_0(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Ferner gilt $u \in C^1([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$.

Beweisskizze. Es sei $\rho = \frac{a_0}{na_1}$ die Kegelcharakteristik und sei $0 \leq \beta \leq \rho$ sowie M^β die Manteloberfläche von K^β (Abb. 9). Dann erfüllen alle Differentialoperatoren \tilde{L} mit Koeffizienten $\tilde{A}^0, \dots, \tilde{A}^n, \tilde{B}$, welche A^0, A^1, \dots, A^n, B hinreichend gut approximieren, die Voraussetzungen der Energieabschätzung.

(i) Zunächst seien alle Koeffizienten von L reell-analytisch. Für beliebiges aber festes $T_0 > 0$ werde u_0 in K_0 durch eine Folge von Polynomen $(u_0^k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $H^s(K_0)$ approximiert. Nach Lemma 7.10 existiert eine lokale Lösung u^m zu $Lu^m = 0$, $u^m(t = 0) = u_0^m$ in einem Kegelstumpf $K(\delta)$ mit $K(\delta) := K^\beta \cap \{(t, x) : t \leq \delta\}$

für ein δ mit $0 < \delta \leq T_0$. Dabei kann δ unabhängig von m gewählt werden. Die zweite Energieabschätzung (Satz 7.9) liefert für ein nur von T_0 abhängiges $C > 0$:

$$\|u^k(t) - u^m(t)\|_{H^s(K_t)} \leq C \|u_0^k - u_0^m\|_{H^s(K_0)}.$$

Somit konvergiert $(u^k(t))_{k \in \mathbb{N}}$ in $H^s(K_t)$ für $0 \leq t \leq \delta$.

Für $t \in [0, \delta]$ definiert nun $u(t) := \lim_{m \rightarrow \infty} u^m(t)$ ein $u \in C^0([0, \delta], H^s(K_\delta)) \cap C^0([0, \delta] \times K_\delta)$. Letzteres liefert der Sobolevsche Einbettungssatz da $s > \frac{n}{2}$. Weiter gilt in $H^{s-1}(K_\delta)$

$$u^m(t) = u_0^m + \int_0^t \partial_t u^m(r) dr, \quad 0 \leq t \leq \delta.$$

Wegen

$$\partial_t u^m(t) = \tilde{A}_0^{-1} \left(- \sum_{j=1}^n \tilde{A}^j \partial_j u^m(t) - \tilde{B} u^m(t) \right)$$

erkennen wir, dass $(\partial_t u^m(t))_{m \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen ein $v(t) \in H^{s-1}(K_\delta)$ konvergiert. Damit ist

$$v \in C^0([0, \delta], H^{s-1}(K_\delta))$$

Es ist

$$u(t) = u_0 + \int_0^t v(r) dr$$

was

$$u \in C^0([0, \delta], H^s(K_\delta)) \cap C^1([0, \delta], H^{s-1}(K_\delta))$$

und damit

$$u \in C^1([0, \delta] \times K_\delta)$$

impliziert. Sukzessive erhalten wir nun eine Lösung in K^β .

(ii) Es seien $A^0, A^1, \dots, A^n, B \in C_b^{s+1}$ und $u_0 \in H^{s+1}$. Wir approximieren A^0, A^1, \dots, A^n, B gleichmäßig durch analytische Funktionen

$$(A_k^0)_{k \in \mathbb{N}}, (A_k^1)_{k \in \mathbb{N}}, \dots, (A_k^n)_{k \in \mathbb{N}}, (B_k)_{k \in \mathbb{N}}$$

unter Berücksichtigung aller Ableitungen so, dass L_k noch die Voraussetzung der Energieabschätzung erfüllt, wobei

$$L_k := A_k^0 \partial_t + \sum_{j=1}^n A_k^j \partial_j + B_k.$$

Unter Verwendung von (i) können wir das Problem

$$L_k u^k = 0, \quad u^k(t=0) = u_0$$

lösen. Wir erhalten

$$u^k \in C^0([0, T], H^{s+1}(K_T)) \cap C^1([0, T], H^s(K_T))$$

wobei $0 < T \leq t_0 < T_0$ ist. Unsere Energieabschätzung liefert nun

$$\|u^k(t)\|_{H^{s+1}(K_t)} \leq c \|u_0\|_{s+1,2}, \quad 0 \leq t \leq T_0$$

wobei c nur von T_0 abhängt. Die Differenz $u^k - u^j$ erfüllt

$$\begin{aligned} L_k(u^k - u^j) &= -L_k u^j = L_j u^j - L_k u^j = (L_j - L_k)u^j =: f_{kj} \\ (u^k - u^j)(t=0) &= 0. \end{aligned}$$

Wieder liefert unsere Energieabschätzung

$$\begin{aligned} \|u^k(t) - u^j(t)\|_{H^s(K_t)}^2 &\leq c \int_0^t \|f_{kj}\|_{H^s(K_r)}^2 dr \\ &\leq c \varepsilon_{kj} \int_0^t \|u^j(r)\|_{H^{s+1}(K_r)}^2 dr \end{aligned}$$

wobei c nur von T_0 abhängig ist und $0 \leq \varepsilon_{kj} \rightarrow 0$ für $k, j \rightarrow \infty$ gilt. Wir folgern, dass $(u^k(t))_k$ in $W^{s,2}(K_t)$ gegen ein $u(t) \in W^{s,2}(K_t)$ konvergiert. Mit den selben Argumenten wie in Schritt 1, erhalten wir

$$u \in C^0([0, T], H^s(K_T)) \cap C^1([0, T], H^{s-1}(K_T)), \quad 0 < T \leq t_0, \quad (7-7)$$

und es existiert ein nur von T_0 abhängiges $c > 0$ mit

$$\|u(t)\|_{H^s(K_t)} \leq c \|u_0\|_{H^s(K_0)} \leq c \|u_0\|_{s,2}.$$

Dies zeigt auch die Eindeutigkeit der Lösung.

(iii) Es seien $A^0, A^1, \dots, A^n, B \in C_b^{s+1}$ und $u_0 \in H^s$. Wir approximieren u_0 in H^s mit einer Folge $(u_0^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset W^{s+1,2}$. Entsprechend dem Vorgehen in (ii) ergibt sich die Existenz von Lösungen u^k von $Lu^k = 0$, $u^k(t=0) = u_0^k$, $k \in \mathbb{N}$, in K^β . Diese Lösungen erfüllen

$$\sup_{0 \leq t \leq t_0} \|u^k(t) - u^j(t)\|_{H^s(K(T))} \leq c \|u_0^k - u_0^j\|_{H^s}$$

Dies zeigt die Existenz einer Lösung mit der Regularität von (7-7).

(iv) Die Koeffizienten seien gleichmäßig beschränkt. Für jeden verschobenen Kegelstumpf der K^β entspricht können wir eine lokale Lösung finden. Mithilfe der Eindeutigkeitseigenschaft können wir eine globale Lösung

$$u \in C^1([0, \infty) \times \mathbb{R})$$

finden. Es verbleibt zu zeigen, dass auch $u \in C^0([0, \infty), H^{s,2}) \cap C^1([0, \infty), H^{s-1,2})$ gilt. Es sei $\varepsilon > 0$, $t_1, t_2 \in [0, \infty)$ mit $t_1, t_2 \leq T$ für ein $T \geq 0$. Dann folgt für $R > 0$:

$$\|u(t_1) - u(t_2)\|_{H^s} \leq \|u(t_1) - u(t_2)\|_{H^s(B(0,R))} + \|u(t_1) - u(t_2)\|_{H^s(\mathbb{R}^n \setminus B(0,R))} =: I_1 + I_2.$$

Es gilt für $j = 1, 2$

$$\|u(t_j)\|_{H^s(\mathbb{R}^n \setminus B(0, R))} \leq c \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^n \setminus B(0, R_1))},$$

wobei c nur von T abhängt und $R_1 = R_1(\beta, R) < R$ mit $R_1 \rightarrow \infty$ für $R \rightarrow \infty$ gilt. Für große R ist nun $I_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ unabhängig von t_1 und t_2 . Für festes R ist $I_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ sofern $|t_1 - t_2|$ hinreichend klein ist. \square

8. Hilbertraum-Methoden: Dirichlet-Formen

8.1 Worum geht's? In diesem Abschnitt werden abstrakte Methoden verwendet, um die Lösbarkeit von Randwertproblemen zu beweisen. Dabei wird das Randwertproblem nicht im klassischen Sinn aufgefasst, sondern schwach formuliert. Die zugrunde liegenden Hilberträume sind Sobolevräume, und eine wesentliche Beweiszutat ist der Satz von Lax-Milgram, welcher sich mit Bilinearformen beschäftigt.

Zunächst wird der Laplace-Operator als einfachstes Beispiel für die Anwendbarkeit von Hilbertraum-Methoden untersucht, danach werden die Ergebnisse auf allgemeine koerzitive Operatoren zweiter Ordnung übertragen.

a) Die Randwertaufgabe zu $-\Delta + 1$

Wir demonstrieren zunächst an einem einfachen Fall, wie Hilbertraummethode zur Lösung führen. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Die klassische Dirichletsche Randwertaufgabe lautet

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= 0 && \text{in } G, \\ u|_{\partial G} &= f && \text{auf } \partial G. \end{aligned}$$

Die Randbedingung wird in der Sprache der Sobolevräume interpretiert als $u - f \in H_0^1(G)$. Gesucht ist ein $u \in H^1(G)$, welches bei gegebenem $f \in H^1 = H^1(G) = W^{1,2}(G)$

(i) $u - f \in H_0^1(G)$ und

(ii) $-\Delta u + u = 0$ im distributionellen Sinne erfüllt.

Eine solche Lösung bezeichnet man auch als schwache Lösung des Randwertproblems.

8.2 Bemerkung. Sei $u \in H^1(G)$. Dann gilt $-\Delta u + u = 0$ im distributionellen Sinn genau dann, falls

$$\langle u, \varphi \rangle_{H^1(G)} = 0 \quad (\varphi \in H_0^1(G)).$$

Denn die folgenden Bedingungen sind alle äquivalent:

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= 0 && \text{in } \mathcal{D}'(G), \\ \langle u, -\Delta \varphi + \varphi \rangle_{L^2} &= 0 && (\varphi \in \mathcal{D}(G)), \\ \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_{L^2} + \langle u, \varphi \rangle_{L^2} &= 0 && (\varphi \in \mathcal{D}(G)), \\ \langle u, \varphi \rangle_{H^1} &= 0 && (\varphi \in \mathcal{D}(G)), \end{aligned}$$

$$\langle u, \varphi \rangle_{H^1} = 0 \quad (\varphi \in H_0^1(G)).$$

8.3 Satz. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Für alle $f \in H^1(G)$ existiert genau ein $u \in H^1(G)$ mit

$$\begin{aligned} u - f &\in H_0^1(G) \\ \langle u, \varphi \rangle_{H^1(G)} &= 0 \quad (\varphi \in H_0^1(G)). \end{aligned}$$

Beweis. (i) Existenz: Nach dem Projektionssatz gilt $H^1(G) = H_0^1(G) \oplus (H_0^1(G))^\perp$. Jedes beliebige $f \in H^1(G)$ kann also für gewisse $f_1 \in H_0^1(G)$, $f_2 \in (H_0^1(G))^\perp$ wie folgt geschrieben werden:

$$f = f_1 + f_2$$

Wir setzen $u := f_2$. Dann gilt offensichtlich $u \in H^1(G)$ und $u - f = -f_1 \in H_0^1(G)$, sowie

$$\langle u, \varphi \rangle_{H^1} = \langle f_2, \varphi \rangle_{H^1} = 0 \quad (\varphi \in H_0^1(G)).$$

(ii) Eindeutigkeit: Sei u_1 eine weitere solche Lösung, dann betrachten wir $w := u - u_1$. Wir erhalten einerseits $w = (u - f) - (u_1 - f) \in H_0^1(G)$ und andererseits $w \in (H_0^1(G))^\perp$, da $u, u_1 \in (H_0^1(G))^\perp$. Damit folgt schon $w = 0$, also die eindeutige Lösbarkeit. \square

Die Dirichletsche Randwertaufgabe mit homogenen Randbedingungen lautet

Wir wenden uns nun der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f, \\ u|_{\partial G} &= 0. \end{aligned}$$

zu. Schwach formuliert bedeutet das, dass wir nach einem $u \in H_0^1(G)$ mit $-\Delta u + u = f$ im distributionellen Sinn suchen. Die folgenden Bedingungen sind wieder äquivalent:

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f \quad \text{in } \mathcal{D}'(G), \\ \langle u, (-\Delta + 1)\varphi \rangle_{L^2} &= \langle f, \varphi \rangle_{L^2} \quad (\varphi \in \mathcal{D}(G)), \\ \langle u, \varphi \rangle_{H^1(G)} &= \langle f, \varphi \rangle_{L^2} \quad (\varphi \in H_0^1(G)). \end{aligned}$$

8.4 Satz. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Dann existiert zu jedem $f \in L^2(G)$ genau ein $u \in H_0^1(G)$ mit

$$\langle u, \varphi \rangle_{H^1(G)} = \langle f, \varphi \rangle_{L^2} \quad (\varphi \in H_0^1(G)).$$

Beweis. Wir definieren

$$\begin{aligned} F : H_0^1(G) &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ \varphi &\longmapsto F\varphi := \langle f, \varphi \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

Wegen

$$|F\varphi| \leq \|f\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|\varphi\|_{H^1(G)}$$

handelt es sich bei F um ein stetiges lineares Funktional. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz existiert genau ein $u \in H_0^1(G)$ mit

$$\langle u, \varphi \rangle_{H^1(G)} = F\varphi = \langle f_1, \varphi \rangle_{L^2} \quad (\varphi \in H_0^1(G)).$$

Dies zeigt die Existenz.

Zum Beweis der Eindeutigkeit nehmen wir an, dass u_1 eine weitere Lösung ist, dann betrachten wir $w := u - u_1$. Es folgt, dass für alle $\varphi \in H_0^1(G)$ schon $\langle w, \varphi \rangle_{H^1} = 0$ gilt. Wir erhalten sofort $w = 0$. (Man setze etwa $\varphi := w$.) \square

b) Allgemeinere Differentialoperatoren

In diesem Abschnitt wollen wir den Laplace-Operator von Teil a) durch einen allgemeineren Operator ersetzen. Dazu benötigen wir einige Hilfsmittel aus der Hilbertraumtheorie. Im folgenden sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

8.5 Definition. Sei \mathcal{H} ein \mathbb{K} -Hilbertraum.

a) Eine Abbildung $B: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$ heißt eine Bilinearform (genauer Sesquilinearform) auf \mathcal{H} , falls B linear im ersten Argument und konjugiert linear im zweiten Argument ist.

b) Eine Bilinearform $B: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$ heißt stetig, falls eine Konstante $c > 0$ existiert mit

$$|B(u, v)| \leq c \|u\| \cdot \|v\| \quad (u, v \in \mathcal{H}).$$

c) Eine stetige Bilinearform B auf \mathcal{H} heißt streng koerzitiv, falls eine Konstante $p > 0$ existiert mit

$$\operatorname{Re} B(u, u) \geq p \|u\|^2 \quad (u \in \mathcal{H}).$$

8.6 Satz (Satz von Lax–Milgram). Es sei \mathcal{H} ein Hilbertraum und $B(\cdot, \cdot)$ eine stetige Bilinearform auf \mathcal{H} . Weiter existiere ein $p > 0$ mit

$$|B(u, u)| \geq p \|u\|^2 \quad (u \in \mathcal{H}). \tag{8-1}$$

Dann existiert für alle $F \in \mathcal{H}'$ genau ein $u \in \mathcal{H}$, so dass

$$Fv = B(v, u) \quad (v \in \mathcal{H})$$

gilt.

Beweis. Es sei $u \in \mathcal{H}$ beliebig aber fest gewählt. Da B stetig ist, ist $x \mapsto B(x, u)$ ein Element von \mathcal{H}' . Das bedeutet, dass es nach dem Satz von Riesz genau ein $f_u \in \mathcal{H}$ existiert, so dass $B(x, u) = \langle x, f_u \rangle$ für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt. Dies bestimmt eine lineare Abbildung $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, mit $u \mapsto Su := f_u$. Es folgt

$$\|Su\|^2 = \langle Su, Su \rangle = B(Su, u) \leq c\|Su\|\|u\|$$

und das impliziert die Stetigkeit von S . Ferner gilt

$$p\|u\|^2 \leq |B(u, u)| = |\langle u, Su \rangle| \leq \|u\|\|Su\|$$

was einerseits die Injektivität und andererseits die Stetigkeit von $S^{-1} : R(S) \rightarrow \mathcal{H}$ impliziert.

Weiter ist $R(S) =: M$ abgeschlossen. Ist nämlich $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $R(S)$ mit $y_n \rightarrow y \in \mathcal{H}$, so erkennen wir zunächst, dass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in \mathcal{H}$ existiert mit $y_n = Sx_n$. Wegen der Stetigkeit von S^{-1} ist nun auch $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ eine konvergente Folge. Es existiert also ein $x \in \mathcal{H}$ mit $x_n \rightarrow x$. Wegen der Stetigkeit von S folgt nun wieder, dass $Sx_n \rightarrow Sx$ gilt. Damit ist aber $Sx = y$.

Wegen der Abgeschlossenheit von M folgt aus dem Projektionssatz $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$. Ist nun $w \in M^\perp$, so schließen wir

$$0 = |\langle w, Sw \rangle| = |B(w, w)| \geq p\|w\|^2$$

und damit $w = 0$. Also ist $R(S) = \mathcal{H}$.

Sei nun $F \in \mathcal{H}'$ beliebig gewählt. Nach Riesz existiert ein $f \in \mathcal{H}$ mit $Fv = \langle v, f \rangle$ für alle $v \in \mathcal{H}$. Sei $u := S^{-1}f$. Dann folgt $B(v, u) = \langle v, Su \rangle = \langle v, f \rangle = Fv$.

Sei nun noch $B(v, u_1) = B(v, u_2)$ für alle $v \in \mathcal{H}$. Dann folgt zunächst $B(v, u_1 - u_2) = 0$ und weiter $B(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$ was wegen (8-1) schon $u_1 - u_2 = 0$ impliziert. \square

8.7 Definition. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Gegeben sei ein (formaler) Differentialoperator der Form

$$A := - \sum_{i,k=1}^n \partial_i a_{ik}(x) \partial_k + \sum_{i=1}^n a_i(x) \partial_i + a(x).$$

Dabei seien $a_{ik}, a_i, a \in L^\infty(G; \mathbb{R})$ mit $a_{ik} = a_{ki}$, und es existiere ein $p > 0$ mit

$$\sum_{i,k=1}^n \xi_i a_{ik}(x) \xi_k \geq p|\xi|^2 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n, x \in G).$$

Dann ist die zu A gehörige Dirichlet-Form $B : H^1(G) \times H^1(G) \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$B(v, u) := \sum_{i,k=1}^n \langle \partial_i v, a_{ik} \partial_k u \rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^n \langle v, a_i \partial_i u \rangle_{L^2} + \langle v, au \rangle_{L^2} \quad (u, v \in H^1(G)).$$

8.8 Lemma. a) Die zu A gehörige Dirichlet-Form B ist eine stetige Bilinearform auf $H^1(G)$.

b) Die Dirichlet-Form B ist koerzitiv auf $H^1(G)$, d.h. es existieren Konstanten $c, d > 0$ mit

$$\operatorname{Re} B(u, u) \geq d \|\nabla u\|_{L^2(G)}^2 - c \|u\|_{L^2(G)}^2 \quad (u \in H^1(G)). \quad (8-2)$$

Beweis. a) Die Sesquilinearität von B ist klar. Die Stetigkeit folgt aus

$$\begin{aligned} |B(u, v)| &\leq |\langle \partial_i v, a_{ik} \partial_k u \rangle_{L^2}| + |\langle v, a_i \partial_i u \rangle_{L^2}| + |\langle v, au \rangle_{L^2}| \\ &\leq C \left(\|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \|v\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2} + \|v\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \right) \\ &\leq C \|u\|_{H^1(G)} \|v\|_{H^1(G)} \end{aligned}$$

mit $C := \max\{\|a_{ik}\|_\infty, \|a_i\|_\infty, \|a\|_\infty\}$.

b) Wir schreiben $u \in H^1(G)$ in der Form $u = u_1 + iu_2$ mit reellwertigen u_1, u_2 . Damit folgt

$$\operatorname{Re}(B(u, u)) = \langle \partial_i u_1, a_{ij} \partial_j u_1 \rangle_{L^2} + \langle \partial_i u_2, a_{ij} \partial_j u_2 \rangle_{L^2} + R,$$

wobei $R := \operatorname{Re}(\langle u, a_i \partial_i u \rangle + \langle u, au \rangle)$ gilt. Unter Verwendung von $|R| \leq \varepsilon \|\nabla u\|^2 + c(\varepsilon) \|u\|^2$ schließen wir

$$\operatorname{Re} B(u, u) \geq p \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \varepsilon \|\nabla u\|_{L^2}^2 - c(\varepsilon) \|u\|_{L^2}^2.$$

□

Wir wollen eine schwache Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} Au &= f \\ u|_{\partial G} &= 0 \end{aligned}$$

finden. Die Randbedingung bedeutet wieder $u \in H_0^1(G)$, und $Au = f$ im Distributionssinn ist äquivalent zu

$$B(v, u) = \langle v, f \rangle_{L^2(G)} \quad (v \in H_0^1(G)).$$

8.9 Satz. Die Dirichlet-Form B zu A sei streng koerzitiv. Dann existiert zu jedem $f \in L^2(G)$ genau ein $u \in H_0^1(G)$ mit

$$B(v, u) = \langle v, f \rangle_{L^2(G)} \quad (v \in H_0^1(G)).$$

Beweis. Es gilt $v \mapsto \langle v, f \rangle \in (H_0^1(G))'$, denn $|\langle v, f \rangle| \leq \|f\|_{L^2(G)} \|v\|_{H^1}$. Damit folgt die Behauptung aus dem Satz von Lax-Milgram. □

Bisher wurde A nur als formaler Differentialoperator betrachtet. Nun werden wir A als unbeschränkten Operator mit einem geeignet gewählten Definitionsbereich auffassen.

8.10 Lemma (Lösung des Dirichlet-Problems). *Definiere in obiger Situation den Operator $A: L^2(G) \supset D(A) \rightarrow L^2(G)$ durch*

$$D(A) := \{u \in H_0^1(G) : \exists f_u \in L^2(G) \forall v \in H_0^1(G) : B(v, u) = \langle v, f_u \rangle\} \subset L^2(G)$$

und

$$Au := f_u \quad (u \in D(A)).$$

Dann ist A wohldefiniert. Falls die Dirichlet-Form B streng koerzitiv ist, so existiert zu jedem $f \in L^2(G)$ genau ein $u \in D(A)$ mit

$$Au = f.$$

Beweis. (i) Wohldefiniertheit: Seien $f_u^1, f_u^2 \in L^2(G)$ mit $B(v, u) = \langle v, f_u^j \rangle_{L^2(G)}$ ($j = 1, 2$) für alle $v \in H_0^1(G)$. Damit folgt aber unmittelbar $\langle f_u^1 - f_u^2, v \rangle_{L^2(G)} = 0$ und somit schon $f_u^1 = f_u^2$, da $\mathcal{D}(G)$ und damit auch $H_0^1(G)$ dicht in $L^2(G)$ liegt.

(ii) Falls G streng koerzitiv ist, folgt die eindeutige Lösbarkeit von $Au = f$ aus Satz 8.9 und der Definition von $D(A)$. \square

8.11 Satz. *a) Sei in obiger Situation $a_i = a = 0$ und G in einer Richtung beschränkt. Dann ist die zu A gehörige Dirichlet-Form streng koerzitiv, und das Randwertproblem*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } G, \\ u &\in H_0^1(G) \end{aligned}$$

besitzt für jedes $f \in L^2(G)$ eine eindeutige Lösung u .

b) Falls die zu A gehörige Dirichlet-Form streng koerzitiv ist, so ist der Operator $M := A^{-1}: L^2(G) \rightarrow L^2(G)$ beschränkt und kompakt.

Beweis. a) Wegen der Bedingung $\sum_{i,k=1}^n \xi_i a_{ik}(x) \xi_k \geq p|\xi|^2$ ist im Fall $a_i = a = 0$ die Dirichlet-Form $B(u, u)$ reell und erfüllt die Ungleichung

$$B(u, u) \geq p \|\nabla u\|_{L^2(G)}^2 \geq C \|u\|_{H^1(G)}^2 \quad (u \in H_0^1(G)).$$

Dabei wurde die Poincaré-Ungleichung verwendet, nach welcher die Norm $\|u\|_{H^1(G)} = \|\nabla u\|_{L^2(G)}$ in $H_0^1(G)$ äquivalent zu $\|u\|_{H^1(G)}$ ist, falls das Gebiet in einer Richtung

beschränkt ist. Die eindeutige Lösbarkeit des Randwertproblems folgt aus Lemma 8.10.

b) Für $u \in L^2(G)$ gilt

$$\begin{aligned} \|Mf\|_{L^2}^2 &= \|u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{H^1}^2 \leq \frac{1}{p} \operatorname{Re} B(u, u) = \frac{1}{p} \operatorname{Re} \langle u, f \rangle_{L^2} \\ &\leq \frac{1}{p} \|u\|_{L^2} \|f\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Also ist $M \in L(L^2(G))$ mit Norm $\|M\|_{L(L^2(G))} \leq \frac{1}{p}$, aber auch $M \in L(L^2(G), H_0^1(G))$ mit

$$\|M\|_{L(L^2(G), H_0^1(G))} \leq \frac{1}{p}.$$

Sei nun $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(G)$ eine beschränkte Folge. Dann ist $(Mf_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(G)$ eine in der $\|\cdot\|_{H_0^1(G)}$ -Norm beschränkte Folge, welche nach dem Satz von Rellich-Kondrachov eine in der $\|\cdot\|_{L^2(G)}$ -Norm konvergente Teilfolge besitzt. Somit ist $M \in L(L^2(G))$ ein kompakter Operator. \square

8.12 Bemerkung. Man kann zeigen, dass der Operator A als unbeschränkter Operator in $L^2(G)$ mit Definitionsbereich $D(A)$ dicht definiert und selbstadjungiert ist, falls die zugehörige Dirichlet-Form streng koerzitiv ist und $a_i = 0$ gilt. Insbesondere ist im Fall $a_i = a = 0$ der Operator A selbstadjungiert, falls das Gebiet in einer Richtung beschränkt ist.

Da das Spektrum kompakter Operatoren nur aus Eigenwerten besteht, gilt dasselbe auch für das Spektrum des Operators A (in der Situation von Satz 8.11 a)). Der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren zeigt dann, dass eine aus Eigenfunktionen von A bestehende Orthonormalbasis von $L^2(G)$ existiert.

8.13 Satz. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Dann existiert zu jedem $f \in H^1(G)$ genau ein $u \in H^1(G)$ mit

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{im distributionellen Sinn,} \\ u - f &\in H_0^1(G). \end{aligned}$$

Beweis. Wir machen den Ansatz $u = f + w$. Dann ist $w = u - f$ eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta w &= \Delta f \quad \text{in } G, \\ w &\in H_0^1(G). \end{aligned}$$

Es sei $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, dann gilt

$$[\Delta f](\varphi) = \langle f, \Delta \varphi \rangle_{L^2} = -\langle \nabla f, \nabla \varphi \rangle_{L^2}$$

Wir haben also unser Problem gelöst, wenn wir ein $w \in H_0^1(G)$ finden, für welches

$$\langle \nabla w, \nabla \varphi \rangle_{L^2} = - \langle \nabla f, \nabla \varphi \rangle_{L^2} \quad (\varphi \in H_0^1(G))$$

gilt. Nun ist aber

$$\varphi \longmapsto - \langle \nabla f, \nabla \varphi \rangle \in (H_0^1(G))'$$

und damit ist die eindeutige Lösbarkeit wie vorher nach dem Satz von Lax-Milgram gesichert. \square

9. Parabolische Theorie II: Anwendung des Spektralsatzes

9.1 Worum geht's? In diesem kurzen Abschnitt wird der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren angewendet, um parabolische Randwertprobleme zu lösen. Diese Methode führt zu den besten Ergebnissen; wenn man das Spektralmaß eines Operators kennt (oder zumindest weiß, dass eines existiert), so kennt man den Operator sehr genau, z.B. dessen Definitionsbereich. Auch die Vollständigkeit der Eigenfunktionen, d.h. die Eigenschaft, eine Orthonormalbasis zu bilden, folgt in geeigneter Situation aus dem Spektralsatz.

Der Spektralsatz gilt für selbstadjungierte (etwas allgemeiner: normale) Operatoren. Falls der Operator nicht selbstadjungiert ist, so muss man einen anderen Zugang zum Funktionalkalkül verwenden, etwa den Dunford-Kalkül, welcher die Cauchy-Integralformel nachbildet. Dies soll aber nicht in dieser Vorlesung diskutiert werden.

Im folgenden sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Wir betrachten ein parabolisches Randwertproblem zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} u_t - \sum_{i,k=1}^n \partial_i a_{ik} \partial_k u &= f(t, x), & (t, x) &\in [0, \infty) \times G \\ u(0, x) &= u_0(x), & x &\in G \\ u(t, x) &= 0, & (t, x) &\in [0, \infty) \times \partial G. \end{aligned}$$

Es seien $a_{ik} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R})$, und die Matrix $(a_{ik})_{ik}$ sei gleichmäßig positiv definit.

Zu diesem Randwertproblem definiert man in natürlicher Weise den unbeschränkten Operator $A: L^2(G) \rightarrow L^2(G)$ durch $Au := -\sum_{i,k=1}^n \partial_i a_{ik} \partial_k u$ mit Definitionsbereich

$$D(A) := \{u \in H_0^1(G) : Au \in L^2(G)\} \subset L^2(G).$$

Falls $A = -\Delta$, so ist A selbstadjungiert und es gilt $\sigma(A) \subset [0, \infty)$.

9.2 Bemerkung. a) Falls die Koeffizienten a_{ik} und der Rand des Gebietes ∂G hinreichend glatt sind, so gilt

$$D(A) = H^2(G) \cap H_0^1(G).$$

b) Falls der Operator A abgeschlossen ist (z.B. wenn er selbstadjungiert ist), so wird durch

$$\|x\|_A := \left(\|x\|_{L^2(G)}^2 + \|Ax\|_{L^2(G)}^2 \right)^{1/2} \quad (x \in D(A))$$

eine Norm auf $D(A)$ definiert, welche $D(A)$ zu einem Hilbertraum macht. Ausdrücke wie $C([0, \infty), D(A))$ sind im folgenden immer bezüglich dieser Norm zu verstehen.

9.3 Satz. In obiger Situation sei der Operator A selbstadjungiert mit $\sigma(A) \subset [0, \infty)$. Sei $E: \mathcal{B}([0, \infty)) \rightarrow L(H)$ das zu A gehörige Spektralmaß. Zu $u_0 \in D(A)$ definiert man

$$u(t) := e^{-At}u_0 := \int_0^\infty e^{-\lambda t} dE(t)u_0.$$

Dann ist

$$u \in C^1([0, \infty), L^2(G)) \cap C([0, \infty), D(A)),$$

und u löst das Cauchy-Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u + Au &= 0, \quad (t > 0), \\ u|_{t=0} &= u_0. \end{aligned}$$

Beweis. (i) Definiere das Maß $E_{u_0}(A) := \|E(A)u_0\|_{L^2(G)}^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \|u(t+h) - u(t)\|_{D(A)}^2 = \|u(t+h) - u(t)\|_{L^2(G)}^2 + \|A(u(t+h) - u(t))\|_{L^2(G)}^2 \\ &= \int_0^\infty |e^{-\lambda(t+h)} - e^{-\lambda t}|^2 dE_{u_0}(\lambda) + \int_0^\infty \lambda^2 |e^{-\lambda(t+h)} - e^{-\lambda t}|^2 dE_{u_0}(\lambda) \\ &= \int_0^{\lambda_0} |e^{-\lambda(t+h)} - e^{-\lambda t}|^2 dE_{u_0}(\lambda) + \int_{\lambda_0}^\infty |e^{-\lambda(t+h)} - e^{-\lambda t}|^2 dE_{u_0}(\lambda) \\ &\quad + \int_0^{\lambda_0} \lambda^2 |e^{-\lambda(t+h)} - e^{-\lambda t}|^2 dE_{u_0}(\lambda) + \int_{\lambda_0}^\infty \lambda^2 |e^{-\lambda(t+h)} - e^{-\lambda t}|^2 dE_{u_0}(\lambda). \end{aligned}$$

Hier wurde verwendet, dass $Au(t) = Ae^{-At}u_0 = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} dE(t)u_0$ gilt. Es ist nun

$$\begin{aligned} & \int_{\lambda_0}^\infty |e^{-\lambda(t+h)} - e^{-\lambda t}|^2 dE_{u_0}(\lambda) + \int_{\lambda_0}^\infty \lambda^2 |e^{-\lambda(t+h)} - e^{-\lambda t}|^2 dE_{u_0}(\lambda) \\ & \leq 4 \int_{\lambda_0}^\infty (1 + \lambda)^2 dE_{u_0}(\lambda) < \varepsilon \end{aligned}$$

für $\lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon)$, da

$$\int_0^\infty (1 + \lambda^2) dE_{u_0}(\lambda) < \infty$$

wegen $u_0 \in D(A)$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} & \int_0^{\lambda_0} |e^{-\lambda(t+h)} - e^{-\lambda t}|^2 dE_{u_0}(\lambda) + \int_0^{\lambda_0} \lambda^2 |e^{-\lambda(t+h)} - e^{-\lambda t}|^2 dE_{u_0}(\lambda) \\ & \leq (1 + \lambda_0^2) \int_0^{\lambda_0} |e^{-\lambda(t+h)} - e^{-\lambda t}|^2 dE_{u_0}(\lambda) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt nun $u \in C([0, \infty), D(A))$, und das war unsere erste Behauptung.

(ii) Wir betrachten den Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - \int_0^\infty (-\lambda)e^{-\lambda t} dE(\lambda)u_0 \right\|_{L^2(G)}^2 \\ &= \int_0^\infty \left| \frac{e^{-\lambda(t+h)} - e^{-\lambda t}}{h} - \lambda e^{-\lambda t} \right|^2 dE_{u_0}(\lambda) \\ &= \int_0^{\lambda_0} \left| \frac{e^{-\lambda(t+h)} - e^{-\lambda t}}{h} - \lambda e^{-\lambda t} \right|^2 dE_{u_0}(\lambda) \\ & \quad + \int_{\lambda_0}^\infty \left| \frac{e^{-\lambda(t+h)} - e^{-\lambda t}}{h} - \lambda e^{-\lambda t} \right|^2 dE_{u_0}(\lambda) \end{aligned}$$

Wegen $\frac{e^{-\lambda(t+h)} - e^{-\lambda t}}{h} = -\lambda e^{-\lambda t}$ nach dem Mittelwertsatz ist

$$\int_{\lambda_0}^\infty \left| \frac{e^{-\lambda(t+h)} - e^{-\lambda t}}{h} + \lambda e^{-\lambda t} \right|^2 dE_{u_0}(\lambda) < \varepsilon$$

für $\lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon)$. Weiter ist

$$\begin{aligned} & \int_0^{\lambda_0} \left| \frac{e^{-\lambda(t+h)} - e^{-\lambda t}}{h} + \lambda e^{-\lambda t} \right|^2 dE_{u_0}(\lambda) \\ & \leq \int_0^{\lambda_0} \left| \frac{e^{-\lambda t} - 1}{h} + \lambda \right|^2 dE_{u_0}(\lambda) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Also ist u differenzierbar als Funktion von t mit $\partial_t u = \int_0^\infty (-\lambda)e^{-\lambda t} dE(\lambda)u_0$. Dies zeigt $u \in C^1([0, \infty), L^2(G))$ und $\partial_t u = -Au$.

(iii) Die Anfangsbedingung $u(0) = u_0$ folgt aus $u(0) = \int_0^\infty 1 dE(\lambda)u_0 = E([0, \infty))u_0 = u_0$. \square

9.4 Bemerkung. a) Ist $f = 0$ und $u_0 \in D(A^2)$, dann erhält man mit der gleichen Vorgehensweise wie oben $u \in C([0, \infty), D(A^2)) \cap C^1([0, \infty), D(A))$, usw.

b) Man beachte, dass die Randbedingung $u|_{\partial G} = 0$ im abstrakten Cauchyproblem $\partial_t u + Au = 0$, $u(0) = u_0$ nicht mehr explizit auftaucht, sondern in der Definition des Operators A (genauer von $D(A)$) eingearbeitet ist.

Bei inhomogenen rechten Seiten (d.h. $f \neq 0$) findet man eine Lösung mithilfe der „Variation der Konstanten“.

9.5 Satz. In obiger Situation sei der Operator A selbstadjungiert mit $\sigma(A) \subset [0, \infty)$. Sei $E: \mathcal{B}([0, \infty)) \rightarrow L(H)$ das zu A gehörige Spektralmaß. Zu $f \in C([0, \infty), D(A))$ definiert man

$$u(t) := \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s, \cdot) ds$$

Dann ist

$$u \in C^1([0, \infty), L^2(G)) \cap C([0, \infty), D(A)),$$

und u löst das Cauchy-Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u + Au &= f, \quad (t > 0), \\ u|_{t=0} &= 0. \end{aligned}$$

Beweisskizze. Wir beweisen hier nur die Differenzierbarkeit von u :

$$\begin{aligned} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\int_0^{t+h} \int_0^\infty e^{-\lambda(t+h-s)} dE(\lambda) f(s, \cdot) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t \int_0^\infty e^{-\lambda(t-s)} dE(\lambda) f(s, \cdot) ds \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \int_0^\infty e^{-\lambda(t+h-s)} dE(\lambda) f(s, \cdot) ds \\ &\quad - \frac{1}{h} \int_0^t \int_0^\infty e^{-\lambda(t-s)} - e^{-\lambda(t+h-s)} dE(\lambda) f(s, \cdot) ds \end{aligned}$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \int_0^\infty e^{-\lambda(t+h-s)} dE(\lambda) f(s, \cdot) ds &\rightarrow \int_0^\infty e^{-\lambda(t+0-t)} dE(\lambda) f(t, \cdot) \\ &= E([0, \infty)) f(t, \cdot) = f(t, \cdot) \end{aligned}$$

wegen des Mittelwertsatzes der Integralrechnung. Weiter gilt

$$\frac{1}{h} \int_0^t \int_0^\infty e^{-\lambda(t-s)} - e^{-\lambda(t+h-s)} dE(\lambda) f(s, \cdot) ds \rightarrow - \int_0^t \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda(t-s)} dE(\lambda) f(s, \cdot) ds$$

sofern existent. Tatsächlich dürfen wir aber von der Existenz ausgehen. Dies wollen wir hier aber nicht beweisen. \square

Schließlich wollen wir noch eine Energieabschätzung für parabolische Gleichungen beweisen, wobei wir uns wieder auf das Modellproblem der Wärmeleitungsgleichung beschränken.

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Wir betrachten das Problem

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - \Delta u = 0, \quad (t, x) \in [0, \infty) \times G \\ u(0, x) = u_0(x), \quad x \in G \\ u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \partial G \end{array} \right\}$$

Ist $u \in C([0, \infty), H^2(G)) \cap C^1([0, \infty), H_0^1(G))$ eine Lösung, so gilt

$$\int_G u_t \bar{u} dx - \int_G \Delta u \bar{u} dx = 0$$

und daraus folgt

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_G |u(t, x)|^2 dx + \int_G |\nabla u(t, x)|^2 dx = 0$$

Die erste Poincarésche Ungleichung liefert $\int_G |u(t, x)|^2 dx \leq d^2 \int_G |\nabla u(t, x)|^2 dx$ und somit folgt zunächst

$$\frac{d}{dt} \int_G |u(t, x)|^2 dx \leq \frac{-2}{d^2} \int_G |u(t, x)|^2 dx,$$

und unter Verwendung des Lemmas von Gronwall folgt weiter

$$\int_G |u(t, x)|^2 dx \leq e^{-\frac{2}{d^2}t} \int_G |u_0(x)|^2 dx.$$

Wir erhalten also den

9.6 Satz. *Die Energie $\int_G |u(t, x)|^2 dx$ fällt exponentiell ab.*

Man erkennt, dass der Energieabfall über die Konstante d von der Geometrie des Gebietes abhängt. Exponentielle Stabilität ist typisch für Diffusionsprobleme, in denen „Dissipation“ auftritt. Bei glatten Daten erhält man unter Verwendung des Sobolevschen Einbettungssatzes, dass $u(t, x) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$, exponentiell und gleichmäßig. Zum Vergleich: Bei der Wellengleichung tritt so ein Effekt nicht auf. Die Energie bleibt dort „erhalten“.

10. Hyperbolische Theorie II: Anwendung des Spektralsatzes

10.1 Worum geht's? Ähnlich wie im vorigen Abschnitt, soll nun der Spektralsatz angewendet werden, um die Lösbarkeit hyperbolischer Gleichungen zu beweisen, falls der zugehörige Operator selbstadjungiert ist. Im hyperbolischen Fall erhält man cos- und sin-Funktionen als Lösung des Randwertproblems. Im Fall der Wellengleichung, also des Laplace-Operators als zugehörigem Operator im Ort, lässt sich zeigen, dass der Spektralsatz anwendbar ist. Der Beweis der Selbstadjungiertheit verwendet dazu die Operatoren $A \pm i$ und ihre Invertierbarkeit.

Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Wir betrachten das Anfangs-Randwertproblem für die Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0, & \text{für } (t, x) \in [0, \infty) \times G \\ u(t, x) &= 0 & \text{für } (t, x) \in [0, \infty) \times \partial G \\ u(0, x) &= u_0 & \text{für } x \in G, \\ \partial_t u(0, x) &= u_1 & \text{für } x \in G. \end{aligned} \quad (10-1)$$

Der Fall $G = \mathbb{R}$ ist bereits vorgekommen. Hier können wir mit Hilfe der D'Alembertschen Formel die Lösung sofort angeben, im Einzelnen gilt

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \left\{ u_0(x-t) + u_0(x+t) + \int_{x-t}^{x+t} u_1(s) ds \right\} \quad (10-2)$$

$$= (\partial_t H(t)u_0)(x) + (H(t)u_1)(x) \quad (10-3)$$

wenn wir H wie folgt definieren

$$(H(t))(g)(x) := \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s) ds$$

Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\left\{ \begin{array}{l} u''(t) + au(t) = 0, \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \\ u(0) = u_0 \\ u_t(0) = u_1 \end{array} \right\} \quad (10-4)$$

Man rechnet sofort nach, dass

$$u(t) = \cos(\sqrt{a}t)u_0 + \frac{\sin(\sqrt{a}t)}{\sqrt{a}}u_1$$

eine Lösung ist. Im Folgenden werden wir Probleme betrachten, bei denen die im obigen Beispiel vorkommende Konstante a einen Operator A darstellt. Funktionen von A können definiert werden, sofern A selbstadjungiert ist. Wir setzen $\mathcal{H} := L^2(G)$

und $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ wobei $D(A) := \{u \in H_0^1(G) : \Delta u \in \mathcal{H}\}$ und $A := -\Delta$. Dann geht unser Anfangsrandwertproblem in

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt}(t) + Au(t) = 0, \quad \text{für } t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \\ u_t(0) = u_1 \end{array} \right\} \quad (10-5)$$

10.2 Lemma. Für alle $f \in \mathcal{H}$ existiert ein $u \in D(A)$ mit $(A \pm i)u = f$.

Beweis. Die Behauptung ist mit $\exists u \in H_0^1(G), \Delta u \in L^2(G) \forall v \in H_0^1(G) : \langle v, (-\Delta \pm i)u \rangle = \langle v, f \rangle$ äquivalent. Weiter gilt

$$\begin{aligned} & \exists u \in H_0^1(G), \Delta u \in L^2(G) \forall v \in H_0^1(G) : \langle v, (-\Delta \pm i)u \rangle = \langle v, f \rangle \\ \iff & \exists u \in H_0^1(G) \forall v \in H_0^1(G) : \langle \nabla v, \nabla u \rangle \mp i \langle v, u \rangle = \langle v, f \rangle \end{aligned}$$

Sei $B_{\mp} : H_0^1(G) \times H_0^1(G) \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $B_{\mp}(u, v) := \langle \nabla u, \nabla v \rangle \mp i \langle u, v \rangle$. Offensichtlich ist B_{\mp} eine sesquilineare Form und es gilt $|B_{\mp}(u, v)| \leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$. Weiter gilt

$$|B_{\mp}(u, u)| = |\|\nabla u\|^2 \mp i\|u\|^2| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \|u\|_{H^1}^2$$

und damit genügt B_{\mp} den Voraussetzungen des Satzes von Lax und Milgram. Für $f \in \mathcal{H}$ ist nun $v \mapsto \langle v, f \rangle \in (H_0^1)'$ und damit existiert genau ein $u \in H_0^1$, so dass $B_{\mp}(v, u) = \langle v, f \rangle$ für alle $v \in H_0^1$ gilt. \square

10.3 Satz. A ist selbstadjungiert.

Beweis. Wir beweisen die Behauptung in zwei Schritten.

- (i) Wir beweisen zuerst, dass A symmetrisch ist. Zunächst ist klar dass $D(A)$ dicht in \mathcal{H} ist, da schon $\mathcal{D}(G)$ dicht in \mathcal{H} ist. Es seien nun $u, v \in D(A)$, dann existieren Folgen $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(G)$ mit $u_n \rightarrow u$ und $v_n \rightarrow v$ in $H^1(G)$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \langle u, Av \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, -\Delta v \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle -\Delta u_n, v \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \langle -\Delta u_n, v_m \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \nabla u_n, \nabla u_m \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \nabla u_n, \nabla v \rangle = \langle \nabla u, \nabla v \rangle \\ &\quad \vdots \\ &= \langle Au, v \rangle. \end{aligned}$$

Damit ist für $v \in D(A)$ die Abbildung $u \mapsto \langle Au, v \rangle$ ein stetiges lineares Funktional auf $D(A)$, gegeben durch $\langle u, Av \rangle$. Nach Definition des adjungierten Operators folgt $v \in D(A^*)$ und $A^*v = Av$. Wir erhalten $A \subset A^*$, d.h. A ist symmetrisch.

- (ii) Zum Nachweis der Selbstadjungiertheit müssen wir noch $D(A^*) \subset D(A)$ zeigen. Diese beweisen wir mithilfe von Lemma 10.2. Es sei also $v \in D(A^*)$ und $A^*v = h \in \mathcal{H}$. Wir wissen nun, dass $R(A+i) = \mathcal{H}$ gilt und daraus folgt, dass ein $w \in D(A)$ existiert mit $(A+i)w = h+iv$. Somit gilt für alle $u \in D(A)$:

$$\begin{aligned} \langle (A-i)u, v \rangle &= \langle u, A^*v + iv \rangle \\ &= \langle u, h + iv \rangle = \langle u, (A+i)w \rangle = \langle (A-i)u, w \rangle \end{aligned}$$

Wegen $R(A-i) = \mathcal{H}$ ergibt sich sofort $v = w$ und damit $v \in D(A)$.

□

Nun definieren wir, was wir unter einer schwachen Lösung verstehen wollen zu $Lu \equiv \partial_t^2 u + Au$ mit $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $D(A) = \{u \in H_0^1 : \Delta u \in L^2\}$, $Au = -\Delta u$, $G \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, $u(t=0) = u_0$, $u_t(t=0) = u_1$.

10.4 Definition. Seien $u_0, u_1 \in \mathcal{H}$. Dann heißt u schwache Lösung von $Lu = 0$ für $t \geq 0$ zu u_0, u_1 , falls

(i) $u \in C([0, \infty), \mathcal{H})$,

(ii) $\forall \varphi \in \mathcal{V} := C_c(\mathbb{R}, D(A)) \cap C^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$

$$0 = \int_{(0, \infty) \times G} u \overline{L\varphi} \, d(t, x) - \int_G u_0 \overline{\varphi_t(0, \cdot)} \, dx + \int_G u_1 \overline{\varphi(0, \cdot)} \, dx$$

Offenbar ist dies ein stärkerer Lösungsbegriff als distributionelle Lösungen, denn es werden auch Anfangswerte berücksichtigt. Ist u eine hinreichend glatte Lösung von $Lu = 0$, $u(t=0) = u_0$, $u_t(t=0) = u_1$, so ist u auch schwache Lösung, denn es ergibt sich mittels partieller Integration

$$0 = \int_{(0, \infty) \times G} Lu\varphi = \int_{(0, \infty) \times G} u \overline{L\varphi} - \int_G u_0 \varphi_t(0, \cdot) + \int_G u_1 \varphi(0, \cdot)$$

10.5 Satz. Seien $u_0, u_1 \in \mathcal{H}$. Dann existiert eine eindeutige schwache Lösung von $Lu = 0$ zu $u_0, u_1 \in \mathcal{H}$.

Beweis. a) Eindeutigkeit: Sei u schwache Lösung zu $u_0 = u_1 = 0$. Das bedeutet

$$\forall \varphi \in \mathcal{V} : \int_{(0, \infty) \times G} u \overline{L\varphi} = 0.$$

Wir beweisen, dass $\{L\varphi : \varphi \in \mathcal{V}\}$ dicht in $L^2((0, \infty) \times G)$ ist. Sei $\psi \in \mathcal{D}((0, \infty) \times G)$. Wir fixieren $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\zeta \geq 0$ und $\zeta|_{[0, \infty)} = 1$, sowie $\zeta(t) = 0$ für $t \leq \tau < 0$ und definieren

$$\varphi(t) := (V\psi)(t, \cdot) := -\zeta(t) \int_t^\infty \frac{\sin(\sqrt{A}(t-s))}{\sqrt{A}} \psi(s, \cdot) ds \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Der Integrand ist dabei nach dem Spektralsatz definiert: Falls $E: \mathcal{B}([0, \infty)) \rightarrow L(\mathcal{H})$ das zu A gehörige Spektralmaß ist, so gilt

$$\frac{\sin(\sqrt{A}(t-s))}{\sqrt{A}} := \int_0^\infty \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-s)}{\sqrt{\lambda}} dE(\lambda).$$

Wir beweisen im folgenden, dass $\varphi \in \mathcal{V}$ und $L\varphi = \psi$ gilt, was die Dichtheit von $\{L\varphi : \varphi \in \mathcal{V}\}$ und damit die Eindeutigkeit zeigt. Dies wird in mehreren Schritten erledigt.

(i) Wegen $\zeta(t) = 0$ für $t < \tau$ und $\psi(s, \cdot) = 0$ für hinreichend großes s besitzt φ kompakten Träger bzgl. t .

(ii) Für jedes t ist $\varphi(t) \in D(A)$. Dies wird hier nicht bewiesen.

(iii) Wir zeigen, dass $\varphi \in C(\mathbb{R}, D(A))$ gilt. Dazu betrachte

$$\begin{aligned} & \|\varphi(t) - \varphi(t_0)\| \\ = & \left\| \zeta(t) \int_t^\infty \int_0^\infty \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-s)}{\sqrt{\lambda}} dE(\lambda) \psi(s, \cdot) ds \right. \\ & \left. - \zeta(t_0) \int_{t_0}^\infty \int_0^\infty \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t_0-s)}{\sqrt{\lambda}} dE(\lambda) \psi(s, \cdot) ds \right\| \\ \leq & |\zeta(t) - \zeta(t_0)| \left\| \int_t^\infty \int_0^\infty \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-s)}{\sqrt{\lambda}} dE(\lambda) \psi(s, \cdot) ds \right\| \\ & + |\zeta(t_0)| \left\| \int_{t_0}^t \int_0^\infty \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-s)}{\sqrt{\lambda}} dE(\lambda) \psi(s, \cdot) ds \right\| \\ & + |\zeta(t_0)| \left\| \int_{t_0}^\infty \int_0^\infty \left(\frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-s)}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t_0-s)}{\sqrt{\lambda}} \right) dE(\lambda) \psi(s, \cdot) ds \right\| \\ \leq & |\zeta(t) - \zeta(t_0)| \int_t^\infty |t-s| \|\psi(s, \cdot)\| ds \\ & + |\zeta(t_0)| \int_{t_0}^t |t-s| \|\psi(s, \cdot)\| ds \\ & + |\zeta(t_0)| |t-t_0| \int_{t_0}^\infty \|\psi(s, \cdot)\| ds \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für $t \rightarrow t_0$. Analog zeigt man

$$\|A\varphi(t, \cdot) - A\varphi(t_0, \cdot)\| \rightarrow 0$$

für $t \rightarrow t_0$.

(iv) Es ist $\varphi \in C^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ und es gilt $L\varphi = \psi$, denn

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_t^\infty \int_0^\infty \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-s)}{\sqrt{\lambda}} dE(\lambda) \psi(s, \cdot) ds \\ &= \int_t^\infty \int_0^\infty \cos \sqrt{\lambda}(t-s) dE(\lambda) \psi(s, \cdot) ds \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \int_t^\infty \int_0^\infty \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-s)}{\sqrt{\lambda}} dE(\lambda) \psi(t, \cdot) \\ &= \int_0^\infty dE(\lambda) \psi(s, \cdot) ds - \int_t^\infty \int_0^\infty \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}(t-s) dE(\lambda) \psi(s, \cdot) ds \\ &= \psi(t, \cdot) - A\varphi(t, \cdot). \end{aligned}$$

b) Existenz: Zu $u_0, u_1 \in \mathcal{H}$ sei

$$\begin{aligned} u(t) &:= \cos(\sqrt{A}t)u_0 + \left(\frac{\sin(\sqrt{A}t)}{\sqrt{A}} \right) u_1 \\ &:= \int_0^\infty \cos(\sqrt{\lambda}t) dE(\lambda) u_0 + \int_0^\infty \frac{\sin(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}} dE(\lambda) u_1 \end{aligned}$$

Dann gelten

(i) $u(t) \in \mathcal{H}$ ist wohldefiniert, denn es gilt $|\cos(\sqrt{\lambda}t)| \leq 1$, $|\frac{\sin \sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}| \leq t$.

(ii) Es gilt $u \in C([0, \infty), \mathcal{H})$, denn

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(t_0)\|^2 &\leq 2 \left\{ \int_0^\infty |\cos \sqrt{\lambda}t - \cos \sqrt{\lambda}t_0|^2 dE_{u_0}(\lambda) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} |\sin \sqrt{\lambda}t - \sin \sqrt{\lambda}t_0|^2 dE_{u_1}(\lambda) \right\} \\ &\rightarrow 0 \quad (t \rightarrow t_0) \end{aligned}$$

mit majorisierter Konvergenz.

(iii) Schließlich rechnet man direkt nach, dass die Differentialgleichung von u erfüllt wird. \square

10.6 Definition. Sei $u_0 \in D(\sqrt{A})$, $u_1 \in \mathcal{H}$. Dann heißt u eine Lösung mit endlicher Energie von $Lu = 0$ für $t \geq 0$ zu u_0, u_1 , falls

- (i) u ist schwache Lösung.
- (ii) $u \in C([0, \infty), D(\sqrt{A})) \cap C^1([0, \infty), \mathcal{H})$.

Die Energie $E(t)$ wird definiert durch $E(t) := \|u(t, \cdot)\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\sqrt{A}u(t, \cdot)\|_{\mathcal{H}}^2$.

Zur Begriffsbildung: $E(t)$ ist die Summe der kinetischen und potentiellen Energie. Im Einzelnen gilt

$$\begin{aligned} E(t) &= \int_G |u_t(t, x)|^2 dx + \int_G |\nabla u(t, x)|^2 dx \\ &= \|u_t(t, \cdot)\|^2 + \|\nabla u(t, \cdot)\|^2 = \|u_t(t, \cdot)\|^2 + \langle -\Delta u, u \rangle(t) \\ &= \|u_t(t, \cdot)\|^2 + \langle Au(t, \cdot), u(t, \cdot) \rangle = \|u_t(t, \cdot)\|^2 + \|\sqrt{A}u(t, \cdot)\|^2 \end{aligned}$$

10.7 Lemma. Es gilt $D(\sqrt{A}) = H_0^1(G)$.

Beweis. Es gilt für alle $u \in D(A)$: $\|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{\sqrt{A}}^2$ und somit $\mathcal{D}(G) \subset D(A) \subset D(\sqrt{A})$. Also ist $H_0^1(G) \subset D(\sqrt{A})$. Mithilfe des Projektionssatzes gilt

$$D(\sqrt{A}) = H_0^1 \oplus (H_0^1)^\perp$$

Sei nun $w \in (H_0^1)^\perp$, dann folgt für alle $u \in D(A)$:

$$0 = \langle u, w \rangle_{\sqrt{A}} = \langle (1 + A)u, w \rangle_{L^2}$$

und also $w = 0$ wegen $R(1 + A) = \mathcal{H}$. □

10.8 Definition. Zu $u_0 \in D(A)$, $u_1 \in D(\sqrt{A})$ heißt u strikte Lösung von $Lu = 0$ für $t \geq 0$ zu u_0, u_1 , falls

- (i) u ist schwache Lösung.
- (ii) $u \in C([0, \infty), D(A)) \cap C^1([0, \infty), D(\sqrt{A})) \cap C^2([0, \infty), \mathcal{H})$.

Für strikte Lösungen macht also $u_{tt}(t, \cdot)$, $Au(t)$ und somit $Lu(t, \cdot) = 0$ Sinn. Die Existenz von Lösungen mit endlicher Energie bzw. von strikten Lösungen wird völlig analog zu der von schwachen Lösungen gezeigt.

10.9 Satz. Für Lösungen mit endlicher Energie, speziell also für strikte Lösungen gilt: Die Energie ist konstant. Im Einzelnen gilt

$$\forall t \geq 0 : E(t) = \|u_1\|^2 + \|\nabla u_0\|^2$$

Beweis. Für strikte Lösungen folgt die Behauptung schnell aus

$$\exists E'(t) = 2 \operatorname{Re}(\langle u_t, u_{tt} \rangle + \langle \sqrt{A}u, \sqrt{A}u_t \rangle) = 2 \operatorname{Re} \langle u_t, u_{tt} + Au \rangle = 0$$

Im allgemeinen Fall

$$u(t) = (\cos(\sqrt{A}t))u_0 + \frac{\sin(\sqrt{A}t)}{\sqrt{A}}u_1$$

also $\sqrt{A}u(t) = \cos(\sqrt{A}t)(\sqrt{A}u_0) + (\sin(\sqrt{A}t))u_1$ und $u_t(t) = -\sin(\sqrt{A}t)\sqrt{A}u_0 + \cos(\sqrt{A}t)u_1$ wegen $u \in C([0, \infty), D(\sqrt{A})) \cap C^1([0, \infty), \mathcal{H})$. Es folgt

$$\begin{aligned} E(t) &= \|u_t(t)\|^2 + \|\sqrt{A}u(t)\|^2 \\ &= \int_0^\infty \left(|\cos(\sqrt{\lambda}t)|^2 + |\sin(\sqrt{\lambda}t)|^2 \right) d(\|E(\lambda)\sqrt{A}u_0\|^2 + \|E(\lambda)u_1\|^2) = \|\nabla u_0\|^2 + \|u_1\|^2 \end{aligned}$$

□

Man kann zeigen, dass für ein Aussengebiet G , gilt

$$E(t, K) := \|u_t(t, \cdot)\|_{L^2(K)} + \|\nabla u(t, \cdot)\|_{L^2(K)}^2 \rightarrow 0$$

für $t \rightarrow \infty$ für $K \subset \bar{G}$ kompakt. Für eine Klasse von Gebieten zum Beispiel das Äußere zu konvexen Hindernissen, kann man Abklingraten angeben, im \mathbb{R}^3 zum Beispiel e^{-ct} , in geraden Dimensionen $t^{-p(n)}$.

11. Elliptische Theorie II: Nichtglatte Gebiete

11.1 Worum geht's? In diesem Abschnitt wird die Theorie harmonischer Funktionen noch einmal aufgegriffen und erweitert. Während das Gebiet bisher immer so glatt war, wie es die Gleichungen und Lösungen erfordert haben, werden jetzt auch nichtglatte Gebiete, d.h. Gebiete, deren Rand nicht mehr differenzierbar ist, betrachtet. Eine Methode, dennoch Lösungen der Potentialgleichung zu erhalten, verwendet subharmonische Funktionen. Der Anfang dieses Abschnitts behandelt die Sätze von Harnack, welche starke Aussagen über harmonische Funktionen zum Inhalt haben.

a) Harnacksche Sätze

Wir erinnern daran, dass eine Funktion u harmonisch oder eine Potentialfunktion heißt, falls $\Delta u = 0$ gilt.

11.2 Satz (Erster Harnackscher Satz). *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^2(G) \cap C(\overline{G})$. Weiter gelte $\Delta u_n = 0$ in G für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(u_n|_{\partial G})_{n \in \mathbb{N}}$ sei gleichmäßig konvergent. Dann konvergiert $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \overline{G} gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion $u \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$.*

Beweis. Unter Verwendung des Maximumprinzips (Satz 4.12) können wir

$$|u_n(x) - u_m(x)| \leq \sup_{y \in \partial G} |u_n(y) - u_m(y)| \rightarrow 0 \quad \text{für } n, m \rightarrow \infty$$

schließen. Damit existiert eine Funktion u so dass die Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \overline{G} gleichmäßig gegen u konvergiert. Nun gilt aber nach Satz 4.11

$$u_m(x) = \frac{1}{R^{n-1} \omega_n} \int_{|y-x|=R} u_m(y) dy$$

für alle $R > 0$ mit $K(x, R) \subset G$. Damit gilt aber auch

$$u(x) = \frac{1}{R^{n-1} \omega_n} \int_{|y-x|=R} u(y) dy$$

und somit ist u eine Potentialfunktion. □

11.3 Satz (Harnacksche Ungleichung). *Sei $u \geq 0$ harmonisch in $K(0, R)$. Dann gilt für $|x| < R$*

$$R^{n-2} \frac{R - |x|}{(R + |x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq R^{n-2} \frac{R + |x|}{(R - |x|)^{n-1}} u(0)$$

Beweis. Zunächst folgt aus der Poissonschen Integralformel (Satz 4.23)

$$u(0) = \frac{1}{R^{n-1}\omega_n} \int_{|y|=R} u(y) dy.$$

Wegen

$$\frac{1}{R+|x|} \leq \frac{1}{|x-y|} \leq \frac{1}{R-|x|}$$

für $|y| = R$ folgt

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{(R-|x|)(R+|x|)}{R\omega_n} \int_{|y|=R} \frac{u(y)}{|x-y|^n} dy \\ &\leq \frac{R^{n-2}(R+|x|)}{(R-|x|)^{n-1}} \frac{1}{R^{n-1}\omega_n} \int_{|y|=R} u(y) dy \\ &= \frac{R^{n-2}(R+|x|)}{(R-|x|)^{n-1}} u(0). \end{aligned}$$

Die verbleibende Ungleichung zeigt man analog. □

11.4 Satz (Verallgemeinerte Harnacksche Ungleichung). *Es seien G und K Gebiete im \mathbb{R}^n mit $K \subset\subset G$. Weiter sei $u \geq 0$ harmonisch. Dann existieren Konstanten $c_1, c_2 > 0$, die nur von K und G abhängen, so dass*

$$c_1 u(x_0) \leq u(x) \leq c_2 u(x_0)$$

für alle $x, x_0 \in \overline{K}$ gilt.

Beweis. Es sei

$$a := \frac{1}{4} \min \{1, \text{dist}(\overline{K}, \partial G)\}$$

Es gilt $\overline{K} \subset \bigcup_{x \in K} K(x, a)$. Somit gibt es wegen der Kompaktheit von \overline{K} gewisse $x_1, \dots, x_r \in K$ so dass

$$\overline{K} \subset \bigcup_{j=1}^r K(x_j, a)$$

gilt. Seien $x_0, x \in \overline{K}$ beliebig gewählt. Es gibt nun eine Kreiskette $K(x_{j_k}, 2a)$, $1 \leq j_k \leq r$, $k = 1, \dots, m \leq r$ mit $x_{j_1} \in K(x_0, 2a)$, $x_{j_{k+1}} \in K(x_{j_k}, 2a)$, $x \in K(x_{j_m}, 2a)$. Aus der Harnackschen Ungleichung (Satz 11.3) folgt, wegen $K(x_0, 4a) \subset G$ für alle $x \in \overline{K}$ nach Definition von a :

$$(4a)^{n-2} \frac{4a - |x_{j_1} - x_0|}{(4a + |x_{j_1} - x_0|)^{n-1}} u(x_0) \leq u(x_{j_1}) \leq (4a)^{n-2} \frac{4a + |x_{j_1} - x_0|}{(4a - |x_{j_1} - x_0|)^{n-1}} u(x_0)$$

Es gilt einerseits

$$(4a)^{n-2} \frac{4a - |x_{j_1} - x_0|}{(4a + |x_{j_1} - x_0|)^{n-1}} \geq (4a)^{n-2} \frac{2a}{(6a)^{n-1}} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

und andererseits

$$(4a)^{n-2} \frac{4a + |x_{j_1} - x_0|}{(4a - |x_{j_1} - x_0|)^{n-1}} \leq (4a)^{n-2} \frac{6a}{(2a)^{n-1}} = 3 \cdot 2^{n-2}$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} u(x_0) \leq u(x_{j_1}) \leq 3 \cdot 2^{n-2} u(x_0)$$

Sukzessive erhalten wir

$$\left(\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right)^{m+1} u(x_0) \leq u(x) \leq (3 \cdot 2^{n-2})^{m+1} u(x_0).$$

□

11.5 Satz (Zweiter Harnackscher Satz). Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Für $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gelte

- (i) u_n sei für $n \in \mathbb{N}$ harmonisch in G ,
- (ii) $\forall x \in G \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1}(x) \geq u_n(x)$,
- (iii) $\exists k > 0 \exists x_0 \in G \forall n \in \mathbb{N} : u_n(x_0) \leq k$.

Dann gilt konvergiert $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig in jedem Gebiet B mit $\overline{B} \subset G$ gegen eine dort harmonische Funktion u .

Beweis. Sei $B \subset G$ ein Gebiet mit $\overline{B} \subset G$ und o.B.d.A. $x_0 \in \overline{B}$. Die Folge $(u_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ ist nach oben beschränkt und monoton wachsend, also konvergent. Aus der verallgemeinerten Harnackschen Ungleichung (Satz 11.4) folgt

$$0 \leq u_{n+p}(x) - u_n(x) \leq c_2(u_{n+p}(x_0) - u_n(x_0))$$

für alle $x \in \overline{B}$ und alle $p \in \mathbb{N}$. Damit ist also $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine gleichmäßige Cauchyfolge in \overline{B} . Der erste Harnacksche Satz (Satz 11.2) liefert nun die Behauptung. □

b) Die Perronsche Methode

Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Ziel dieses Abschnitts ist es, die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 & \text{für } x \in G \\ u(x) &= f(x) & \text{für } x \in \partial G \end{aligned} \quad (11-1)$$

bei gegebenem $f \in C(\partial G)$ für möglichst allgemeine Ränder ∂G zu lösen.

11.6 Definition. Für eine Kugel $K \subset G$ und $u \in C(\overline{G})$ sei

$$(M_K u)(x) := \begin{cases} u(x), & x \in G \setminus \overline{K} \\ v(x), & x \in \overline{K} \end{cases}$$

dabei ist die Funktion $v \in C^2(K) \cap C(\overline{K})$ Lösung von $\Delta v = 0$, $v|_{\partial K} = u|_{\partial K}$.

Offensichtlich gilt $M_K^2 = M_K$. Im \mathbb{R}^1 entspricht dies einer linearen Mittelung (Abb 10).

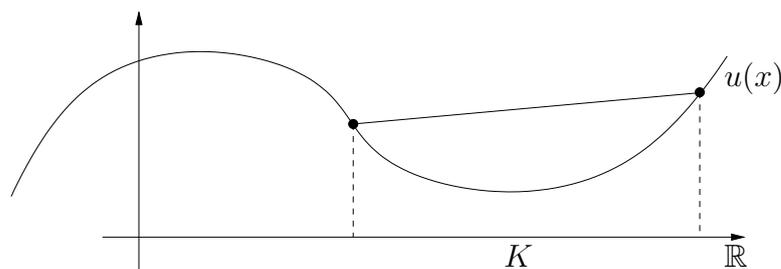


Abbildung 10: Lineare Mittelung

11.7 Definition. Eine Funktion $u \in C(\overline{G})$ heißt

(i) subharmonisch, falls

$$\forall K \subset G \forall x \in G : u(x) \leq (M_K u)(x)$$

(ii) lokal subharmonisch, falls für alle $x \in G$ eine Umgebung $U(x)$ existiert, so dass u in $U(x)$ subharmonisch ist.

(iii) superharmonisch, falls

$$\forall K \subset G \forall x \in G : u(x) \geq (M_K u)(x)$$

(iv) lokal superharmonisch, falls für alle $x \in G$ eine Umgebung $U(x)$ existiert, so dass u in $U(x)$ superharmonisch ist.

11.8 Lemma. Für eine Funktion $u \in C^2(G)$ mit $\Delta u \geq 0$ gilt das Maximumprinzip.

Beweis. Wir führen den Beweis o.B.d.A. im \mathbb{R}^3 . Es sei $f := -\Delta u$, das heißt $f \leq 0$. Weiter sei u nicht konstant. Wir nehmen an, dass u in $x_0 \in G$ ein Maximum hat. Es existiert dann ein $\tau > 0$ so dass

$$\frac{1}{4\pi\tau^2} \int_{|x-x_0|=\tau} u(x) dx < u(x_0)$$

gilt. Sei g die Greensche Funktion zu $B(x_0, \tau)$. Aus der Darstellungsformel (Satz 4.9) und der Formel für die Greensche Funktion (Lemma 4.22) folgt

$$\begin{aligned} u(x_0) &= \int_{|y-x_0| \leq \tau} f(y)g(x_0, y) dy - \int_{|y-x_0|=\tau} u(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} g(x_0, y) dy \\ &\leq - \int_{|y-x_0|=\tau} u(y) \left\{ \frac{|x_0 - x_0|^2 - \tau^2}{4\pi\tau} \frac{1}{|x_0 - y|^3} \right\} dy \\ &= \frac{1}{4\pi\tau^2} \int_{|y-x_0|=\tau} u(y) dy < u(x_0) \end{aligned}$$

□

11.9 Korollar. Eine Funktion $u \in C^2(G)$ mit $\Delta u \geq 0$ ist subharmonisch.

Beweis. Es ist $(u - M_K u)|_{\partial K} = 0$ und $u - M_K u$ erfüllt das Maximumprinzip. Daraus folgt $u - M_K u \leq 0$ in K . □

11.10 Definition. Für $f \in C(\partial G)$ sei

$$\mathcal{F} := \{u \in C(\overline{G}) : u \text{ ist subharmonisch und } u|_{\partial G} \leq f\}$$

die Menge der Subfunktionen zu f und

$$\mathcal{H} := \{u \in C(\overline{G}) : u \text{ ist superharmonisch und } u|_{\partial G} \geq f\}$$

die Menge der Superfunktionen zu f . Die Funktion u mit $u(x) := \sup_{g \in \mathcal{F}} g(x)$ für $x \in \overline{G}$ heißt verallgemeinerte Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe.

11.11 Bemerkung (Eigenschaften subharmonischer Funktionen).

- Falls $u \in C(\overline{G})$ mit $u \geq 0$ ist, so ist auch $M_K u \geq 0$.
- Für $u, v \in C(\overline{G})$ mit $u \leq v$ folgt $M_K u \leq M_K v$ (Monotonie).
- Falls u subharmonisch ist, so ist $-u$ superharmonisch.
- Sind $(u_i)_{i=1, \dots, N}$ subharmonisch [superharmonisch], so ist für alle $c_i \geq 0$ auch $\sum_{i=1}^N c_i u_i$ subharmonisch [superharmonisch].

11.12 Lemma. a) Ist u lokal subharmonisch [superharmonisch], so genügt u dem Maximumprinzip [Minimumprinzip].

b) Ist u lokal subharmonisch, so ist u subharmonisch.

c) Sind u_1, \dots, u_N subharmonisch [superharmonisch], so ist auch die Funktion $u : x \mapsto \max[\min]\{u_1(x), \dots, u_N(x)\}$ subharmonisch [superharmonisch].

Beweis. a) Sei u nicht konstant und habe in $x_0 \in G$ ein Maximum. Nach Voraussetzung existiert eine Umgebung $U = U(x_0)$ von x_0 so dass u in $U(x_0)$ subharmonisch ist. Wir wählen $r > 0$ geeignet mit $K := B(x_0, r) \subset U(x_0)$. Sei $M := \max_{x \in \partial K} u(x)$. Dann folgt

$$M \leq u(x_0) \leq (M_K u)(x_0) \leq M$$

Damit folgt offensichtlich $(M_K u)(x_0) = M$. Da $M_K u$ das Maximumprinzip erfüllt, folgt $(M_K u)(x) = M$ für alle $x \in \overline{K}$. Weiter bedeutet dies $u|_{\partial K} = M$ und weiter (variieren den Radius r) $u|_{\overline{K}} = M$. Nun ist also $T := \{x : u(x) = M\}$ offen in G aber auch abgeschlossen, da u stetig ist. Damit gilt $T = G$ was im Widerspruch zur Annahme steht.

b) Es sei $K \subset G$ eine beliebige Kugel und $v := M_K u$. Es ist $w := u - v$ lokal subharmonisch in K und es gilt $w|_{\partial K} = 0$. Mit a) ergibt sich $w|_K \leq 0$ und das wurde behauptet.

c) Es sei $K \subset G$ eine beliebige Kugel. Es gilt dann für alle $i = 1, \dots, N$: $u_i \leq M_K u_i$. Weiter ist aber $M_K u_i \leq M_K u$ und somit gilt $u \leq M_K u$. \square

11.13 Lemma. Ist u subharmonisch, so ist auch $v := M_K u$ subharmonisch.

Beweis. Nach Lemma 11.12 b) ist zu zeigen:

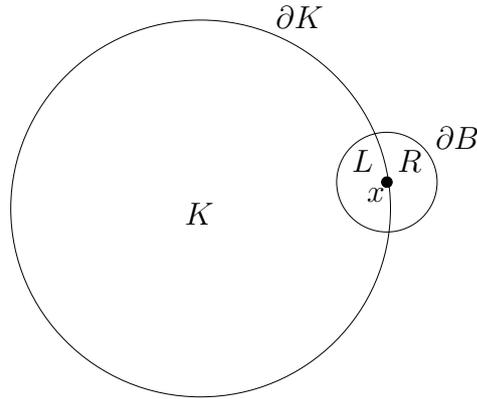
$$\forall x \in G \exists U(x) \subset G \forall B \subset U : v \leq M_B v$$

Wir unterscheiden drei Fälle

- (i) $x \in K$: $U(x) \subset K$ beliebig, dann ist v Potentialfunktion in K , also insbesondere subharmonisch in K .
- (ii) $x \in G \setminus \overline{K}$: $U(x)$ mit $U(x) \cap \overline{K} = \emptyset$. Dann folgt $v = u$ in $U(x)$, also subharmonisch.
- (iii) $x \in \partial K$, $B \subset U(x)$, $U(x)$ so klein, dass folgende Situation vorliegt:

Es ist $u \leq v = M_K u$ nach Voraussetzung. Damit folgt aus Bemerkung 11.11 b) $u \leq M_B u \leq M_B v$. In $L := K \cap B$ gilt

$$\max\{(v - M_B v)|_{\partial L}\} = \max\{(v - M_B v)|_{\partial L \cap \partial K}\} = \max\{(u - M_B v)|_{\partial L \cap \partial K}\} \leq 0$$



Damit folgt aus dem Maximumprinzip $v \leq M_B v$ in \bar{L} . In $R := B \setminus \bar{K}$ ist $v = u$.
Damit erhalten wir

$$\max\{(v - M_B v)_{\partial R}\} = \max\{(u - M_B v)|_{\partial R}\} = \leq 0$$

und weiter $v \leq M_B v$ in \bar{R} . Insgesamt also $v \leq M_B v$ in \bar{B} .

□

11.14 Definition. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $f \in C(\partial G)$. Dann definiert man

$$f_+ := \max_{\partial G} f \quad (\text{Superfunktion})$$

$$f_- := \min_{\partial G} f \quad (\text{Subfunktion})$$

11.15 Lemma. Zu $f \in C(\partial G)$ sei \mathcal{F} wie in Definition 11.10 definiert.

- a) Für alle $u \in \mathcal{F}$ gilt $u \leq f_+$.
- b) Falls $u_1, \dots, u_N \in \mathcal{F}$, so gilt $x \mapsto \max\{u_1(x), \dots, u_N(x)\} \in \mathcal{F}$.
- c) Falls $u \in \mathcal{F}$, so gilt $M_K u \in \mathcal{F}$ für alle Kugeln $K \subset G$.
- d) Für $u \in \mathcal{F}$ und $v \in \mathcal{H}$ gilt $u \leq v$.

Beweis. a) gilt nach Lemma 11.12 a).

b) gilt nach Lemma 11.12 c).

c) $v := M_K u$ ist subharmonisch nach Lemma 11.13.

d) gilt nach Lemma 11.12 a).

□

11.16 Satz. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $f \in C(\partial G)$.

- a) Es gibt genau eine verallgemeinerte Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe.
 b) Sei $U \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ eine klassische Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe und u die verallgemeinerte Lösung. Dann gilt $u = U$.

Beweis. a) folgt direkt aus der Definition.

b) Offensichtlich gilt $U \in \mathcal{F}$. Daraus folgt $U(x) \leq u(x)$ nach Definition von u . Sei nun $v \in \mathcal{F}$ beliebig gewählt. Offenbar ist $(v - U)|_{\partial G} \leq 0$, also $v \leq U$ und damit $u \leq U$. \square

11.17 Satz (Lokaler Regularitätssatz). Es sei u die verallgemeinerte Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe. Dann gilt

- (i) u ist in \overline{G} beschränkt und es gilt $f_- \leq u \leq f_+$.
 (ii) $u \in C^2(G)$.
 (iii) $\Delta u = 0$ in G .

Beweis. (i) Offenbar gilt $v \leq f_+$ für alle $v \in \mathcal{F}$, damit gilt auch $u \leq f_+$. Ferner gilt $f_- \in \mathcal{F}$, woraus $f_- \leq u$ folgt.

(ii) Sei $x_0 \in G$ beliebig aber fest gewählt. Weiter sei $r > 0$ so gewählt, dass $\overline{K} \subset G$ für $K := K(x_0, r)$ gilt. Wir wählen nun eine Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ mit $v_n(x_0) \rightarrow u(x_0)$. Sei $w_n := \max\{v_1, \dots, v_n\} \in \mathcal{F}$. Wegen $v_n(x_0) \leq w_n(x_0) \leq u(x_0)$ folgt $w_n(x_0) \rightarrow u(x_0)$. Nach Konstruktion gilt aber auch $w_{n+1}(x) \geq w_n(x)$. Sei $W_n(x) := (M_K w_n)(x)$. Nun ist W_n in K harmonisch und es gilt $W_{n+1} \geq W_n$ sowie $W_n \leq f_+$, somit folgt aus dem zweiten Harnackschen Satz (Satz 11.5), dass ein W existiert, so dass $W_n \rightarrow W$ in jeder Kugel K' mit $\overline{K'} \subset K$ gilt. Demnach ist W harmonisch in K . Ergo

$$u(x_0) \leftarrow w_n(x_0) \leq M_K w_n(x_0) = W_n(x_0) \leq u(x_0)$$

Daraus folgt

$$W(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n(x_0) = u(x_0)$$

Wir zeigen nun, dass $u(x) = W(x)$ für alle $x \in K'$ gilt. Dazu nehmen wir an, dass ein $x_1 \in K'$ mit $x_1 \neq x_0$ und $W(x_1) \neq u(x_1)$ existiert. Damit existiert also ein $w \in \mathcal{F}$ mit $w(x_1) > W(x_1)$. Es sei $K_1 := K(x_0, \rho)$ mit $x_1 \in \partial K_1$. Es sei

$$g_n := M_{K_1}(\max\{W_n, w\}) \in \mathcal{F}$$

Da $(W_n)_n$ in $\overline{K_1}$ gleichmäßig konvergiert, konvergiert $f_n := \max\{W_n, w\}$ auf ∂K_1 gleichmäßig und deshalb auch g_n auf ∂K_1 . Somit folgt nach dem ersten Harnackschen Satz (Satz 11.2), dass $(g_n)_n$ gleichmäßig in $\overline{K_1}$ gegen eine harmonische Funktion g konvergiert. Da $M_{K_1}(\max\{W, w\})$ harmonisch in K_1 ist und an der Stelle $x_1 \in \partial K_1$ größer als W ist, folgt nach der Mittelwerteigenschaft auch

$$g_n(x_0) \rightarrow g(x_0) = M_{K_1}(\max\{W, w\})(x_0) > W(x_0) = u(x_0)$$

Andererseits gilt

$$g_n(x_0) \leq u(x_0) \implies g(x_0) \leq u(x_0)$$

was nicht sein kann. □

c) Dirichletsche Gebiete

Wir betrachten nun das Randverhalten der verallgemeinerten Lösung und gelangen zur Charakterisierung von ∂G . Im folgenden sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet.

11.18 Definition. (i) Es sei $y \in \partial G$ fest. $b(\cdot, y)$ heißt Barriere zu y , falls

- (a) $b(\cdot, y)$ superharmonisch in G ist,
- (b) $b(\cdot, y) > 0$ in $\overline{G} \setminus \{y\}$ ist, sowie
- (c) $b(y, y) = 0$ gilt.

(ii) Es sei $y \in \partial G$ fest. $w(\cdot, y)$ heißt lokale Barriere zu y , falls eine Kugel $K = B(y, r)$ existiert, so dass

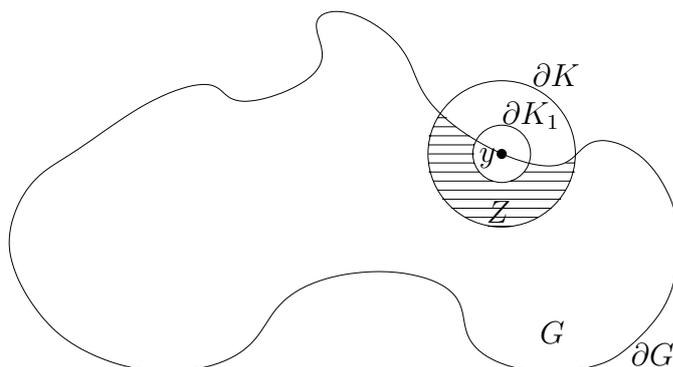
- (a) $w(\cdot, y)$ superharmonisch in $G \cap K$ ist,
- (b) $w(\cdot, y) > 0$ in $\overline{G} \cap \overline{K} \setminus \{y\}$ ist, sowie
- (c) $w(y, y) = 0$ gilt.

11.19 Satz. Zu $y \in \partial G$ existiere eine lokale Barriere. Dann gibt es zu y eine Barriere.

Beweis. Es sei w eine lokale Barriere zu y in $K = B(y, r)$. Sei weiter $K_1 := B(y, \frac{r}{2})$ und $Z := \overline{G} \cap (\overline{K} \setminus K_1)$. Mit $m := \min_{x \in Z} w(x, y) > 0$ definieren wir

$$b(x, y) := \begin{cases} \min\{m, w(x, y)\}, & x \in \overline{G} \cap \overline{K} \\ m, & x \in \overline{G} \setminus \overline{K_1} \end{cases}$$

Es wird sich nun zeigen, dass b eine Barriere zu y ist.



Zunächst ist klar, dass $b(\cdot, y) > 0$ in $\overline{G} \setminus \{y\}$ gilt, denn es ist $m > 0$ und $w > 0$. Weiter gilt $b(y, y) = 0$ wegen $w(y, y) = 0$. Zu beweisen ist also nur noch, dass $b(\cdot, y)$ superharmonisch in G ist. Es ist $b = \min\{m, w(\cdot, y)\}$ lokal superharmonisch in $\overline{G} \cap \overline{K}$. Weiter ist $b = m$ lokal superharmonisch in $\overline{G} \setminus \overline{K}_1$. Damit ist b lokal superharmonisch in G und damit folgt die Behauptung aus Lemma 11.12 b). \square

11.20 Definition. (i) Ein Punkt $y \in \partial G$ heißt regulärer Randpunkt, falls zu y eine (lokale) Barriere existiert.

(ii) G heißt dirichletsch, falls alle Randpunkte regulär sind.

11.21 Satz. Es sei $y \in \partial G$ ein regulärer Randpunkt. Dann ist die verallgemeinerte Lösung u in y stetig und es gilt $u(y) = f(y)$.

Beweis. Es sei $y \in \partial G$ fest und b eine Barriere zu y . Wegen der Stetigkeit von f gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \partial G, |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Demnach gilt aber auch

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k > 0 \forall x \in \partial G : |f(x) - f(y)| < \varepsilon + kb(x, y),$$

denn für $|x - y| > \delta$ ist b positiv. Setze $v(x) := f(y) - \varepsilon - kb(x, y)$ ($x \in G$) und $V(x) := f(y) + \varepsilon + kb(x, y)$. Dann ist $v \in \mathcal{F}$ und $V \in \mathcal{H}$ und damit Es gilt

$$v(x) \leq u(x) \leq V(x) \quad (x \in G).$$

Weiter gilt für alle $x \in \overline{G}$:

$$u(x) - f(y) \leq V(x) - f(y) = \varepsilon + kb(x, y)$$

$$u(x) - f(y) \geq v(x) - f(y) = -(\varepsilon + kb(x, y))$$

und somit

$$|u(x) - f(y)| \leq \varepsilon + kb(x, y) \leq 2\varepsilon$$

für $x \rightarrow y$ wegen $b(y, y) = 0$. □

11.22 Korollar. *Ist G dirichletsch, so ist die Dirichletsche Randwertaufgabe klassisch lösbar.*

Beweis. Nach Satz 11.21 ist die verallgemeinerte Lösung eine klassische Lösung. □

11.23 Satz. *Für alle $f \in C(\partial G)$ sei die Dirichletsche Randwertaufgabe im klassischen Sinn lösbar. Dann ist G dirichletsch.*

Beweis. Es sei $y \in \partial G$ fest. Damit definieren wir $F_y(x) := |x - y|$. Offenbar ist dann $F_y \in C(\overline{G}) \cap C^2(G)$. Sei $b(\cdot, y)$ eine klassische Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe zu $f := F_y \in C(\partial G)$. Dann ist b eine Barriere, denn

- (i) b ist superharmonisch, da b harmonisch ist.
- (ii) Ist $x \in \partial G$, so gilt $b(x, y) = F_y(x) \geq 0$ und $b(x, y) > 0$ falls $x \in \partial G \setminus \{y\}$. Mit Hilfe des Minimumprinzips für $b(\cdot, y)$ folgt $b(x, y) > 0$ in G .
- (iii) $b(y, y) = 0$.

□

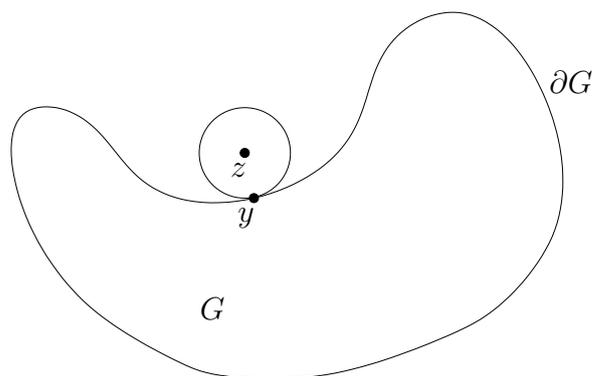


Abbildung 11: Kann eine Kugel so an einen Randpunkt angelegt werden, so ist der Randpunkt regulär.

11.24 Lemma (Regularität von Randpunkten im \mathbb{R}^n). Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Dann ist $y \in \partial G$ ein regulärer Randpunkt, falls eine Kugel $K = B(z, r)$ existiert, so dass $K \cap G = \emptyset$ und $\overline{K} \cap \overline{G} = \{y\}$ gilt. (Abb. 11)

Beweis. Die Abbildung b mit $b(x, y) := \frac{1}{r^{n-2}} - \frac{1}{|x-z|^{n-2}}$ ist eine Barriere zu y . \square

Hier gibt es sogar ein wesentlich besseres Resultat.

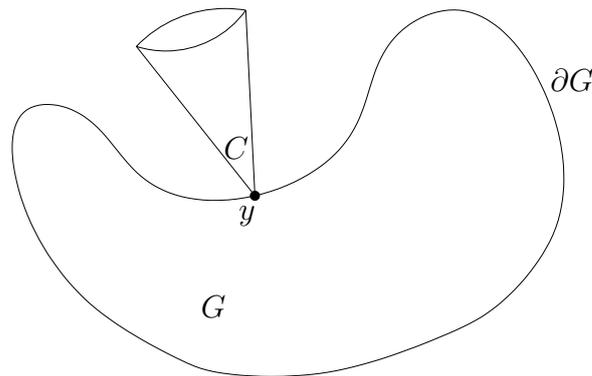


Abbildung 12: Kann ein Kegel so an einen Randpunkt angelegt werden, so ist der Randpunkt regulär.

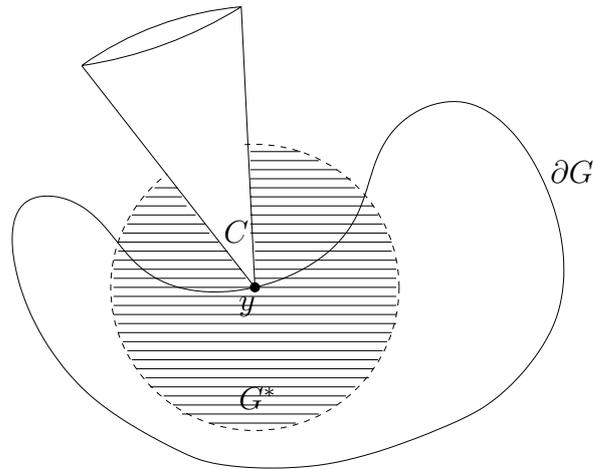
11.25 Lemma (Regularität von Randpunkten im \mathbb{R}^n , Teil 2). Sei $n \geq 3$ und $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Dann ist $y \in \partial G$ ein regulärer Randpunkt, falls ein Kegel C mit Spitze in y existiert, so dass $C \cap G = \emptyset$ und $\overline{C} \cap \overline{G} = \{y\}$ gilt. (Abb. 12)

Beweis. Wir konstruieren eine Barriere zu G^* , wobei $G^* := (\mathbb{R}^n \setminus \overline{C}) \cap B(y, R)$, für $R := \frac{1}{2}h$. Hierbei ist h die Höhe des genannten Kegels C (Abb. 13). Es sei $F_y(x) := |x - y|$ und $b^*(x, y)$ die verallgemeinerte Lösung in G^* zu $F_y|_{\partial G^*}$. Weiter sei

$$b(x, y) := \begin{cases} b^*(x, y), & x \in G^* \\ \lim_{z \rightarrow x, z \in G^*} b^*(z, y), & x \in \partial G^* \end{cases}$$

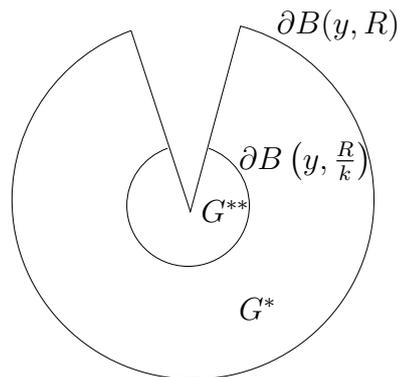
Wir beweisen, dass b wohldefiniert und eine Barriere in G^* zu y ist. Es gilt

- (i) $\Delta_x b(\cdot, y) = 0$ in G^* , da verallgemeinerte Lösungen harmonisch sind und $b = b^*$ in G^* gilt.
- (ii) Alle Randpunkte bis auf y sind schon regulär. Das bedeutet $b(\cdot, y) \in C(\overline{G^*} \setminus \{y\})$ nach Satz 11.21.

Abbildung 13: Die Menge G^* .

(iii) Wegen $\Delta_x F_y = \frac{n-1}{|x-y|} > 0$ ist F_y subharmonisch. Weiter gilt $b^*(x, y) \geq F_y(x) = |x-y| > 0$ in $\overline{G^*} \setminus \{y\}$, da $F_y \in \mathcal{F}$ und b^* die verallgemeinerte Lösung ist. Daraus folgt $b(x, y) > 0$ in G^* , da $b = b^*$ in G^* , und $b(x, y) > 0$ in $\overline{G^*} \setminus \{y\}$, da $b^* \in C(G^* \setminus \{y\})$ und alle Punkte außer y regulär sind.

Zu zeigen ist noch, dass $\lim_{x \rightarrow y} b^*(x, y) = 0$ gilt. Nach dem Maximumprinzip ist $0 \leq b^*(x, y) \leq R$. Sei $v(x) := b^*(x, y)$ und $\bar{v} := \limsup_{x \rightarrow y} v(x)$. Zu zeigen ist dann wiederum: $\bar{v} = 0$. Hierzu nehmen wir an, dass $\bar{v} > 0$ gilt. Sei $k > 1$ und $G^{**} := (\mathbb{R}^n \setminus \overline{C}) \cap K(y, \frac{R}{k})$ (Abb. 14). Sei $w(x) := v(kx)$ wobei oBdA. $y = 0$ sei.

Abbildung 14: Die Menge G^{**} .

(a) Es existiert ein $c_1 < 1$ mit $v|_{\partial G^{**} \setminus \{y\}} \leq c_1 w|_{\partial G^{**} \setminus \{y\}}$, denn

(i) Für $x \in \partial G^{**} \cap \partial C \setminus \{y\}$ gilt $w(x) = v(kx) = kv(x)$.

(ii) Für $x \in \partial G^{**} \cap \partial B(y, \frac{R}{k})$ gilt $w(x) = v(kx) = |kx| = R$. Wegen $0 \leq v \leq R$ in G^* , v Potentialfunktion, nicht konstant, ist nach dem Maximumprinzip $v(x) < R$. Das bedeutet, dass ein $c_2 < 1$ existiert mit $v(x) < c_2 w(x)$.

(iii) Setze $c_1 := \max\{\frac{1}{k}, c_2\}$.

(b) Sei $g := v - c_1 w$ in $\overline{G^{**}} \setminus \{y\}$. Wegen $0 \leq v \leq R$ in G^* gilt $|g| \leq 2R$ in $\overline{G^{**}} \setminus \{y\}$. Weiter ist g stetig in $\overline{G^{**}} \setminus \{y\}$ und es gilt $\Delta g = 0$ in G^{**} . Dann ist mit $m := \inf_{x \in \partial G^{**} \setminus \{y\}} g(x)$ und $M := \sup_{x \in \partial G^{**} \setminus \{y\}} g(x)$

$$\forall x \in G^{**} : m \leq g(x) \leq M$$

Dieses verallgemeinerte Maximumprinzip (Satz 11.26) wird im Anschluss bewiesen.

(c) Da $g|_{\overline{G^{**}} \setminus \{y\}} \leq 0$ gilt, folgt für alle $x \in G^{**}$ $g \leq 0$. Das bedeutet aber

$$0 < \bar{v} = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} v(x) \leq c_1 \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} w(x) = c_1 \bar{v} < \bar{v}$$

□

11.26 Satz (Verallgemeinertes Maximumprinzip). Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $n > 2$ und $y \in \partial B$. Es sei $g \in C^2(B)$ mit

- (i) $\Delta g = 0$ in B
- (ii) $g \in C(\overline{B} \setminus \{y\})$
- (iii) $|g| \leq \text{const}$ in $\overline{B} \setminus \{y\}$.

Dann gilt mit $m := \inf_{x \in \partial B \setminus \{y\}} g(x)$ und $M := \sup_{x \in \partial B \setminus \{y\}} g(x)$

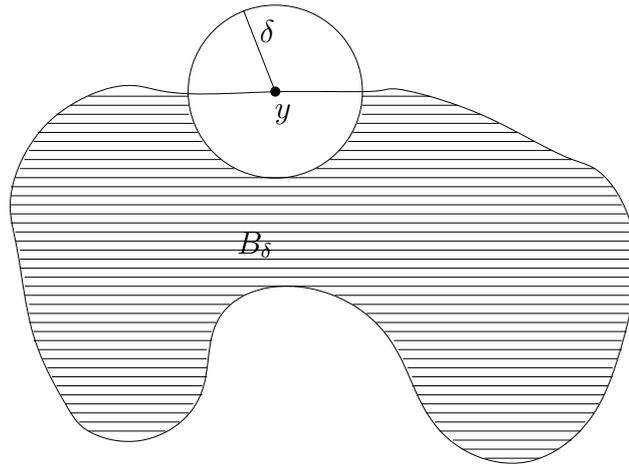
$$\forall x \in B : m \leq g(x) \leq M$$

Beweis. Es sei $B_\delta := \{x \in B : |x - y| > \delta\}$ (Abb. 15). Sei zu $\varepsilon > 0$

$$g_\varepsilon(x) := M + \frac{\varepsilon}{|x - y|^{n-2}}.$$

Dann folgt $g_\varepsilon(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow y \in \partial B$. Nach Definition von M und g_ε gilt $g < g_\varepsilon$ auf $\partial B \setminus \partial B(y, \delta)$. Da g beschränkt ist, gilt auch $g_\varepsilon \geq C > M$ auf $\partial B(y, \delta)$ für hinreichend kleines δ . Damit erhalten wir

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_0 > 0 \forall \delta < \delta_0 \forall x \in \partial B_\delta : g(x) < g_\varepsilon(x)$$

Abbildung 15: Die Menge B_δ

Es folgt nun

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_0 > 0 \forall \delta < \delta_0 \forall x \in B_\delta : g(x) < g_\varepsilon(x),$$

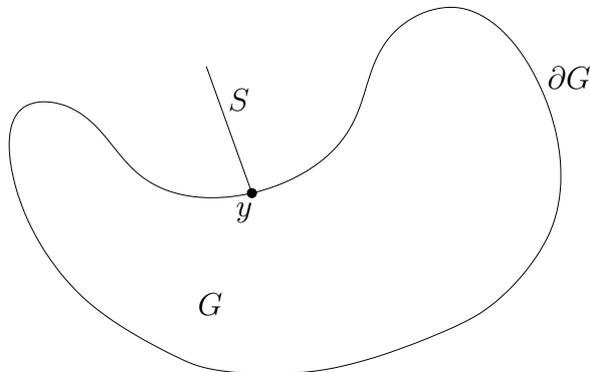
denn es gilt $\Delta(g - g_\varepsilon) = 0$ in B_δ , $g - g_\varepsilon \in C^2(B_\delta \cap C(\overline{B_\delta}))$. Damit folgt aus dem Maximumprinzip

$$(g - g_\varepsilon)|_{B_\delta} \leq (g - g_\varepsilon)|_{\partial B_\delta} < 0$$

Sei nun $x \in B$ fest und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wähle $\delta_1 < \delta_0$ mit $x \in B_{\delta_1}$, dann folgt $g(x) < M + \frac{\varepsilon}{|x-y|^{n-2}}$ und damit $g(x) \leq M$. Analog für $g(x) \geq m$. \square

11.27 Lemma (Regularität im \mathbb{R}^2). Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet. Dann ist $y \in \partial G$ ein regulärer Randpunkt, falls eine offene Strecke S mit $S \cap G = \emptyset$ und $\overline{S} \cap \overline{G} = \{y\}$ existiert.

Beweis. Es ist w mit $w(x, y) := -\operatorname{Re} \frac{1}{\log z}$ eine lokale Barriere. \square



d) Regularität der Lösung

11.28 Satz (Regularität im Inneren). Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und seien $u, f \in L^1_{loc}(G)$ mit $-\Delta u = f$ (als Gleichheit in $\mathcal{D}'(G)$). Sei $z \in G$, $r > 0$ mit $B(z, 3r) \subset G$, und $\zeta \in \mathcal{D}(G)$ mit $\zeta = 1$ in $B(z, 2r)$. Dann gilt

$$u(y) = \int_G f(x)\zeta(x)g(x, y)dx + \tilde{u}(y) \quad (y \in B(z, r)),$$

wobei g die Grundlösung zum Laplace-Operator ist (siehe Satz 4.7) und $\tilde{u} \in C^\infty(G)$.

Falls $f \in C^1(G)$, so ist $u \in C^2(G)$, und es gilt $-\Delta u = f$ fast überall.

Beweis. (i) Sei $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ mit $\text{supp } \varphi \subset B(z, r)$. Definiere

$$v(x) := \int_G g(x, y)\varphi(y)dy \quad (x \in G).$$

Dann ist $v \in C^\infty(G)$, denn etwa die erste Ableitung kann dargestellt werden als

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_G \varphi(y)g(x, y)dy &= \int_G \varphi(y) \frac{\partial}{\partial x_1} g(x, y)dy \\ &= \int_G \varphi(y) \frac{\partial}{\partial y_1} g(x, y)dy \\ &= \int_G -\frac{\partial}{\partial y_1} \varphi(y)g(x, y)dy. \end{aligned}$$

Da g die Grundlösung ist, gilt $\varphi = -\Delta_x v = -\Delta_x(\zeta v) - \Delta_x((1 - \zeta)v) =: \varphi_1 + \varphi_2$.

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} [u](\varphi_1) &= [u](-\Delta_x(\zeta v)) = -\Delta_x[u](\zeta v) \\ &= [f](\zeta v) = \int_G f(x)\zeta(x)v(x)dx \\ &= \int_G f(x)\zeta(x) \left[\int_{B(z, r)} g(x, y)\varphi(y)dy \right] dx \\ &= \int_{B(z, r)} \left[\int_G f(x)\zeta(x)g(x, y)dx \right] \varphi(y)dy. \end{aligned}$$

Für φ_2 berechnet man

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= \Delta_x \left[\int_G (1 - \zeta(x))g(x, y)\varphi(y)dy \right] \\ &= \int_{B(z, r)} F(x, y)\varphi(y)dy \end{aligned}$$

mit

$$F(x, y) := -\Delta_x[(1 - \zeta(x))g(x, y)].$$

Es gilt $F \in C^\infty(G \times B(z, r))$, da die Grundlösung $g(x, y)$ für $x \neq y$ unendlich oft differenzierbar ist und $1 - \zeta = 0$ auf $B(z, r)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} [u](\varphi_2) &= \int_G u(x) \left[\int_{B(z, r)} F(x, y) \varphi(y) dy \right] dx \\ &= \int_{B(z, r)} \left[u(x) F(x, y) dx \right] \varphi(y) dy. \end{aligned}$$

(iii) Nach (ii) gilt

$$[u](\varphi) = \int_{B(z, r)} \left[\int_G f(x) (\zeta(x)g(x, y) + u(x)F(x, y)) dx \right] \varphi(y) dy.$$

Also gilt

$$u(y) = \int_G f(x) (\zeta(x)g(x, y) + u(x)F(x, y)) dx \quad (y \in B(z, r))$$

als Gleichheit fast überall. Setze nun

$$\tilde{u}(y) := \int u(x)F(x, y)dx,$$

dann gilt $\tilde{u} \in C^\infty(B(z, r))$, und man erhält die behauptete Gleichheit.

(iv) Falls $f \in C^1(G)$, so ist $\zeta f \in C_c^1(G)$, und dieselbe Rechnung wie in (i) zeigt $u \in C^2(G)$ (beachte, dass $\partial_y g(x, y) \in L_{loc}^1(G)$ gilt). Wegen $\Delta_y F(x, y) = 0$ folgt

$$\Delta_y u(y) = \zeta(y)f(y) = f(y) \quad (y \in B(z, r)).$$

□

Die Glattheitsaussage des letzten Satzes lässt sich noch verfeinern, wenn man Hölder-räume als Grundlage nimmt. Der folgende Satz wird nicht bewiesen.

11.29 Satz (Weylsches Lemma). *Es sei $A = a_{ik}\partial_i\partial_k + a_i\partial_i + a$ mit $a_{ik} \in C^{2,\alpha}(G)$, $a_i \in C^{1,\alpha}(G)$, $a \in C^1(G)$, $\xi_i a_{ik}(x) \xi_k \geq p|\xi|^2$ für $x \in G$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $p > 0$ fest. Es gelte $u \in L_{loc}^1(G)$, $Au = f$ im distributionellen Sinn, $f \in C^{0,\alpha}(G)$. Dann stimmt u fast überall mit einer Funktion aus $C^{2,\alpha}(G)$ überein.*

A. Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis

A.1 Worum geht's? In diesem Abschnitt werden einige Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis ohne Beweis bereitgestellt. Dabei geht es um elementare Hilbertraumtheorie wie etwa den Projektionssatz und den Satz von Riesz, aber auch um den Spektralsatz. Die Funktionalanalysis ist für eine weitergehende Analyse partieller Differentialgleichungen unerlässlich.

a) Hilbertraumtheorie

Wir beginnen mit einigen Definitionen in Hilberträumen. Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum (d.h. ein vollständiger Raum mit Skalarprodukt) über dem Körper \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Zu einer Teilmenge $A \subset \mathcal{H}$ definiert man den Orthogonalraum

$$A^\perp := \{x \in \mathcal{H} : \forall a \in A : \langle a, x \rangle = 0\}.$$

Es gilt $A^\perp = \overline{A}^\perp$, A^\perp ist stets abgeschlossen, und $A \subset \mathcal{H}$ ist genau dann dicht in \mathcal{H} , falls $A^\perp = \{0\}$.

A.2 Satz (Projektionssatz). *Sei H ein Hilbertraum und $A \subset \mathcal{H}$ ein abgeschlossener linearer Unterraum. Dann lässt sich \mathcal{H} zerlegen als*

$$\mathcal{H} = A \oplus A^\perp,$$

d.h. jedes $u \in \mathcal{H}$ lässt sich eindeutig schreiben als $u = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in A$ und $u_2 \in A^\perp$.

Zu normierten Räumen E, F definiert man wie üblich

$$L(E, F) := \{T : E \rightarrow F \mid T \text{ linear, stetig}\},$$

die Menge der linearen stetigen Operatoren von E nach F . Ein linearer Operator $T : E \rightarrow F$ ist genau dann stetig, wenn er beschränkt ist. Im Falle $F = \mathbb{K}$, d.h. $F = \mathbb{R}$ bzw. $F = \mathbb{C}$ schreibt man $E' := L(E, \mathbb{K})$ und spricht vom topologischen Dualraum von E . Wenn nichts anderes vereinbart wird, wird $L(E, F)$ stets mit der Operatornorm versehen, d.h. mit der Norm

$$\|T\| := \sup_{u \in E \setminus \{0\}} \frac{\|Tu\|_F}{\|u\|_E}.$$

Im Hilbertraumfall lässt sich der Dualraum einfach beschreiben, wie der folgende Darstellungssatz von Riesz zeigt.

A.3 Satz (von Riesz). Sei \mathcal{H} Hilbertraum. Dann ist die Abbildung

$$i_{\mathcal{H}}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}', v \mapsto \langle \cdot, v \rangle$$

wohldefiniert, bijektiv, isometrisch und konjugiert linear (d.h. $i_{\mathcal{H}}(c_1v_1 + c_2v_2) = \overline{c_1}i_{\mathcal{H}}(v_1) + \overline{c_2}i_{\mathcal{H}}(v_2)$).

Insbesondere sagt dieser Satz, dass zu einem stetigen linearen Funktional $F \in \mathcal{H}'$ genau ein $v \in \mathcal{H}$ existiert mit

$$Fu = \langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} \quad (u \in \mathcal{H}).$$

b) Unbeschränkte Operatoren und der Spektralsatz

A.4 Definition. Seien E, F normierte Räume.

a) Ein linearer Operator T ist eine lineare Abbildung $T: D(T) \rightarrow F$, dessen Definitionsbereich $D(T) \subset E$ ein linearer Unterraum von E ist. Man schreibt häufig (aber nicht korrekt) $T: E \rightarrow F$.

Der Wertebereich von T wird als $R(T)$ bezeichnet, der Kern oder Nullraum ist definiert als $\ker T := N(T) := \{x \in D(T) : Tx = 0\}$.

b) Seien $S, T: E \rightarrow F$ zwei lineare Operatoren. Dann schreibt man $S \subset T$, falls $D(S) \subset D(T)$ und $T|_{D(S)} = S$ ist. Es gilt $S = T$ genau dann falls $S \subset T$ und $T \subset S$.

c) Ein linearer Operator $T: E \rightarrow F$ heißt abgeschlossen, falls für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(T)$ mit $x_n \rightarrow x \in E$ und $Tx_n \rightarrow y \in F$ gilt: $x \in D(T)$ und $Tx = y$.

d) Das Spektrum eines linearen Operators $T: E \rightarrow E$ ist definiert durch

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{id}_E \text{ ist nicht bijektiv.}\}.$$

Das Punktspektrum von T ist gegeben durch

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(T - \lambda \text{id}_E) \neq \{0\}\} \subset \sigma(T).$$

A.5 Definition. Seien E, F Hilberträume und $T: E \rightarrow F$ ein linearer dicht definierter Operator. Definiere

$$D(T^*) := \{y \in F : x \mapsto \langle Tx, y \rangle \text{ ist stetiges lineares Funktional auf } D(T)\}.$$

Für $y \in D(T^*)$ existiert ein eindeutiges $y^* \in E$ mit

$$\langle Tx, y \rangle_F = \langle x, y^* \rangle_E \quad (x \in D(T)).$$

Definiere $T^*: F \rightarrow E$ durch $T^*y := y^*$ ($y \in D(T^*)$). Der Operator T^* heißt (Hilbertraum-)Adjungierte von T .

A.6 Definition. Sei H ein Hilbertraum und $T: H \rightarrow H$ ein linearer dicht definierter Operator in H . Dann heißt T

- (i) selbstadjungiert, falls $T = T^*$,
- (ii) normal, falls $TT^* = T^*T$,
- (iii) symmetrisch, falls $T \subset T^*$ gilt.

Man beachte, dass zwei lineare Operatoren nur dann gleich sind, falls sie die gleichen Definitionsbereiche besitzen und darauf die gleichen Werte annehmen.

A.7 Definition. Sei (X, \mathcal{A}) ein Messraum und H ein Hilbertraum. Eine Abbildung $E: \mathcal{A} \rightarrow L(H)$ heißt ein projektorwertiges Maß (PV-Maß), falls gilt:

- (i) $E(A)$ ist orthogonale Projektion ($A \in \mathcal{A}$), d.h es gilt $E(A)^2 = E(A) = E(A)^*$.
- (ii) Seien $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ paarweise disjunkt. Dann gilt

$$\left[E \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \right] x = \sum_{n \in \mathbb{N}} E(A_n)x \quad (x \in H).$$

- (iii) Es gilt $E(X) = \text{id}_H$.

A.8 Definition. Sei (X, \mathcal{A}) ein Messraum, H ein Hilbertraum, E ein PV-Maß. Sei $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stufenfunktion, $f = \sum_{i=1}^n f_i \chi_{A_i}$. Dann heißt

$$\int f dE := \sum_{i=1}^n f_i E(A_i) \in L(H)$$

das Integral von f bzgl. E .

A.9 Satz. Sei E ein PV-Maß auf (X, \mathcal{A}) mit Werten in $L(H)$ und sei $x \in H$. Definiere das Maß

$$E_x(A) := \|E(A)x\|^2 \quad (A \in \mathcal{A}).$$

Sei $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

- (i) f ist messbar und $\int |f|^2 dE_x < \infty$ (d.h. $f \in L^2(E_x)$).
- (ii) Es gibt eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Stufenfunktionen mit $f_n \rightarrow f$ punktweise und $\int |f_n - f|^2 dE_x \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

A.10 Definition. Sei (X, \mathcal{A}) ein Messraum, $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ messbar, H ein \mathbb{C} -Hilbertraum und E ein PV-Maß in H . Definiere den Operator $\int f dE$ durch

$$D\left(\int f dE\right) := \left\{x \in H : \int |f|^2 dE_x < \infty\right\},$$

$$\left(\int f dE\right)x := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int f_n dE\right)x \quad \text{für } x \in D\left(\int f dE\right).$$

Dabei ist $(f_n)_n$ eine Folge wie in Satz A.9.

A.11 Satz (Spektralsatz). Sei H ein \mathbb{C} -Hilbertraum und $T: D(T) \rightarrow H$ ein normaler Operator in H . Dann existiert genau ein PV-Maß $E: \mathcal{B}(\sigma(T)) \rightarrow L(H)$ mit

$$T = \int_{\sigma(T)} \text{id}_{\sigma(T)} dE.$$

(Beachte, dass dies die Gleichheit unbeschränkter Operatoren ist, also insbesondere die Gleichheit der Definitionsbereiche impliziert.) Für jede messbare Funktion $f: \sigma(T) \rightarrow \mathbb{C}$ wird durch

$$f(T) := \int_{\sigma(T)} f dE, \quad D(f(T)) := \left\{x \in H : \int_{\sigma(T)} |f|^2 dE_x < \infty\right\}$$

ein normaler Operator definiert. Es gilt

$$\|f(T)x\|^2 = \int_{\sigma(T)} |f|^2 dE_x \quad (x \in D(f(T))).$$

Die Abbildung $f \mapsto f(T)$ ist linear, und es gilt

$$\int (fg) dE \supset \left(\int f dE\right) \left(\int g dE\right),$$

$$\int \bar{f} dE = \left(\int f dE\right)^*.$$

Für Polynome f stimmt diese Definition von $f(T)$ mit der üblichen Definition überein.

Literatur

- [1] Adams, R. A., Fournier, J.: Sobolev spaces. 2nd edition, Academic Press, Amsterdam etc., 2003.
- [2] Evans, L. C.: Partial Differential Equations. American Mathematical Society, Providence, R. I., 2002.
- [3] Hörmander, L.: The analysis of linear partial differential operators, Band I-IV. Springer-Verlag Berlin 1976.
- [4] John, F: Partial differential equations. Springer-Verlag New York 1991.
- [5] Jost, J.: Partielle Differentialgleichungen. Berlin 1998.
- [6] Lions, J.-L.: Non-homogeneous boundary value problems and applications (3 Bände). Springer-Verlag Berlin 1972.
- [7] Racke, R.: Lectures on nonlinear evolution equations. Initial value problems. Vieweg-Verlag Braunschweig 1992.
- [8] Strauss, W. A.: Partielle Differentialgleichungen. Vieweg-Verlag Braunschweig 1995.
- [9] Wloka, J.: Partielle Differentialgleichungen. Teubner-Verlag Stuttgart 1982.